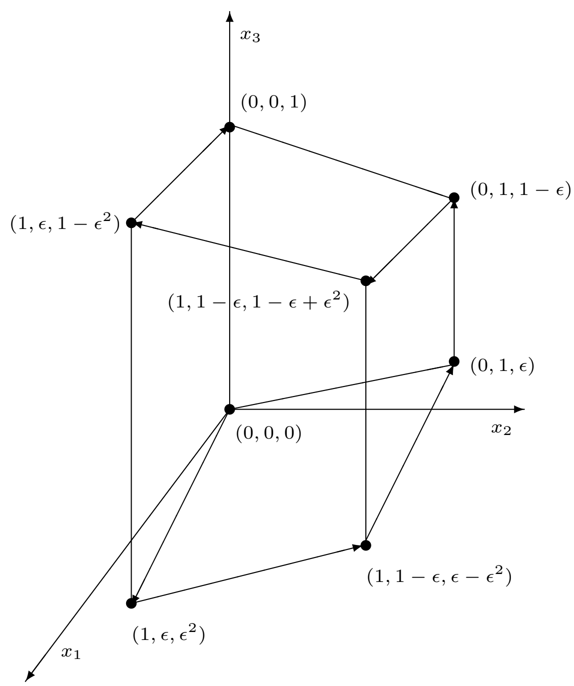
Сучаснае лінейнае праграмаванне



М.М.Кавалёў, М.М.Пісарук

Мінск 1997

УДК 519.852
М.М.Кавалёў, М.М.Пісарук. Сучаснае лінейнае праграмаванне. Пад агульнай рэдакцыяй М.М.Кавалёва. – Мінск, Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт, 1997, -266с.

У кнізе выкладаецца сучасная тэорыя лінейнага праграмавання (ЛП). Разглядаецца аналітычная задача ЛП, якая ўлучае ў сябе не толькі традыцыйныя задачы ЛП, але таксама задачы выпуклага квадратычнага праграмавання і паўазначанага праграмавання. Вывучаюцца класічныя метады лінейнага і цэлалікавага лінейнага праграмавання: прамы і двойны сімплекс-метады, метад галін і межаў, метад адсячэнняў. Прыводзіцца тэорыя самаўзгодненых функцый, на базе якой вывучаюцца метады ўнутранай кропкі: метад бар'ераў, праектыўны метад Кармаркара, прама-двойны праектыўны метад.

Для студэнтаў і выкладчыкаў матэматычных, эканамічных і інжынерных спецыяльнасцей універсітэтаў.

Табл. 2, Іл. 27, Бібліягр. 21 назва.

Оглавление

Прадмова

Нягледзечы на тое, што маецца шмат выдатных кніг па лінейнаму праграмаванню, напісанне гэтага падручніка не здаецца аўтару лішнім. Справа ў тым, што па розных прычынах для большаці нашых чытачоў не даступны англамоўныя падручнікі апошніх часоў. Рускамоўныя кнігі па лінейнаму праграмаванню (беларускамоўных ніколі раней не было) былі напісаны вельмі даўно[1] і таму не адлюстроўваюць той значны прагрэс у тэорыі і практыцы лінейнага праграмавання, які быў дасягнуты на працягу апошніх 15-ці гадоў.

Сучасныя метады (у прыватнасці, метады ўнутранай кропкі, якія вывучаюцца ў гэтым падручніку) здольны рашаць не толькі традыцыйныя задачы лінейнага праграмавання, але і значна больш шырокі клас задач, напрыклад, пры адпаведных умовах, задачы выпуклага праграмавання. Таму мы фармулюем задачу лінейнага праграмавання ў самай агульнай форме, калі няроўнасці задаюцца ў так званай "канічнай форме".

Мінімальная падрыхтоўка, неабходная для чытання гэтай кнігі, — гэта веданне асноў матэматычнага аналіза і лінейнай алгебры. Ва ўводзінах і ў дадатку 1 мы коратка анансуем шэраг рэзультатаў і алгарытмаў з курса вылічальнай лінейнай алгебры, якія шырока выкарыстоўваюцца пры распрацоўцы эфектыўных алгарытмаў (і праграм) лінейнага праграмавання. Чытач таксама павінен у нейкай ступені быць знаёмым з матэматычным аналізам многіх зменных і асноўнымі рэзультатамі выпуклага аналіза. Спадзяёмся таксама, што асноўныя палажэнні тэорыі складанасці вылічэнняў вядомы чытачу.

Падручнік можна выкарыстоўваць пры падрыхтоўцы курса лекцый і практычных заняткаў для студэнтаў-матэматыкаў і інфарматыкаў па "Метадах аптымізацыі і даследаванню аперацый". У дадатку 2 мы прыводзім апісанне бібліятэкі класаў на мове $C{+}{+}$. Гэтыя класы ўтрымліваюць структуры дадзеных і функцыі, якія рэалізуюць многія з апісаных у дадзенай кнізе алгарытмаў лінейнага і цэлалікавага праграмавання. Акрамя таго, там маюцца функцыі, з дапамогай якіх можна вельмі проста рэалізаваць многія іншыя алгарытмы лінейнага праграмавання. Мы спадзяемся, што дадзеная бібліятэка будзе карыснай пры распрацоўцы лабараторных і

[1] Выключэнне складаюць пераклад манаграфіі А.Схрэйвера і адна глава з манаграфіі Ю.Несцерава (гл. спіс літаратуры), у якіх асноўны ўпор робіцца на тэорыю.

самастойных заданняў для студэнтаў, якія спецыялізуюцца ў аптымізацыі.

Уводзіны

У.1 Папярэднія звесткі з лінейнай алгебры

У.1.1 Векторные и матричные нормы

Нормой в $\mathbb{R}^n$ называется действительная функция $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет условиям:

1) $\|v\| \geq 0$ для всех $v \in \mathbb{R}^n$, причем $\|v\| = 0$, только если $v = 0$;

2) $\|\alpha v\| = \alpha \|v\|$ для любых $v \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$;

3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ для любых $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Мы будем использовать следующие векторные нормы на $\mathbb{R}^n$:

- *евклидова норма*

$$\|x\| = \|x\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^T x};$$

- l_1-норма

$$\|x\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} |x_1| + \ldots + |x_n|;$$

- l_∞-норма

$$\|x\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

З каждой векторной нормой $\|\cdot\|_\alpha$ на $\mathbb{R}^n$ связана *"индуцированная"матричная норма* $\|\cdot\|_\alpha$ на $M_{n,n}(\mathbb{R})$, которая определяется по правилу:

$$\|A\|_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \mathbb{R}^n,\, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} = \max_{x \in \mathbb{R}^n,\, \|x\|_\alpha = 1} \|Ax\|_\alpha .$$

Из этого определения индуцированной нормы следуют следующие ее свойства:

- $\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|x\|_\alpha$.
- $\|I\|_\alpha = 1$.

Мы будем использовать следующие Асноўным векторныйм нормам адпавядаюць следующие

матричные нормы:

- *спектральная норма*

$$\|A\| = \|A\|_2 = \max_{x\in\mathbb{R}^n,\, \|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}\,,$$

  дзе $\lambda_{\max}$ ёсць максімальны асабісты лік матрыцы A^TA;

- *максімальная слупковая норма*

$$\|A\|_1 = \max_{x\in\mathbb{R}^n,\, \|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,;$$

- *максімальная радковая норма*

$$\|A\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{R}^n,\, \|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

Часам матрыцу $X = [x_{ij}] \in M_{n.n}(\mathbb{R})$ зручна разглядаць як n^2-мерны вектор

$$X = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn}).$$

Скалярны здабытак дзвюх матрыц $X, Y \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ азначаецца па правілу:

$$(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij} = \operatorname{Tr}(XY),$$

дзе $\operatorname{Tr}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$ ёсць *след* матрыцы X. Гэты скалярны здабытак вызначае *яўклідаву норму* на $M_{n,n}(\mathbb{R})$:

$$\|X\|_E \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\operatorname{Tr}(X^TX)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2}\,.$$

Зазначым, што ў дачыненні да матрыц, яўклідаву норму называюць *нормай Фрабеніуса*. Так як $\|I\|_E = \sqrt{n}$, то норма Фрабеніуса не з'яўляецца індуцыраваннай матрычнай нормай ні для якой векторнай нормы.

У далейшым, если не агаворана асобна, пад векторнай нормай мы разумеем яўклідаву норму, а пад матрычнай нормай — спектральную норму.

У заключэнне гэтага параграфа мы напомнім некалькі вядомых няроўнасцей.

- *Няроўнасць Кашы-Шварца* мае месца для любых вектороў $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x^Ty \le \|x\|\|y\|\,.$$

- Так як аб'ём паралелепіпеда, "нацягнутага"на слупкі матрыцы $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, роўны $\sqrt{\det(A^T A)}$, то *няроўнасць Адамара*

  $$\sqrt{\det(A^T A)} \leq \|A^1\| \cdot \ldots \cdot \|A^n\|$$

  выражае той інтыітыўна відавочны факт, што сярод паралелепіпедаў з аднолькавымі даўжынямі старон найбольшы аб'ём мае прамавугольны паралелепіпед.

- У прымяненні да квадратнай матрыцы $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ няроўнасць Адамара прымае выгляд:

  $$|\det(A)| \leq \|A^1\| \cdot \ldots \cdot \|A^n\| .$$

У.2 Линейные и афинные пространства

Линейная, афинная и выпуклая оболочки множества векторов $X \subseteq \mathbb{R}^n$ соответственно задаются выражениями:

$$\begin{aligned}
\text{lin_hull}(X) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \,:\, k \geq 0\,; \right. \qquad (1)\\
&\quad \left. x^i \in X\,,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, k) \right\} ,\\
\text{aff_hull}(X) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \,:\, k \geq 1\,; \right. \qquad (2)\\
&\quad \left. x^i \in X\,,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, k)\,; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\} ,\\
\text{conv_hull}(X) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \,:\, k \geq 1\,; \right. \qquad (3)\\
&\quad \left. x^i \in X\,,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_+ \quad (i = 1, \ldots, k)\,; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\} .
\end{aligned}$$

Если $X = \text{lin\_hull}(X)$, то X называется *линейным подпространством*; X есть *афінное подпространство*, если $X = \text{aff\_hull}(X)$; если же $X = \text{conv\_hull}(X)$, то множество X *выпуклое*.

Базисом линейного подпространства $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ называется минимальный набор векторов $\mathcal{B} = \{b^1, b^2, \ldots, b^k\} \subseteq \mathcal{L}$, такой, что $\text{lin\_hull}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}$. Из линейной алгебры известно, что каждый базис имеет одинаковое число векторов, которое называют *размером линейного подпространства* $\mathcal{L}$.

Отметим, что если $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ есть афинное подпространство, то для любого $a \in \mathcal{A}$ множество $\mathcal{L} = \{x - a \,:\, x \in \mathcal{A}\}$ является линейным подпространством. Другими словами, афинное подпространство $\mathcal{A}$ можна определить как линейное подпространство $\mathcal{L}$, сдвинутое на вектор a: $\mathcal{A} = \mathcal{L} + a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{a + x \,:\, x \in \mathcal{L}\}$. *Размер* $\mathcal{A}$ определяется равным размеру $\mathcal{L}$. Афинное подпространство является линейным подпространством тогда и только тогда, когда оно содержит нулевой вектор. *Размер подмножества векторов* из $\mathbb{R}^n$ — это размер минимального афинного подпространства, которое содержит это подмножество.

Афинное подпространство векторного пространства $\mathbb{R}^n$ размера $n-1$ называется *гиперплоскостью*. Иначе, гиперплоскость $H(a, b)$ можно определить как множество точек $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, ax = b\}$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$. Гиперплоскость определяет два *полупространства* $H_{\leq}(a, b)$ и $H_{\geq}(a, b)$, которые соответственно определяются как множества точек $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, ax \leq b\}$ и $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, ax \geq b\}$.

Прастора значэнняў матрыцы $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ёсць лінейная падпрастора ў $\mathbb{R}^m$, которая азначаецца следующийм чынам:

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathcal{A}\S \,:\, \S \in \mathbb{R}^{\setminus}\}. \tag{4}$$

Нуль-прастора матрыцы $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ёсць лінейная падпрастора ў $\mathbb{R}^n$, которая азначаецца па правілу:

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\S \in \mathbb{R}^{\setminus} \,:\, \mathcal{A}\S = /\}. \tag{5}$$

Маюць месца следующие роўнасці:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathcal{A})^{\perp} &= \mathcal{N}(\mathcal{A}^{\mathcal{T}}), \\ \mathcal{R}(\mathcal{A}) &= \mathcal{N}(\mathcal{P}_{\mathcal{N}(\mathcal{A}^{\mathcal{T}})}). \end{aligned} \tag{6}$$

Тут

$$\mathcal{L}^{\perp} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\S \in \mathbb{R}^{\setminus} \,:\, \S^{\mathcal{T}}\dagger = / \text{ для ўсіх } \dagger \in \mathcal{L}\}$$

— *артаганальна дадатковая лінейная падпрастора* да лінейнай падпрасторы $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^{\setminus}$, а праз $P_{\mathcal{L}}$ мы абазначаем *матрыцу праектавання* на лінейную падрастору $\mathcal{L}$, г. зн. што $P_{\mathcal{L}}x$ ёсць бліжэйшая да $x \in \mathbb{R}^n$ кропка з $\mathcal{L}$.

Няхай $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Так як $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ і $\mathcal{N}(\mathcal{A}^{\mathcal{T}})$ — артаганальныя дадатковыя лінейныя падпрасторы ў $\mathbb{R}^m$, то любы вектор $z \in \mathbb{R}^m$ можна раскласці як $z = z^r + z^n$, дзе $z^r = P_{\mathcal{R}(\mathcal{A})}z$, $z^n = P_{\mathcal{N}(\mathcal{A}^{\mathcal{T}})}z$. Если A ёсць матрыца *поўнага слупковага рангу* ($\operatorname{rank} A = n$), то

$$P_{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = A(A^T A)^{-1} A^T. \tag{7}$$

Для матрыцы *поўнага радковага рангу* ($\operatorname{rank} A = m$)

$$P_{\mathcal{N}(\mathcal{A})} = I - A^T(AA^T)^{-1}A. \tag{8}$$

Зазначым, што норма матрыцы праектавання $P_{\mathcal{L}}$ на лінейную падпрастору $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^{\setminus}$ роўна адзінцы. Сапраўды, няхай $x \in \mathbb{R}^n$. Так як $x = P_{\mathcal{L}}x + P_{\mathcal{L}^{\perp}}x$, і $P_{\mathcal{L}}x \perp P_{\mathcal{L}^{\perp}}x$ то $\|x\|^2 = \|P_{\mathcal{L}}x\|^2 + \|P_{\mathcal{L}^{\perp}}x\|^2$. Адсюль адразу вынікае, што

$$\|P_{\mathcal{L}}\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n,\, x \neq 0} \frac{\|P_{\mathcal{L}}x\|}{\|x\|} = 1$$

(так як максімум дасягаецца на $x \in \mathcal{L}$ і роўны 1).

Часцей за ўсё, на практыцы афінная падпрастора $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{\setminus}$ задаецца як мноства рашэнняў *сістэмы лінейных ураўненняў* (*СЛУ*) $Ax = b$, дзе $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\operatorname{rank} A = n - \operatorname{rank} \mathcal{A}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Але многія аптымізацыйныя алгарытмы распрацаваны для выпадку, если афінная падпрастора прадстаўляецца у выглядзе $\mathcal{A} = \mathcal{R}(\mathcal{A}) + \dashv$, дзе $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}$. Пытанне аб тым, як перайсці ад аднаго прадстаўлення да другога, мы будем разглядаць у дадатку В (параграф В.2.1).

У.2.1 Адваротная матрыца

Няхай $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Если $\operatorname{rank} A = n$, то існуе *адваротная матрыца* A^{-1} ($AA^{-1} = I$). З лінейнай алгебры вядома, што адваротную матрыцу можна вылічыць, выканаўшы $O(n^3)$ арыфметычных аперацыі. Если $\operatorname{rank} A = n$, то СЛУ $Ax = b$, дзе $b \in \mathbb{R}^n$, мае адзінае рашэнне $x = A^{-1}b$. Аднак зазначым, што на практыцы рашыць СЛУ значна прасцей, напрыклад, метадам Гаўса, чым знайсці адваротную матрыцу. Таму у далейшым выраз $x = A^{-1}b$ мы будем разумець як кароткі запіс таго, што x з'яўляецца рашэннем СЛУ $Ax = b$.

Дабаўленне матрыцы малога рангу

Няхай для нявыраджанай матрыцы $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ вядома адваротная матрыца A^{-1}. Разгледзім матрыцу $B = A + XYZ$, дзе $X \in M_{n,r}(\mathbb{R})$, $Z \in M_{r,r}(\mathbb{R})$, $Y \in M_{r,n}(\mathbb{R})$, прычым матрыца Z нявыраджаная. Тады, если B нявыраджаная, то

$$B^{-1} = A^{-1} - A^{-1}X(Z^{-1} + YA^{-1}X)^{-1}YA^{-1}.$$

Если r значна меньшае за n, то пабудаваць адваротныя да $r \times r$-матрыц Z і $Z^{-1} + YA^{-1}X$ значна прасцей, чым будаваць B^{-1} непасрэдна па B.

У прыватным выпадку, если B атрымліваецца з A дабаўленнем матрыцы рангу 1, г. зн. если $B = A + xy^T$,

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + y^T A^{-1} x} A^{-1} x y^T A^{-1}.$$

Замена аднаго радка матрыцы

Няхай матрыца $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ атрымана з нявыраджанай матрыцы $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ заменай k-радка на вектор радок $a \in \mathbb{R}^n$. Няхай $u = aA^{-1}$. Тады матрыца BA^{-1} мае выгляд

$$I(k,u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ u_1 & u_2 \dots & u_{k-1} & u_k & u_{k+1} \dots & u_n \\ 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{bmatrix},$$

Матрыца $I(k,u)$ называется *элементарнай.* Яна атрымліваецца з адзінкавай матрыцы заменай радка k на радок u. Зазначым, што $\det I(k,u) = u_k$. Няцяжка пераканацца, што, если $u_k \neq 0$,

$$I(k,u)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ -\frac{u_1}{u_k} & -\frac{u_2}{u_k} \dots & -\frac{u_{k-1}}{u_k} & \frac{1}{u_k} & -\frac{u_{k+1}}{u_k} \dots & -\frac{u_n}{u_k} \\ 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Так як элементы b_{ij} матрыцы $B^{-1} = A^{-1}I(k,u)^{-1}$ вылічваюцца праз элементы a_{ij} матрыцы A^{-1} па формуле

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \frac{a_{ik}u_j}{u_k}, & j \neq k, \\ \frac{a_{ik}}{u_k}, & j = k, \end{cases}$$

то, зыходзячы з матрыцы A^{-1}, B^{-1} можна вылічыць, выканаўшы $O(n^2)$ арыфметычных аперацыі.

У.2.2 Дадатна азначаныя матрыцы і эліпсоіды

Абазначым праз SM^n *падпрастору сіметрычных матрыц* з $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Матрыца $D \in SM^n$ называется *дадатна азначанай,* если $x^T Dx > 0$ для ўсіх $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Если ж $x^T Dx \geq 0$ для ўсіх $x \in \mathbb{R}^n$, то матрыца D называется *неадмоўна азначанай.* Неадмоўна (дадатна) азначаныя матрыцы ўтвараюць выпуклы конус (гл. параграф У.3.5) у падпрасторы SM^n, які будем абазначаць праз SM^n_+ (SM^n_{++}).

Для матрыцы $D \in SM^n$ следующие ўмовы эквівалентны:

(a) D — неадмоўна (дадатна) азначана;

(b) усе асабістыя значэнні матрыцы D неадмоўныя (дадатныя);

(c) $D = Q^T Q$ для нейкай матрыцы $Q \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (i $\operatorname{rank}(Q) = n$);

(d) існуе адзіная неадмоўна (дадатна) азначаная матрыца $D^{\frac{1}{2}}$ ***квадратны корань матрыцы*** D), што $D = D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} = (D^{\frac{1}{2}})^2$ (Няцяжка праверыць, што $D^{-\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} (D^{\frac{1}{2}})^{-1} = (D^{-1})^{\frac{1}{2}}$.)

Няхай $D \in SM^n_{++}$ і r дадатны лік. Множства

$$\begin{aligned} \operatorname{ell}(t, D, r) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, (x-t)^T D (x-t) \le r^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x - t\|_D \le r\} \end{aligned}$$

называется *эліпсоідам.* Тут $t \in \mathbb{R}^n$ ёсць *цэнтр* эліпсоіда, а норма $\|x\|_D$ вектора $x \in \mathbb{R}^n$ азначаецца суадносінай

$$\|x\|_D \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^T D x}\,.$$

Відавочна, што $\operatorname{ell}(t, D, r) = \operatorname{ell}(t, (1/r^2)D, 1)$.

Зазначым таксама, што если $D \in SM^n_+$, то $\|\cdot\|_D$ з'яўляецца ***паўнормай*** (з умовы $\|x\|_D = 0$ не вынікае, што $x = 0$).

У.2.3 Афінныя пераўтварэнні

Няхай $Q \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}^n$. Пераўтварэнне $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, которое задаецца формулай $T(x) = t + Qx$, называется *афінным пераўтварэннем.* Афіннае пераўтварэнне адлюстроўвае прастору $\mathbb{R}^m$ у афінную падпрастору $\mathcal{R}(\mathcal{Q}) + \sqcup \subseteq \mathbb{R}^\setminus$. Відавочна, што афіннае пераўтварэнне

захоўвае адносіны ўключэння паміж мноствамі:

$$\text{если } S \subseteq S' \subseteq \mathbb{R}^m, \text{ то } T(S) \subseteq T(S').$$

Если $\operatorname{rank} Q = m$, то T узаемна адназначнае пераўтварэнне. У гэтым выпадку існуе *адваротнае пераўтварэнне* $T^{-1}(y) = (Q^T Q)^{-1} Q^T (y - t)$, которое таксама з'яўляецца афінным пераўтварэннем. Если ў дадатак $m = n$, то $T^{-1}(y) = Q^{-1}(y - t)$.

Адзначым следующие свойствы афіннага пераўтварэння $T(x) = Qx + t$, если $m = n$ і матрыца Q нявыраджана.

- Для $S \in \mathbb{R}^n$
$$\operatorname{vol} T(S) = \operatorname{vol} S \det Q\,, \tag{9}$$
дзе $\operatorname{vol} S$ ёсць *аб'ём* S.

- Пераводзіць: гіперплоскасць у гіперплоскасць, паўплоскасць у паўплоскасць.

- Адлюстроўвае шар $B^n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n :\, \|x\| \le 1\}$ у эліпсоід:
$$\begin{aligned} T(B^n) &= \{T(x) : x \in \mathbb{R}^n, x^T x \le 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : (T^{-1}(y))^T T^{-1}(y) \le 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : (y - t)^T (Q^{-1})^T Q^{-1} (y - t) \le 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : (y - t)^T D^{-1} (y - t) \le 1\} = \operatorname{ell}(t, D^{-1}), \end{aligned}$$

дзе $D = QQ^T$. Адсюль вынікае, што эліпсоід можа быць азначаны як афінны вобраз шара.

Афіннае пераўтварэнне $T(x) = Qx + t$ з'яўляецца *ізаметрычным* (захоўвае яўклідаву даўжыню: $\|x\| = \|T(x)\|$ для ўсіх $x \in \mathbb{R}^n$) тады і толькі тады, если матрыца Q *артаганальная*: $Q^T Q = I$. Сярод ізаметрычных афінных пераўтварэнняў асабліва цікавыя *кручэнні* — пераўтварэнні, якія пераводзяць адзін дадзены вектор у другі той жа даўжыні.

Для любога ненулявога вектора $u \in \mathbb{R}^n$ *пераўтварэнне Хаўсхолдэра* азначаецца элементарнай сіметрычнай матрыцай

$$H = I - \frac{1}{\beta} u u^T \,,$$

дзе $\beta = \frac{1}{2}\|u\|^2$. Гэтая матрыца артаганальная і таму пераўтварае вектары з захаваннем норм. Для двух розных вектороў $a, b \in \mathbb{R}^n$ аднолькавай яўклідавай даўжыні заўсёды можна падабраць матрыцу Хаўсхолдэра, которая пераводзіць адзін вектор у другі, г. зн. што

$$Ha = \left(I - \frac{1}{\beta} u u^T \right) a = b \,. \qquad (10)$$

Няцяжка праверыць, што (10) справядліва пры любым u, паралельным $a - b$.

У.3 Элементы шматмернага аналізу

У.3.1 Элементы тапалогіі

Няхай $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Элемент $x \in X$ называецца *ўнутранай кропкай* мноства X, калі існуе такое $\epsilon > 0$, што $B(x, \epsilon) \subset X$. Тут $B(x, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \epsilon\}$ ёсць *шар* радыуса ϵ з цэнтрам x. Мноства ўнутраных кропак з X называецца *ўнутранасцю* мноства X і абазначаецца $\operatorname{int} X$. Калі $X = \operatorname{int} X$, то X — *адкрытае мноства. Наваколлем* кропкі $x \in \operatorname{int} X$ называецца любое адкрытае мноства, якое ўтрымлівае кропку x.

Кажуць, што $x \in \mathbb{R}^n$ ёсць *кропка дакранання* мноства $X \subset \mathbb{R}^n$, калі $B(x, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$ для любога $\epsilon > 0$. Мноства ўсіх кропак дакранання мноства X называецца *замыканнем* мноства X і абазначаецца праз $\operatorname{cl} X$. Мноства X называецца *замкнёным*, калі $X = \operatorname{cl} X$. Мноства $\operatorname{bd} X \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{cl} X \setminus \operatorname{int} X$ называецца *граніцай* мноства X, а кропкі з $\operatorname{bd} X$ называюцца *гранічнымі*.

Калі памер мноства $X \subset \mathbb{R}^n$ меншы за n, то тады $\operatorname{int} X = \emptyset$. Няхай $\mathcal{A}$ ёсць мінімальная афінная падпрастора, якой належыць мноства X. *Адносная ўнутранасць* $\operatorname{rint} X$ мноства X ёсць мноства кропак $x \in X$, такіх, што $B(x, \epsilon) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ для нейкага $\epsilon > 0$.

Мноства X называецца *абмежаваным*, калі яно ўтрымліваецца ў нейкім шары.

Кампактныя множствы. Тэарэма Вейерштраса

Бясконцую паслядоўнасць

$$x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$$

вектараў з $\mathbb{R}^n$ будзем абазначаць праз $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ ці проста $\{x^k\}$. Гавораць, што паслядоўнасць $\{x^k\}$ *збягаецца* да кропкі $x \in \mathbb{R}^n$ (ці x ёсць *прэдзел паслядоўнасці* $\{x^k\}$, пішуць $x^k \to x$), калі

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x\| = 0.$$

Множства $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называецца *кампактным*, калі з любой паслядоўнасці $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ элементаў з X можна выбраць падпаслядоўнасць $\{x^{k^i}\}_{i=1}^{\infty}$, якая збягаецца да элемента з X. Тут $\{k^i\}$ ёсць неўбываючая паслядоўнасць натуральных лікаў, Вядома, што ў прасторы $\mathbb{R}^n$ множства X кампактнае тады і толькі тады, калі яно замкнёнае і абмежаванае.

Наступная тэарэма з'яўляецца фундаментальнай і тычыцца існавання аптымальнага рашэння ў задачах аптымізацыі.

Тэарэма У.3.1 (Вейерштраса) *Калі f ёсць непарыўная сапраўдная функцыя на кампактным множстве $X \in \mathbb{R}^n$, то задача*

$$\min_{x\in X} f(x)$$

мае аптымальнае рашэнне $x^* \in X$, *г. зн.* $f(x^*) \le f(x)$ *для ўсіх* $x \in X$.

Наступны вынік з тэарэмы Вейерштраса вельмі часта дазваляе ўстанавіць існаванне аптымальнага рашэння ў задачах аптымізацыі без абмежаванняў.

Вынік У.3.1 *Няхай f — непарыўная функцыя на $\mathbb{R}^n$, такая, што $f(x) \to \infty$, калі $\|x\| \to \infty$. Тады задача безумоўнай аптымізацыі*

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \tag{11}$$

мае аптымальнае рашэнне $x^* \in \mathbb{R}^n$.

У.3.2 Дыферэнцавальныя функцыі

Часта бывае так, што функцыя f азначана не на ўсёй прасторы $\mathbb{R}^n$, а толькі на нейкім падмностве $X \subset \mathbb{R}^n$. У гэтым выпадку множства X азначэння функцыі f абазначаюць праз $\mathrm{dom}\ f$ і называюць *эфектыўным абсягам* функцыі f. Зручна лічыць, што $f(x) = \infty$ ва ўсіх кропках $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{dom}\ f$, а арыфметычныя аперацыі і аперацыі параўнання для ўсіх $q \in \mathbb{R}$ выконваюцца па наступных правілах:

$$\begin{array}{lll} q < \infty, & \max\{q, \infty\} = \infty, & \infty \le \infty, \\ q + \infty = \infty, & \infty + \infty = \infty, & \\ 0 \times \infty = 0, & t \times \infty = \infty \quad \text{для } t > 0 & . \end{array}$$

Цяпер $\operatorname{dom} f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) < \infty\}$.

Няхай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Калі для $x \in \operatorname{dom} f$ і $p \in \mathbb{R}^n$ існуе прэдзел

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon p) - f(x)}{\epsilon},$$

то ён называецца *вытворнай па напрамку* p функцыі f у кропцы x і абазначаецца праз $\partial f(x)/\partial p$. Зазначым таксама, што калі разглядаць $\partial f(x)/\partial p$ як функцыю ад x, то для $q \in \mathbb{R}^n$ можна азначыць

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial q \, \partial p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial p} \right).$$

Для $i = 1, \ldots, n$ велічыня $\partial f(x)/\partial \, \mathrm{e}_i$ абазначаецца праз $\partial f(x)/\partial x_i$ і называецца *прыватнай вытворнай* па каардынаце x_i. Калі ў кропцы x і ў нейкім яе наваколлі існуюць прыватныя вытворныя $\partial f(x)/\partial x_i$ для $i = 1, \ldots, n$, то кажуць, што функцыя f *дыферэнцавальная* у кропцы x. Вектар, складзены з усіх n прыватных вытворных называецца *градыентам* функцыі f у кропцы x. Мы будзем абазначаць яго праз $f'(x)$:

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T.$$

Па аналогіі з аднамерным выпадкам, можна азначыць вытворныя вышэйшых парадкаў як вытворныя ад вытворных папярэдніх парадкаў. Пры гэтым, колькасць прыватных вытворных наступнага парадку ў n раз большая за колькасць вытворных папярэдняга парадку. У аптымізацыі, як правіла, не выкарыстоўваюць вытворных парадку вышэй другога. Можна азначыць n^2 *другіх* прыватных вытворных:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, n.$$

Гэтыя велічыні звычайна запісваюць так:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i \neq j; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_i}, \quad i = j.$$

Калі прыватныя вытворныя $\partial f(x)/\partial x_i$, $\partial f(x)/\partial x_j$ і $\partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j$ існуюць і непарыўныя, то існуе і $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$, прычым $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$. У гэтым выпадку ўсе n^2 прыватных вытворных другога парадку прынята зводзіць у квадратную сіметрычную *матрыцу другіх вытворных*, якую таксама называюць *матрыцай Гессэ*. У далейшым гэту матрыцу будзем абазначаць праз $f''(x)$:

$$f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix}.$$

У аптымізацыі знаходзяць прымяненне многія рэзультаты класічнага аналізу. Але найбольш часта пры апраксімацыі функцыі ў наваколлі нейкай кропкі пряняецца тэарэма Тэйлора. У аптымізацыйных алгарытмах, як правіла рэдка выкарыстоўваюць больш трох членаў раскладу Тэйлора. Няхай $x \in \mathbb{R}^n$ — нейкая кропка, а $p \in \mathbb{R}^n$ — вектар, які задае нейкі напрамак. Тады ў наваколлі кропкі $h = 0$ мае месца роўнасць

$$f(x + hp) = f(x) + hf'(x)^T p + \frac{1}{2}h^2 p^T f''(x)p + O(h^3).$$

Зазначым, што хуткасць змянення функцыі f пры руху ўздоўж напрамку p з кропкі x задаецца велічынёй $f'(x)^T p$, якую называюць *першай вытворнай па напрамку* p. Аналагічна, лік $p^T f''(x)p$ называецца *другой вытворнай па напрамку* p. Яе яшчэ называюць *крывізною ўздоўж напрамку* f уздоўж p. Калі $p^T f''(x)p > 0$ (< 0), то гавораць, што p — напрамак *дадатнай* (*адмоўнай*) крывізны.

У.3.3 Неабходныя ўмовы лакальнага мінімума

Кропка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называецца *лакальным мінімумам функцыі* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *на мностве* X, калі існуе наваколле $B(x^0, r)$ кропкі x^0, што $f(x^0) \leq f(x)$ для ўсіх $x \in B(x^0, r) \cap X$. Кропка x^0 ёсць *глабальны мінімум функцыі* $f(x)$ *на* X, калі $f(x^0) \leq f(x)$ для ўсіх $x \in X$. Калі $X = \mathbb{R}^n$, то мы будзем гаварыць пра *лакальны і глабальны мінімумы функцыі* f.

Калі $f(x)$ — двойчы непарыўна дыферэнцавальная функцыя, то, выкарыстоўваючы формулу Тэйлора ў наваколлі кропкі $x^* \in \mathbb{R}^n$

$$f(x^* + hp) = f(x^*) + hp^T f'(x^*) + \frac{1}{2}h^2 p^T f''(x^* + \theta hp)p,$$

дзе $h \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 1$, а $p \in \mathbb{R}^n$, няцяжка атрымаць:

1. **Неабходныя ўмовы лакальнага мінімума**:
   - (У1) x^* — *стацыянарная кропка*, г. зн. $f'(x^*) = 0$;
   - (У2) матрыца $f''(x^*)$ неадмоўна азначана.
2. **Дастатковыя ўмовы лакальнага мінімума**:
   - (Д1) $f'(x^*) = 0$;
   - (Д2) матрыца $f''(x^*)$ дадатна азначана.

У.3.4 Метад Ньютана

Будзем разглядаць задачу безумоўнай аптымізацыі (11), пры ўмове, што функцыя $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ двойчы непарыўна дыферэнцавальная. Пачынаючы з нейкай кропкі $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, метад Ньютана будуе паслядоўнасць кропак $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(K)}$ пакуль не будзе дасягнута патрэбная дакладнасць.

Возьмем суму трох першых членаў шэрагу Тэйлора у якасці квадратычнай мадэлі функцыі f у наваколлі бягучай кропкі $x^{(k)}$:

$$f(x^{(k)}+p) \approx \Phi(p) \stackrel{\text{def}}{=} f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})^T p + \frac{1}{2} p^T f''(x^{(k)}) p.$$

Мінімум $\Phi(p)$ (калі ён існуе), дасягаецца на вектары $p^{(k)}$, які знойдзем з умовы $\Phi'(p) = 0$, ці

$$f''(x^{(k)})p = -f'(x^{(k)}). \tag{12}$$

Пакладзем $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k p^{(k)}$, дзе h_k — даўжыня кроку.

Калі матрыца $f''(x^{(k)})$ дадатна азначана, то сістэма (12) мае адзінае рашэнне $p^{(k)} = -f''(x^{(k)})^{-1} f'(x^{(k)})$. У гэтым выпадку напрамак $p^{(k)}$ будзе *напрамкам спуску*. Сапраўды, так як

$$f'(x^{(k)})^T p^{(k)} = -f'(x^{(k)})^T f''(x^{(k)})^{-1} f'(x^{(k)}) < 0, \tag{13}$$

то

$$f(x^{(k)} + p^{(k)}) \geq f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})^T p^{(k)} < f(x^{(k)}).$$

Зазначым таксама наступную цікавую акалічнасць: ньютанаўскі напрамак $p^{(k)}$ можна разглядаць як *напрамак найхутчэйшага спуску*, калі выкарыстоўваць норму $\|p\|_{f''(x^{(k)})}$:

$$p^{(k)} = \arg\min_{p\in\mathbb{R}^n} \frac{f'(x^{(k)})^T p}{\|p\|_{f''(x^{(k)})}}.$$

Абазначым праз $\Psi(f,x)$ даўжыню ньютанаўскага кроку ў кропцы $x \in \operatorname{dom} f$, г. зн. $\Psi(f,x) \stackrel{\text{def}}{=} \|f'(x)\|_{f''(x)^{-1}}$ (гл. (13)). Як мы ўбачым пазней, калі функцыя f задавальняе нейкім дадатковым свойствам, велічыня $\Psi(f,x)$ дазваляе ацаніць, наколькі блізка знаходзіцца кропка x ад кропкі мінімума $x(f)$ функцыі f.

Метад Ньютана пры лінейных абмежаваннях

Разгледзім задачу мінімізацыі гладкай функцыі $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на афіннай падпрасторы

$$\min\{f(x)\ :\ \mathcal{L}+\dashv\}\,, \tag{14}$$

дзе $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}$ — лінейная падпрастора ў $\mathbb{R}^n$. Няхай слупкі матрыцы $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ утвараюць базіс прасторы $\mathcal{L}$. Тады для любога $x \in \mathcal{L}$ існуе вектар $y \in \mathbb{R}^m$, што $x = By$.

Метад Ньютана пачынае з *дапушчальнай* кропкі $x^{(0)} \in \mathcal{L}+\dashv$, напрыклад $x^{(0)} = a$. На $k+1$-й ітэрацыі ньтанаўскі напрамак $p^{(k)}$ знаходзім, вырашаючы задачу

$$\min\{\Phi(p)\ :\ p \in \mathcal{L}\} \tag{15}$$

мінімізацыі квадратычнай функцыі на лінейнай падпрасторы. Відавочна, калі $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$ — аптымальнае рашэнне задачы

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m} \frac{1}{2} y^T B^T f''(x^{(k)}) By + f'(x^{(k)})^T By\,, \tag{16}$$

то $p^{(k)} = B\overline{y}$ — аптымальнае рашэнне задачы (15). Аптымальнае рашэнне $\overline{y}$ задачы безумоўнай аптымізацыі (16) знаходзім з ўмовы роўнасці нулю градыента ў кропцы оптымума:

$$B^T f''(x^{(k)})B\overline{y} = -B^T f'(x^{(k)})\,. \tag{17}$$

Калі $f''(x)$ — нявыраджаная матрыца, то, так як $\operatorname{rank} B = m$, матрыца $B^T f''(x^{(k)})B$ — таксама нявыраджана і таму

$$\overline{y} = -\left(B^T f''(x^{(k)})B\right)^{-1} B^T f'(x^{(k)})\,,$$

а

$$p^{(k)} = -B\left(B^T f''(x^{(k)})B\right)^{-1} B^T f'(x^{(k)})\,. \tag{18}$$

Калі матрыца $f''(x^{(k)})$ дадатна азначана, то дадатна азначана і матрыца $B\left(B^T f''(x^{(k)})B\right)^{-1} B^T$; таму функцыя f убывае ўздоўж ньтанаўскага напрамку $p^{(k)}$:

$$f'(x^{(k)})^T p^{(k)} = -f'(x^{(k)})^T B\left(B^T f''(x^{(k)})B\right)^{-1} B^T f'(x^{(k)}) < 0\,.$$

У заключэнне адзначым, што ў выпадку выпуклай квадратычнай функцыі $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$ метад Ньютана, пачынаючы з любой дапушчальнай стартавай кропкі $x^{(0)}$, рашае задачу (14) за адну ітэрацыю.

У.3.5 Выпуклыя мноствы і функцыі

Як мы ўжо адзначалі, мноства $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называецца выпуклым, калі $X = \operatorname{conv\_hull}(X)$. Гэта азначэнне эквівалентна наступнаму больш простаму азначэнню. Мноства $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *выпуклае*, калі разам з любымі дзвумя кропкамі $x, y \in X$ увесь *адрэзак*

$$[x,y] \stackrel{\text{def}}{=} \{z\,:\, z = \alpha x + (1-\alpha)y\,,\ 0 \le \alpha \le 1\}$$

таксама належыць мноству X. Прасцейшымі прыкладамі выпуклых мностваў з'яўляюцца лінейная падпрастора, *дадатны артант*

$$\mathbb{R}^n_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n\,:\, x_i \ge 0,\ i = 1,\dots,n\},$$

і яўклідаў шар $B(x,r)$.

Функцыя f называецца *выпуклай*, калі для ўсіх $x, y \in \mathbb{R}^n$ і любога $\lambda \in [0,1]$ выконваецца няроўнасць

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{19}$$

Важна адзначыць, што лакальны мінімум выпуклай функцыі на выпуклым мностве з'яўляецца глабальным. Калі (19) заўсёды выконваецца як строгая няроўнасць, то функцыя f называецца *строга выпуклай.* Няцяжка перакanацца, што строга выпуклая функцыя f на любым выпуклым мностве X мае адзіны мінімум, г. зн. існуе кропка $x^* \in X$, што $f(x^*) < f(x)$ для ўсіх $x \in X$.

Зноў жа, выкарыстоўвачы формулу Тэйлора, можна атрымаць крытэрый выпукласці гладкай функцыі.

Тэарэма У.3.2 *Двойчы непарыўна дыферэнцавальная функцыя $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпуклая (строга выпуклая) тады і толькі тады, калі ў любой кропцы $x \in \mathbb{R}^n$ матрыца $f''(x)$ неадмоўна азначана (дадатна азначана).*

Выпуклыя конусы

Мноства $C \in \mathbb{R}^n$ называецца *выпуклым конусам*, калі яно замкнёна адносна множання на дадатныя скаляры (калі $x \in C$, то $tx \in C$ для ўсіх $t > 0$) і адносна складання (з $x, y \in C$ вынікае $x + y \in C$). Конус C вызначае *ўпарадкаванне* на $\mathbb{R}^n$: "$x \geq_C y$"азначае, што $x - y \in C$. Мы таксама будзем ужываць абазначэне "$x >_C y$ калі $x - y \in \operatorname{int} C$. Як звычайна, мы пішам "$x \leq_C y$"("$x <_C y$"), калі $y \geq_C x$ ($y >_C x$). Уведзенае ўпарадкаванне $\geq_C$ з'яўляецца *частковым парадкам*, калі конус C *востры*, г. зн. $C \cap -C = \{0\}$.

Конусам, пароджаным вектарамі $a^1, \ldots, a^m \in \mathbb{R}^n$, называецца мноства

$$\operatorname{cone}(a^1, \ldots, a^m) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x = \sum_{i=1}^{m} y_i a^i \,,\, y \in \mathbb{R}^m_+\}$$

Такія конусы яшчэ называюць *канцапароджанымі.* Конус $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0\}$, дзе $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ называецца *паліэдральным.* Вядома, што выпуклы конус C з'яўляецца паліэдральным тады і толькі тады, калі ён канцапароджаны. Іншымі словамі, паняцці "паліэдральны конус"і "канцапароджаны конус— сінонімы.

Двойны конус да конуса $C \subseteq \mathbb{R}^n$ абазначаецца праз C^D і азначаецца наступным чынам

$$C^D \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, y^T x \geq 0 \text{ для ўсіх } x \in C\}.$$

Зазначым, што $(\mathbb{R}^n_+)^D = \mathbb{R}^n_+$ і $(SM^n_+)^D = SM^n_+$.

Тэарэма аб адасобленасці выпуклых мностваў

Няхай $X \subset \mathbb{R}^n$ ёсць выпуклае мноства і $x \in X$. Абазначым праз

$$S(x, X) \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{t>0} \frac{1}{t}(X - x)$$

конус, пароджаны мноствам $X - x$, і праз $T(x, X) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{cl} S(x, X)$ абазначаем яго замыканне. Мноства $T(x, X)$ называецца *датычным конусам да X у*

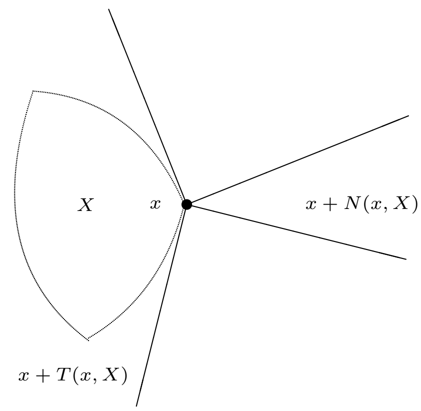


Рис. 1: Датычны і нармальны конусы

кропцы x. Няцяжка пераканацца, што $S(x,X)$ і $T(x,X)$ — выпуклыя конусы. Зазначым яшчэ, што

$$X \subset x + S(x,X) \subset x + T(x,X)\,.$$

Конус $N(x,X) \stackrel{\text{def}}{=} -T(x,X)^D$ называецца *нармальным конусам да* X *у кропцы* x (гл. мал. 1).

Праекцыяй кропкі x на мноства X называецца такая кропка $y \in \mathrm{cl}\,X$, што

$$\|x-y\| \le \|x-z\| \quad \text{для ўсіх } z \in \mathrm{cl}\,X.$$

Для любой кропкі $x \in \mathbb{R}^n$ існуе адзіная яе праекцыя $\mathrm{pr}(x,X)$ на выпуклае мноства X. Гэты факт вынікае са строгай выпукласці функцыі $f(y) \stackrel{\text{def}}{=} \|y-x\|$, азначанай на мностве X. Як мы ўжо адзначалі вышэй, калі X ёсць лінейная падпрастора, то $\mathrm{pr}(x,X) = P_X x$.

Тэарэма У.3.3 *Няхай* $X \subset \mathbb{R}^n$ *ёсць выпуклае мноства і* $x \in X$. *Тады*

$$\mathrm{pr}^{-1}(x,X) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n :\, \mathrm{pr}(y,X) = x\} = x + N(x,X).$$

Наступны рэзультат, вядомы як тэарэма аб *адасобленасці выпуклых мностваў*, можна атрымаць як следства з тэарэмы У.3.3.

Тэарэма У.3.4 *Няхай* X, Y *— непустыя выпуклыя мноствы ў* $\mathbb{R}^n$. *Калі* $X \cap Y = \emptyset$, *то існуе аддзяляючая іх гіперплоскасць* $H(a,b)$, *г. зн. што*

$$a^T x \le b < a^T y \quad \textit{для ўсіх } x \in X,\ y \in Y.$$

Калі ж толькі $\mathrm{int}\,X \cap \mathrm{int}\,Y = \emptyset$, *то існуе гіперплоскасць* $H(a,b)$, *такая, што*

$$a^T x \le b \le a^T y \quad \textit{для ўсіх } x \in X,\ y \in Y.$$

У.3.6 Шматграннікі

Перасячэнне концай колькасці паўпрастор, калі яно не пустое, называецца *паліэдрам*. Іншымі словамі, паліэдр можна азначыць як мноства рашэнняў сумеснай сістэмы лінейных няроўнасцей $P_{\leq}(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, дзе $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. Абмежаваны паліэдр называецца *шматграннікам*.

Няхай $P \in \mathbb{R}^n$ — паліэдр памеру d, а $H(a,\beta)$ — гіперплоскасць. Калі P цалкам належыць адной з падпрастор $H_{\leq}(a,\beta)$ ці $H_{\geq}(a,\beta)$ і $P \cap H(a,\beta) \neq \emptyset$, то $P \cap H(a,\beta)$ і $H(a,\beta)$ называюцца адпаведна *гранню* і *апорнай гіперплоскасцю* паліэдра P.

Мы спецыяльна выдзяляем тры тыпы граняў:

- *фасета* — грань памеру $d-1$;
- *вяршыня* — грань памеру 0 (кропка);
- *кант* — грань памеру 1 (адрэзак).

Дзве вяршыні паліэдра $P_{\leq}(A,b)$ называюцца *змежнымі*, калі яны злучаны кантам (ляжаць на адным канце).

Прыклад У.3.1 *Трохграннік P на мал. 2 утворан перасячэннем паўпрастор, якія задаюцца няроўнасцямі:*

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4\,, \\
 & & x_2 & & & \leq & 2\,, \\
 & & & & x_3 & \leq & 3\,, \\
3x_1 & & & + & x_3 & \leq & 6\,, \\
x_1 & & & & & \geq & 0\,, \\
 & & x_2 & & & \geq & 0\,, \\
 & & & & x_3 & \geq & 0\,.
\end{array} \tag{20}
$$

Ён мае 7 фасет, 8 вяршынь (азначаны тлустымі кропкамі) і 13 кантаў (адрэзкі, якія злучаюць вяршыні). □

У.4 Складанасць алгарытмаў

Складанасць алгарытма вымяраецца функцыяй ад *памеру задачы*, г. зн. колькасці бітаў у памяці камп'ютэра, неабходных для прадстаўлення зыходных дадзеных рашаемай задачы.

Памерам рацыянальнага ліка $\alpha = \frac{p}{q}$ (p і q — узаемна простыя цэлыя лікі), *памерам* рацыянальнага вектара $b \in \mathbb{Q}^n$, *памерам* рацыянальнай мат-

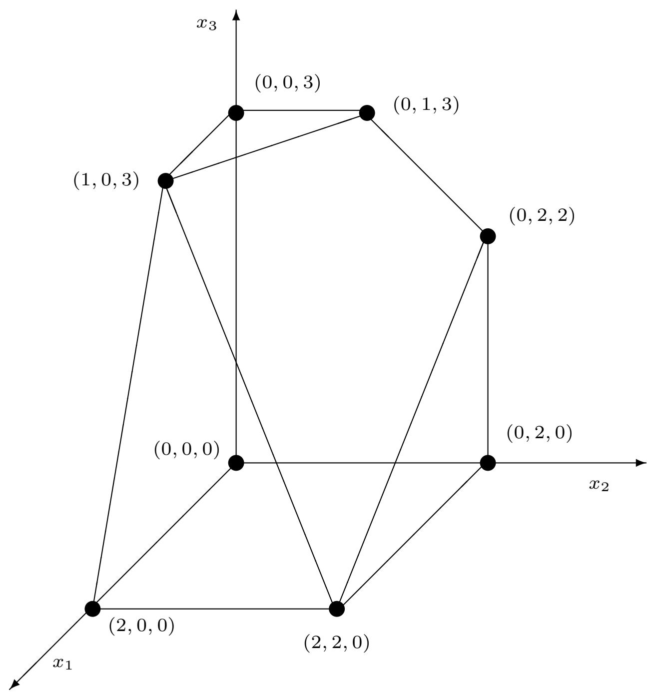


Рис. 2: Прыклад шматгранніка

рыцы $A \in M_{m,n}(\mathbb{Q})$ называюцца велічыні

$$\begin{aligned} \operatorname{size} \alpha &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \lceil \log(|p|+1) \rceil + \lceil \log(|q|+1) \rceil, \\ \operatorname{size} b &\stackrel{\text{def}}{=} n + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{size} b_i, \\ \operatorname{size} A &\stackrel{\text{def}}{=} mn + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{size} a_{ij}, \end{aligned} \tag{21}$$

У якасці меры складанасці алгарытма разглядаюць *час яго працы* і *аб'ём выкарыстоўваемай памяці* як функцыі памеру задачы. Так як, звычайна, час працы алгарытма не меншы за аб'ём памяці, то у далейшым пад *складанасцю алгарытма*, галоўным чынам, будзем разумець час яго працы. Алгарытмы, якія мы будзем разглядаць, рашаюць тую ці іншую задачу, выконваючы нейкую паслядоўнасць *элементарных арыфметычных аперацый* (складанняў, адыманняў, множанняў, дзяленняў і параўнанняў). *Час працы* такіх алгарытмаў азначаецца як колькасць элементарных арыфметычных аперацый, якія ён выконвае. Такі падыход да складанасці называецца *алгебраічным.* Алгебраічны падыход ігнаруе дыскрэтнасць дадзеных у ЭВМ (там няма сапраўдных лікаў, а толькі рацыянальныя). У камп'ютэрах пад запіс ліка адводзіцца фіксаваная колькасць бітаў. Гэта абмяжоўвае памеры лікаў над якімі арыфметычныя аперацыя выконваюцца дакладна (без акругленняў) і з аднолькавай хуткасцю. Калі ж памеры лікаў, над якімі выконваецца арыфметычная аперацыя, ці рэзультат аперацыі пераўзыходзіць памеры камп'ютэрнай разраднай сеткі, то для яе дакладнага выканання патрэбна карыстацца нейкім спецыяльным алгарытмам. Так, існуюць алгарытмы выканання ўсіх арыфметычных аперацый бітавай складанасці $\operatorname{const} l \log l \log(\log l)$, дзе l — максімальны памер лікаў. Каб атрымаць больш дакладную *бітавую* ацэнку складанасці алгарытма, спачатку трэба ацаніць максімальны памер l лікаў, над якімі алгарытм выконвае арыфметычныя аперацыі, а потым алгебраічную складанасць памножыць на складанасць арыфметычных аперацый над лікамі памеру l. Усё ж у далейшым пад складанасцю алгарытма мы будзем разумець алгебраічную складанасць.

Аналіз складанасці алгарытма мы будзем праводзіць па найхужэйшаму прыкладу задачы. Гэта значыць, што за складанасць алгарытма прымаецца яго максімальная складанасць на прыкладах задач аднолькавага памеру. Пры аналізе складанасці алгарытма часта цікавяцца яго паводзінамі пры прымяненні да задач вялікага памеру (*асімптатычны аналіз*). Гэта дазваляе ігнараваць канстантныя множнікі і не толькі спрашчае аналіз, але і робіць яго незалежным ад дэталяў прадстаўлення зыходных дадзеных (*ўваходу*) задачы.

У.4.1 Палінаміяльныя алгарытмы

Матэматычныя фармалізацыі паняцця алгарытм, падобныя на машыну Т'юрынга, прывялі матэматыкаў 30-х гадоў 20-га стагоддзя да класіфікацыі ўсіх задач на *вырашальныя* (для якіх існуе алгарытм) і *невырашальныя* (для якіх няма алгарытмаў рашэння)[2]. Сучасныя ЭВМ паставілі перад матэматыкамі іншыя задачы. Галоўная сярод іх — гэта распрацоўка эфектыўных алгарытмаў рашэння розных задач. Пад *эфектыўнымі алгарытмамі* часцей за ўсё разумеюць палінаміяльныя алгарытмы.

Гавораць, што алгарытм з'яўляецца *палінаміяльным*, калі час яго працы абмежаваны нейкім паліномам ад памеру задачы. Таксама кажуць, што задача *палінаміяльна вырашальна*, калі для яе рашэння існуе палінаміяльны алгарытм. Так як усе элементарныя арыфметычныя аперацыі можна выканаць за палінаміяльны час, то для доказу палінаміяльнасці нейкага алгарытма дастаткова паказаць, што ён выконвае палінаміяльную ад памеру L задачы колькасць аперацый над лікамі, памер якіх абмежаваны паліномам ад L.

Прыклад У.4.1 (СЛУ) *Дадзены $A \in M_{m,n}(\mathbb{Q})$ і $b \in \mathbb{Q}^m$. Трэба вырашыць СЛУ $Ax = b$.*

Памерам СЛУ з'яўляецца лік $\operatorname{size} A + \operatorname{size} b$. З лінейнай алгебры добра вядома, што СЛУ можна вырашыць метадам Гаўса, выканаўшы $O(n^2m)$ арыфметычных аперацыі. Але гэта яшчэ не значыць, што метад Гаўса з'яўляецца палінаміяльным алгарытмам. Для доказу гэтага трэба таксама паказаць, што ўсе вылічэнні ў метадзе праводзяцца над лікамі палінаміяльнага ад $\operatorname{size} A + \operatorname{size} b$ памеру. Гэта сапраўды так (дэталі чытач можа знайсці ў дадатку В) і таму метад Гаўса з'яўляецца палінаміяльным алгарытмам. □

Прыклад У.4.2 (Праверка прастаты ліка) *Для дадзенага ліка $n \in \mathbb{N}$ трэба праверыць просты ён ці не.*

Так як уваход гэтай задачы задаецца толькі адным лікам, то яе памер роўны $\operatorname{size} n = O(\log n)$. Прасцейшы алгарытм, які па чарзе правярае астачы ад дзялення n на $2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, выконвае $O(n) = O(2^{\log n})$ арыфметычных аперацыі і таму не з'яўляецца палінаміяльным. Лепшы алгарытм, вядомы аўтару, выконвае праверку прастаты натуральнага ліка n за час $O((\log n)^{c \log \log \log n})$, дзе канстанта $c \in \mathbb{N}$ не залежыць ад n. Таму пытанне, ці з'яўляецца задача праверкі прастаты ліка палінаміяльнай, застаецца адкрытым. □

[2] Тыпічным прыкладам невырашальнай задачы з'яўляецца *праблема спынення*: для канкрэтнай праграмы і зыходных дадзеных трэба вызначыць, ці спыніцца яна калі-небудзь.

У.5 Мова для запісу алгарытмаў

Вельмі часта ў навуковай літаратуры алгарытмы запісваюць на *Спрошчаным Алголе.* Мы крышку адыдзем ад традыцыі і будзем запісваць алгарытмы на мове больш блізкай па сінтаксісу да мовы праграмавання C. Чытачы, знаёмыя з любой алгарытмічнай мовай праграмавання, будуць лёгка разумець алгарытмы на гэтай мове. Для астатніх на першых парах будзе дастаткова азнаёміцца з дадзеным параграфам. Прыведзенае апісанне, зразумела, нельга разглядаць як апісанне мовы праграмавання высокага ўзроўню, а толькі як спосаб нефармальнага запісу алгарытмаў.

Функцыі. Кожны алгарытм мы будзем запісваць як адну ці некалькі функцый. Функцыя мае наступны выгляд:

імя(*аргумент*$_1$,. . .,*аргумент*$_n$)
{
  цела функцыі
}

У рэдкіх выпадках, калі тыпы аргументаў і самой функцыі не будуць вынікаць з кантэксту, мы будзем азначаць іх ў каментарыях. Цела функцыі складаецца з апаратараў. Кожны апаратар заканчваецца кропкай з коскай ";". Мы будзем карыстацца апаратарамі наступных тыпаў.

1. *Апаратар прысвойвання*:

зменная := *выражэнне*;

Рэзультатам прысвойвання з'яўляецца значэнне апарацыі прысвойвання. Напрыклад, калі $x = 6$, то пасля выканання апаратара

$$z := (y := x - 2) + 5;$$

зменная y прыме значэнне 4, а зменная z значэнне 9.

2. *Умоўны апаратар*:

if (*умова*) *апаратар*$_1$; **else** *апаратар*$_2$;

Частка "**else** *апаратар*$_2$" не абавязковая.

3. *Апаратар цыкла*

for (*апаратар*$_1$; *умова*; *апаратар*$_2$) *апаратар*$_3$;

спачатку выконвае *апаратар*$_1$, а потым, пакуль справядліва *ўмова*, выконваюцца *апаратар*$_3$ а за ім *апаратар*$_2$. Напрыклад:

for $(i = 0;\ i < n;\ i := i + 1)\ x_i := i;$

Зазначым, што кожны з трох апаратараў, якія ўваходзяць у апаратар **for** можа быць пустым. Напрыклад, апаратар

for (; *умова*;) *апаратар*;

выконвае *аператар* увесь час, пакуль выконваецца *ўмова*.

5. *Складаны аператар*

{
    аператар$_1$;
    аператар$_2$;
    ...
    аператар$_k$;
}

Зазначым, што кожны з аператараў, якія ўваходзяць у складаны аператар, у сваю чаргу таксама можа быць складаным.

6. *Разнастайныя аператары*: любое сцвярджэнне, якое чытаема і недвухсэнсоўна. Напрыклад:

рашыць сістэму ўраўненняў $Ax = b$;

7. *Аператар вяртання* з функцыі

return *выраз*;

Тут *выраз* задае рэзультат работы функцыі, які вяртаецца ў вызваўшую функцыю.

7. Каментарыі маюць наступны выгляд: // *любы тэкст*.

У.6 Практыкаванні

1. Дакажыце наступныя сцвярджэнні:

   (a) Калі $P \in \mathbb{R}^n$ — шматграннік, то $P = \mathrm{conv\_hull}(\mathrm{vert}\ P)$;

   (b) Калі X — концае мноства кропак з $\mathbb{R}^n$, то $P = \mathrm{conv\_hull}(X)$ ёсць шматграннік і $\mathrm{vert}\ P \subseteq X$.

   c) непусты паліэдр не мае вяршынь тады і толькі тады, калі ён утрымлівае афінную падпрастору.

2. Для d-мернага шматгранніка $P \in \mathbb{R}^n$ абазначым праз $f(P) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ вектар, i-я каардыната якога роўна колькасці граняў памеру i у шматгранніка P. Дакажыце:

   a) формулу Эйлера для трохгранніка ($d = 3$)

   $$f_0 - f_1 + f_2 = 2\,;$$

   b)* формулу Эйлера-Пуанкарэ

   $$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i = 1 + (-1)^{d-1}.$$

3. Ці з'яўляецца матрыца

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 6 & 10 & 1 \\ -2 & 1 & 22 \end{bmatrix}$$

дадатна азначанай?

4. Вылічыце

$$\begin{bmatrix} 5\,3 \\ 3\,2 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

5. Няхай $A \in SM^n$. Дакажыце, што

$$\max_{\|x\|\le 1,\ \|y\|\le 1} x^T A y = \max_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda^{\max},$$

дзе $\lambda^{\max}$ — максімальны асабісты лік матрыцы A.

6. Каб праверыць свае веды ў аналізе, дакажыце тэарэму У.3.1 і вынік У.3.1.

7. Як знайсці праекцыю дадзенага вектара $c \in \mathbb{R}^n$ на афінную падпрастору рашэнняў СЛУ $Ax = b$.

8. Пачынаючы з кропкі $x^{(0)} = (2, 0)^T$, метадам Ньютана вырашыце наступную задачу:

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 &\to \min \\ x_1 + x_2 &= 2\,. \end{aligned}$$

9. Дакажыце, што функцыя f выпуклая тады і толькі тады, калі яе *надграфік*

$$\text{epi } f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \,:\, x \in \text{dom } f,\ y \in \mathbb{R}\,,\ f(x) \le y\}$$

з'яўляецца выпуклым мноствам у $\mathbb{R}^{n+1}$.

10. Дакажыце, што выпуклая функцыя f непарыўна ў любой кропцы $x \in \text{int}\,(\text{dom } f)$.

11. Выпуклыя функцыі ў агульным выпадку не з'яўляюцца дыферэнцавальнымі (прасцейшы прыклад — $f(x) = \|x\|$). Аднак для іх удаецца ўвесці дыферэнцыяльныя характарыстыкі, якія па сваіх уласцівасцях аналагічны градыенту гладкай функцыі. Няхай f — выпуклая функцыя. Вектар $g \in \mathbb{R}^n$, для якога для ўсіх $y \in \mathbb{R}^n$ выконваецца няроўнасць

$$f(y) \ge f(x) + g^T (y - x),$$

называецца *субградыентам* функцыі f у кропцы x. Мноства ўсіх субградыентаў функцыі f у кропцы x называецца *субдыферэнцыялам* гэтай функцыі ў кропцы x і абазначаецца $\partial f(x)$. Калі f — дыферэнцавальная функцыя, то $\partial f(x) = \{f'(x)\}$. Дакажыце наступны рэзультат.

Тэарэма У.6.1 *Няхай $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклае мноства, $f : X \to \mathbb{R}$ — выпуклая функцыя. Кропка $x^* \in X$ з'яўляецца аптымальным рашэннем задачы выпуклай аптымізацыі*

$$\min_{x \in X} f(x) \tag{22}$$

тады і толькі тады, калі існуе такі субградыент $g \in \partial f(x^*)$, што $g^T(x - x^*) \geq 0$ для ўсіх $x \in X$.

12. Дакажыце наступныя сцвярджэнні.

a) Няхай $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, дзе g_i — непарыўна дыферэнцавальныя выпуклыя функцыі, $i = 1, \ldots, m$. Для $x \in X$ справядліва роўнасць

$$T(x, X) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ g'(x)^T y \leq 0,\ i \in I(x)\},$$

дзе $I(x) \overset{\text{def}}{=} \{i \in N_m\ :\ g_i\}$.

b) Для $x \in \mathbb{R}^n$

$$T(x, \mathbb{R}^n) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ y_i \geq 0,\ \text{калі } x_i = 0\}\,.$$

c) Няхай $\Sigma_n \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n_+\ : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ ёсць $(n-1)$-мерны *сімплекс.* Для $x \in \Sigma_n$

$$T(x, \Sigma_n) = \{y \in T(\mathbb{R}^n, x) :\ \sum_{i=1}^n y_i = 0\}\,.$$

Глава 1

Лінейнае праграмаванне

Многія важныя даследаванні, якія маюць прамое дачыненне да лінейнага праграмавання, былі выкананы яшчэ ў мінулым стагоддзі. Але фармаванне лінейнага праграмавання ў якасці самастойнага раздзела даследавання аперацый адбылося ў пасляваенныя гады ў ЗША. Першыя важныя даследаванні па лінейнаму праграмаванню (асноўныя задачы і прылажэнні, крытэрый аптымальнасці, метад рашэння, эканамічная інтэрпрэтацыя рэзультатаў рашэння) былі праведзены ў СССР Л.В. Кантаровічам у канцы 30-х гадоў. Вядучая роля ў станаўленні лінейнага праграмавання належала Дж. Данцыгу, які ў 1947 г. распрацаваў сімплекс-метад. Распрацаваная ў 1947 г. Дж. Нейманам канцэпцыя двойнасці забяспечыла ў далейшым павелічэнне практычнай каштоўнасці і пашырэнне сферы ўжывання метадаў лінейнага праграмавання. Дэталёвае апісанне з першых рук вытокаў лінейнага праграмавання чытач можа знайсці ў кнізе Дж. Данцыга [2].

1.1 Задача лінейнага праграмавання

У найбольш агульным выглядзе задачу *лінейнага праграмавання (ЛП)* можна сфармуляваць наступным чынам. Дадзены выпуклыя замкнёныя конусы $C_X \subseteq \mathbb{R}^n$ і $C_Y \subseteq \mathbb{R}^m$, матрыца $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ і вектары $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. *Аналітычная задача ЛП* — гэта наступная задача аптымізацыі:

$$\max\{c^T x \,:\, Ax \leq_{C_Y} b,\ x \geq_{C_X} 0\}. \tag{1.1}$$

У *паліэдральнай задачы ЛП* патрабуецца каб усе конусы былі паліэдральнымі. У далейшым паліэдральную задачу ЛП будзем проста называць *задачай ЛП*.

Існуе некалькі эквівалентных фармулёвак задачы ЛП. Прывядзем некалькі найбольш выкарыстоўваемых з іх.

- *Задача ЛП у стандартнай форме*

$$\max\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\} \tag{1.2}$$

ёсць прыватны выпадак задачы (1.1), калі $C_X = \mathbb{R}^n_+$, $C_Y = \{0\}$.

- *Задачай ЛП у нармальнай форме*

$$\max\{c^T x : Ax \le b\} \tag{1.3}$$

атрымліваецца, калі $C_X = \mathbb{R}^n$, $C_Y = \mathbb{R}^m_+$.

- Калі $C_X = \mathbb{R}^n_+$, $C_Y = \mathbb{R}^m_+$, то атрымліваем задачу

$$\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\}. \tag{1.4}$$

У якасці прыклада непаліэдральнай задачы ЛП прывядзем наступны. *Паўазначанае праграмаванне* ўлучае ў сябе аналітычныя задачы ЛП, калі адзін з конусаў C_X ці C_Y ёсць конус неадмоўна азначаных матрыц, а другі конус з'яўляецца паліэдральным. Звычайна, задача паўазначанага праграмавання ўзнікаюць у наступных пастаноўках.

- *Задача паўазначанага праграмавання ў нармальнай форме*

$$\begin{array}{rcl} c^T x & \to & \max \\ \sum\limits_{i=1}^n A^i x_i & \le_{SM^m_+} & B\,, \end{array} \tag{1.5}$$

дзе $c \in \mathbb{R}^n$, $B \in SM^m$, $A^i \in SM^m$ $(i = 1, \dots, n)$.

- *Задача паўазначанага праграмавання ў стандартнай форме*

$$\begin{array}{rcl} (C, X) & \to & \max \\ (A^i, X) & = & b_i\,, \quad i = 1, \dots, m, \\ X & \ge_{SM^n_+} & 0\,, \end{array} \tag{1.6}$$

дзе $C \in SM^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A^i \in SM^n$ $(i = 1, \dots, m)$.

Кажуць, што нейкія дзве формы (аналітычнай) задачы ЛП *эквівалентныя*, калі яны зводзяцца адна да другой. Можна паказаць, што ўсе вышэй пералічаныя задачы ЛП эквівалентныя. Для прыкладу, пакажам эквівалентнасць задач у стандартнай і нармальнай формах. Каб убачыць, што задача (1.2) зводзіцца да задачы (1.3), дастаткова запісаць яе ў наступным выглядзе

$$\max\{c^T x :\ Ax \le b,\ -Ax \le -b,\ -x \le 0\}.$$

Каб звесці задачу (1.3) да задачы (1.2), дабавім вектар $s \in \mathbb{R}^m$ новых зменных, а вектар x прадставім у выглядзе рознасці $u - v$ двух неадмоўных вектароў з $\mathbb{R}^n$. Пасля гэтага задача (1.3) прыме выгляд

$$\max\{c^T u - c^T v\ :\ Au - Av + s = b,\ u \ge 0,\ v \ge 0,\ s \ge 0\}.$$

Аналагічна, можна паказаць эквівалентнасць задачы (1.1) і наступнай аналітычнай задачы ЛП

$$\max\{c^T x \,:\, Ax = b,\ x \geq_{C_X} 0\}. \tag{1.7}$$

Сапраўды, калі пакласці $C_Y = \{0\}$, то мы бачым, што задача (1.7) з'яўляецца прыватным выпадкам задачы (1.1). Наадварот, калі дабавім вектар $s \in \mathbb{R}^m$ новых зменных і ўвядзем абазначэнні $\overline{c} = [c, 0]$, $\overline{A} = [A, I]$, $\overline{x} = [x, s]$, $C = C_X \times C_Y$, то можна запісаць задачу (1.1) у наступным выглядзе

$$\max\{\overline{c}^T x \,:\, \overline{A}\overline{x} = b,\ \overline{x} \geq_C 0\}.$$

Кропка x, якая задавальняе ўсім абмежаванням задачы ЛП, называецца яе *дапушчальным рашэннем.* Кажуць, што задача ЛП мае рашэнне, калі яна мае дапушчальнае рашэнне і яе функцыя мэты абмежавана на мностве ўсіх дапушчальных рашэнняў. У гэтым выпадку дапушчальнае рашэнне, на якім функцыя мэты прымае максімальнае (мінімальнае ў задачах на мінімум) значэнне называецца *аптымальным рашэннем* задачы ЛП.

1.1.1 Выпуклая аптымізацыя і аналітычнае ЛП

Зразумела, што аналітычная задача ЛП з'яўляецца спецыяльнай задачай выпуклага праграмавання. У сваю чаргу, кожную задача выпуклага праграмавання можна сфармуляваць як аналітычную задачу ЛП. Разгледзім задачу выпуклай аптымізацыі

$$\min_{x \in D} f(x)\,, \tag{1.8}$$

дзе D ёсць замкнёнае выпуклае мноства ў $\mathbb{R}^n$, а $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклая функцыя.

Без страты агульнасці, можна лічыць, што $f(x) = c^T x$ ёсць лінейная функцыя; інакш, мы можам разглядаць наступную задачу

$$\begin{array}{lcccc} & - & x_{n+1} & \to & \min \\ f(x) & - & x_{n+1} & \leq & 0, \\ x \in D & & & & \end{array}$$

з лінейным крытэрыем, якая, зразумела, эквівалентна зыходнай задачы. Далей, зноў без страты агульнасці, мы можам дапусціць, што D не ўтрымлівае лінейнай падпрасторы $\mathcal{L}$; інакш, або функцыя мэты задачы не абмежавана знізу і задача не мае рашэння, або мы можам замяніць мноства D яго перасячэннем з лінейнай падпрасторай $\mathcal{L}^\perp$.

Няхай

$$C = \mathrm{cl}\left\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, x_{n+1} > 0,\ \frac{1}{x_{n+1}} x \in D\right\}.$$

Зразумела, што C ёсць выпуклы замкнёны востры конус з непустой унутранасцю, а D ёсць перасячэнне C і гіперплоскасці $x_{n+1} = 1$. Такім чынам, задача (1.8) эквівалентна наступнай аналітычнай задачы ЛП

$$\min\{c^T x \,:\, x_{n+1} = 1,\ (x, x_{n+1}) \geq_C 0\}\,. \tag{1.9}$$

1.2 Прыклады задач ЛП

Задача ЛП мае многа практычных прымяненняў. У гэтым параграфе мы прыводзім толькі некалькі прыкладаў.

1.2.1 Задача аб дыеце

Задача аб дыеце была сфармулявана як задача ЛП адной з першых. Разгледзім задачу, з якой сутыкаецца гаспадыня, калі купляе прадукты. Яна можа купляць прадукты n розных назваў, кожны з якіх утрымлівае нейкую колькасць кожнага з m карысных рэчываў. Няхай

- a_{ij} — колькасць i-га карыснага рэчыва ў адзінцы j-га прадукта, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$;
- r_i — гадавая патрэбнасць у i-м карысным рэчыве, $i = 1, \ldots, m$;
- x_j — гадавое спажыванне j-га прадукта, $j = 1, \ldots, n$;
- c_j — кошт адзінкі j-га прадукта, $j = 1, \ldots, n$.

Дыета за год вызначаецца выбарам вектара $x \geq 0$. Няроўнасці $Ax \geq r$ выражаюць той факт, што будзе задаволена мінімальная патрэбнасць у карысных рэчывах. Для таго каб знайсці дыету найменьшага кошту, якая задавальняе патрэбнасць у карысных рэчывах, трэба рашыць наступную задачу ЛП:

$$\min\{c^T x \,:\, Ax \geq r,\ x \geq 0\}.$$

1.2.2 Дынамічная мадэль затраты-выпуск (мадэль Лявонцева)

Прасцейшы статычны варыянт *мадэлі затраты-выпуск* апісвае эканамічную сістэму, якая ўлучае n вытворчых галін, прычым кожная галіна выпускае *адзін* від прадукта і выкарыстоўвае *адзіны* тэхналагічны спосаб (спосаб вытворчасці адпаведнага прадукта). Кожны прадукт можа спажывацца ўнутры сістэмы ці выступаць у якасці канечнага прадукта, попыт на які ў выглядзе індывідуальнага ці грамадскага спажывання, а таксама экспарту лічыцца дадзеным.

Дапусцім, што маецца n галін, а x_i — агульны (валавы) выпуск прадукцыі i-й галіны; b_i — попыт (канечны прадукт) на прадукцыю i-й галіны; a_{ij} — колькасць прадукцыі i-й галіны, неабходная для вытворчасці адзінкі прадукцыі j-й галіны.

Асноўныя *балансавыя ўраўненні*, якія апісваюць размеркаванне прадукцыі галін, маюць выгляд:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.10}$$

ці ў матрычным выглядзе

$$(I-A)x = d, \tag{1.11}$$

дзе $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ — *тэхналагічная матрыца*, з элементамі a_{ij}. Звычайна з эканамічнай пастаноўкі задачы вынікае, што матрыца $I-A$ нявыраджаная і адзінае рашэнне $x=(I-A)^{-1}b \geq 0$ сістэмы (1.11) неадмоўнае.

Цяпер разгледзім дынамічны варыянт мадэлі Лявонцева. Мадыфікаваная мадэль дапускае магчымасць уводу новых вытворчых магутнасцей і пераходу нявыкарыстанай часткі прадукцыі з аднаго планавага перыяду ў наступны.

Будзем лічыць, што маецца T перыядаў. У кожны t-ты перыяд нам вядома тэхналагічная матрыца $A(t)$. Акрамя таго, дадзена матрыца $D(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *капітальных затрат*, элементы якой d_{ij} ёсць затраты i-й галіны на павелічэнне выпуска прадукцыі j-й галіны на адзінку.

Няхай b^t — попыт на прадукцыю ў t-м перыядзе; w^t — вытворчая магутнасць у канцы перыяду t (вымяраецца ў адзінках выпуска прадукцыі); x^t — выпуск прадукцыі ў перыядзе t; v^t — прырост вытворчай магутнасці за перыяд t (у адзінках прадукцыі); s^t — запас прадукцыі ў канцы t-га перыяду. Пры такіх абазначэннях балансавыя ўраўненні для *дынамічнай мадэлі затраты–выпуск* маюць наступны выгляд:

$$x^t = A(t)x^t + b^t + D(t)v^t + s^t - s^{t-1}, \quad t=1,\dots,T. \tag{1.12}$$

Вытворчая магутнасць, якую можна выкарыстаць у перыядзе t, роўна суме магутнасці папярэдняга перыяду і прыроста магутнасці, г. зн.

$$w^t = w^t + v^t, \quad t=1,\dots,T,$$

ці

$$w^t = w^0 + \sum_{\tau=1}^{t} v^\tau, \quad t=1,\dots,T. \tag{1.13}$$

Выпуск прадукцыі i-й галіны ў перыяд t абмежаваны існуючай вытворчай магутнасцю

$$x^t \leq w^t, \quad t=1,\dots,T,$$

ці, выкарыстоўваючы (1.13), атрымліваем няроўнасці

$$x^t - \sum_{\tau=1}^{t} v^\tau \leq w^0, \quad t=1,\dots,T. \tag{1.14}$$

Усе невядомыя, відавочна, павінны быць неадмоўнымі

$$x^t, v^t, s^t \geq 0, \quad t=1,\dots,T. \tag{1.15}$$

Для $T=3$ умовы (1.12) і (1.14) прадстаўлены ў табліцы 1.2.2.

Зразумела, што дынамічная мадэль затраты-выпуск (1.12)–(1.15) значна цікавей статычнай мадэлі. Так як колькасць зменных пераўзыходзіць

Тэхналагічныя способы										
x^1	v^1	s^1	x^2	v^2	s^2	x^3	v^3	s^3		
$I-A(1)$	$-D(1)$	$-I$							$=$	b^1-s^0
I	$-I$								$\leq$	w^0
			$I-A(2)$	$-D(2)$	$-I$				$=$	b^2
	$-I$		I	$-I$					$\leq$	w^0
						$I-A(3)$	$-D(3)$	$-I$	$=$	b^3
	$-I$			$-I$		I	$-I$		$\leq$	w^0

Таблица 1.1: Дынамічная мадэль затраты-выпуск

колькасць ураўненняў, то яна можа мець многа дапушчальных рашэнняў і таму дапускае пастаноўку шэрагу аптымізацыйных задач. У якасці прыкладу разгледзім некалькі магчымых сітуацый.

1. Дапусцім, што экспартныя магчымасці дазваляюць рэалізаваць прадукцыю 1-й і 3-й галін у t_1-ы планавы перыяд у неабмежаванай колькасці, прычым прадукцыя заўсёды рэалізуецца ў суадносіне 2 : 1. Каб выявіць магчымасць павелічэння вытворчасці прадуктаў першай і трэцяй галін ў дадзенай прапорцыі, балансавае ўраўненне для t_1-га перыяду заменім на наступнае:

$$x^{t_1} = A(t_1)x^{t_1} + b^{t_1} + D(t_1)v^{t_1} + s^{t_1} - s^{t_1-1} + h^{t_1}y_{t_1},$$

дзе вектар h^{t_1} (***фіктыўны тэхналагічны спосаб***) мае дзве ненулявых кампаненты, якія роўны 2 у першым радку і 1 у трэцім радку. Пасля гэтага рашаем задачу ЛП

$$\begin{array}{l} y_{t_1} \to \max \\ x^1 - A(1)x^1 - D(1)v^1 - s^1 = b^1 - s^0, \\ x^t - A(t)x^t - D(t)v^t - s^t + s^{t-1} = b^t, \quad t \in \{2,\dots,T\} \setminus t_1, \\ x^{t_1} - A(t_1)x^{t_1} - D(t_1)v^{t_1} - s^{t_1} - s^{t_1-1} - h^{t_1}y_{t_1} = b^{t_1}, \\ x^t - \sum_{\tau=1}^{t} v^\tau \leq w^0, \quad t = 1,\dots,T, \\ x^t,\, v^t,\, s^t \geq 0, \quad t = 1,\dots,T. \end{array} \qquad (1.16)$$

У выпадку, калі трэба павялічыць выпуск прадукцыі не ў адным, а адразу ў некалькіх перыядах, неабходна ўвесці некалькі фіктыўных тэхналагічных спосабаў (па адным на кожны перыяд).

2. Сітуацыя, падобная разгледжанай намі вышэй, характэрна і для стратэгічных задач планавання абароны. Дапусцім, што ў кожны планавы перыяд вектар b^t задае мінімальна неабходны ўзровень вытворчасці прадукцыі для патрэб грамадзянскага насельніцтва. Неабходна з дапамогай застаўшыхся вытворчых рэсурсаў вырабіць максімальную колькасць ваеннай тэхнікі. Каб вырашыць гэту задачу, у кожным планавым перыядзе (ці толькі ў нейкіх загадзя азначаных) для кожнай адзінкі ваеннай тэхнікі трэба ўвесці фіктыўны тэхналагічны спосаб, i-я кампанента якога роўна колькасці адзінак прадукцыі i-й галіны, неабходных для вытворчасці адзінкі гэтай тэхнікі. Акрамя таго, могуць дабаўляцца лінейныя абмежаванні на зменныя, адпавядаючыя відам ваеннай тэхнікі, з мэтай гарантаваць вытворчасць тэхнікі ў патрэбных прапорцыях. Пасля гэтага рашаецца задача ЛП з

мэтай максімізаваць агульны выпуск ваеннай прадукцыі. Для гэтага каэфіцыенты пры зменных, якія адпавядаюць відам ваеннай тэхнікі, азначаюцца роўнымі адзінцы, ці ў адпаведнасці з нейкай дадзенай шкалой пераваг.

3. Дапусцім, што мы зацікаўлены ў мінімізацыі затрат працоўнага часу, неабходнага для вытворчасці прадукцыі з мэтай задаволіць дадзены спажывецкі попыт. Няхай $\overline{c}^t$ — вектар, кампаненты якога вызначаюць затраты ў гадзінах працоўнага часу на вытворчасць адзінкі кожнага віду прадукцыі ў перыяд t, а $\hat{c}^t$ — аналагічны вектар затрат працы ў перыяд t на стварэнне кожнага віду новых вытворчых магутнасцей. Трэба мінімізаваць функцыю мэты $\sum_{t=1}^{T}(\overline{c}^t x^t + \hat{c}^t v^t)$ пры абмежаваннях (1.12)–(1.15).

1.2.3 Ніжнія ацэнкі ў квадратычным праграмаванні

Будзем разглядаць задачу *квадратычнага праграмавання*

$$\min\{f_0(x) : \ f_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, m\}, \tag{1.17}$$

дзе $f_i(x) = x^T Q^i x + (c^i)^T x + d_i$, $Q^i \in SM^n$, $c^i \in \mathbb{R}^n$, $d^i \in \mathbb{R}$ $(0 \le i \le m)$.

Зазначым, што да задачы квадратычнага праграмавання можна звесці любую задачу матэматычнага праграмаваня, у якой усе функцыя f_i $(0 \le i \le m)$ з'яўляецца паліномамі. Больш канкрэтна, каб, скажам, прадставіць маном $x_1^3 x_2^2$ з дапамогай *квадратычных абмежаванняў*, дастаткова ўвесці тры новых зменных x_{12}, x_{13}, x_{22}, абмежаванні $x_{12} = x_1^2$, $x_{13} = x_{12}x_1$, $x_{22} = x_2^2$ і замяніць $x_1^3 x_2^2$ на $x_{13}x_{22}$.

Аб агульнасці задачы квадратычнага праграмавання сведчыць таксама тое, што *булеўскае абмежаванне* $x_i \in \{0, 1\}$ таксама можна прадставіць квадратычнай роўнасцю $x_i = x_i^2$. Такім чынам, квадратычнае праграмаванне пакрыва "амаль што ўсё".

У сілу сваёй агульнасці, задача квадратычнага праграмавання з'яўляецца вельмі складанай. Для яе рашэння прымяняюцца метады абмежаванага перабору варыянтаў тыпу галін і межаў (гл. параграф 5.3). У такіх алгарытмах патрэбна ўмець ацэньваць знізу аптымальнае значэнне функцыі мэты. Ніжэй мы пакажам, як гэта можна зрабіць з дапамогай паўазначанага праграмавання.

Разгледзім наступную задачу паўазначанага праграмавання

$$\begin{aligned} &\gamma(f_0) = \max \gamma \\ &\sum_{i=1}^{m} A^i y_i + \mathrm{e}_0 \mathrm{e}_0^T \gamma \preceq_{SM_{n+1}^+} A^0, \end{aligned} \tag{1.18}$$

дзе $\mathrm{e}_0 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ і для $0 \le i \le m$

$$A^i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} d_i & \frac{1}{2}(c^i)^T \\ \frac{1}{2}c^i & Q^i \end{bmatrix}.$$

Няхай $D \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, n\}$ — дапушчальны абсяг задачы (1.17).

Тэарэма 1.2.1 *Для ўсіх $x \in D$ выконваецца няроўнасць $f_0(x) \geq \gamma(f_0)$.*

Доказ. Няхай $y \in \mathbb{R}^m$ і $\gamma \in \mathbb{R}$ ёсць дапушчальнае рашэнне задачы (1.18). Так як матрыца

$$Z = A^0 - \sum_{i=1}^{m} A^i y_i - \mathrm{e}_0 \mathrm{e}_0^T \gamma$$

неадмоўна азначана, то для любога $x \in D$ маем

$$\begin{aligned}
0 &\leq (1, x^T) Z \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \\
&= (1, x^T) \left(A^0 - \sum_{i=1}^{m} A^i y_i - \mathrm{e}_0 \mathrm{e}_0^T \gamma \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \\
&= x^T Q^0 x + (c^0)^T x + d_0 - \sum_{i=1}^{m} \left(x^T Q^i x + (c^i)^T x + d_i \right) y_i - \gamma \\
&= f_0(x) - \gamma \leq f_0(x) - \gamma(f_0).
\end{aligned}$$

□

Іншымі словамі, сцвярджэнне тэарэмы 1.2.1 азначае, што лік $\gamma(f_0)$ з'яўляецца ніжняй мяжой на аптымальнае значэнне функцыі мэты ў задачы (1.17).

1.3 Двойнасць

Сутнасць канцэпцыі двойнасці ў лінейным праграмаванні і яе патэнцыяльныя магчымасці першым зразумеў Дж. Нейман. Тэорыя двойнасці дае ў распараджэнне даследчыкаў крытэрыі аптымальнасці рашэнняў аптымізацыйнай задачы, дазваляе ацаніць устойлівасць аптымальных рашэнняў пры змяненні асобных параметраў задачы, і, у нейкай ступені, дазваляе зрабіць выснову аб складанасці задачы.

1.3.1 Лема Фаркаша

У гэтым параграфе мы атрымаем крытэрыі вырашальнасці сістэм няроўнасцей, якія задаюць дапушчальны абсяг у задачах ЛП (як аналітычнай так і паліэдральнай).

Тэарэма 1.3.1 *Няхай $C_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ і $C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ ёсць выпуклыя замкнёныя конусы, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. Калі конус*

$$K(C_1, AC_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{y + Ax \,:\, y \in C_1\,,\ x \in C_2\}$$

замкнёны, то сістэма няроўнасцей

$$Ax \leq_{C_1} b,\ x \geq_{C_2} 0 \tag{1.19}$$

мае рашэнне тады і толькі тады, калі для ўсіх $u \geq_{C_1^D} 0$, такіх, што $A^T u \geq_{C_2^D} 0$, выконваецца няроўнасць $u^T b \geq 0$.

Доказ. Неабходнасць. Няхай $\overline{x}$ ёсць рашэнне (1.19). Калі $u \geq_{C_1^D} 0$ і $A^T u \geq_{C_2^D} 0$, то з азначэння двойнага конуса адразу вынікае

$$u^T b \geq u^T A\overline{x} \geq 0.$$

Дастатковасць. Дапусцім, што сістэма (1.19) не мае рашэння. Так як множства $K(C_1, AC_2)$ выпуклае і замкнёнае, $b \notin K(C_1, AC_2)$, то па тэарэме аб адасобленасці выпуклых мностваў існуюць такія вектар $u \in \mathbb{R}^m$ і лік α, што $u^T b < \alpha$ і $u^T z \geq \alpha$ для ўсіх $z \in K(C_1, AC_2)$. Так як $0 \in C_1$ і $0 \in C_2$, то $0 \in K(C_1, AC_2)$ і таму $0 \geq \alpha$. Па той жа прычыне

$$\begin{array}{lcll} u^T Ax & \geq & \alpha & \text{для ўсіх } x \in C_2\,, \\ u^T y & \geq & \alpha & \text{для ўсіх } y \in C_1\,. \end{array} \tag{1.20}$$

Так як C_1 і C_2 — конусы і $\alpha \leq 0$, то няроўнасці (1.20) эквівалентны няроўнасцям

$$A^T u \geq_{C_2^D} 0 \quad \text{і} \quad u \geq_{C_1^D} 0\,.$$

Для завяршэння доказу ўспомнім, што $u^T b < \alpha \leq 0$. □

Зазначым, што конус $K(C_1, AC_2)$ замкнёны ў двух наступных прыватных выпадках:

- конусы C_1 і C_2 паліэдральныя;
- (*умова Слейтэра*) rint $K(C_1, AC_2) \neq \emptyset$.

Прыватным выпадкам тэарэмы 1.3.1 з'яўляецца наступны крытэрый вырашальнасці *сістэм лінейных няроўнасцей (СЛН)*, які больш вядомы як *лема Фаркаша*.

Лема 1.3.1 *Няхай $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ і $b \in \mathbb{R}^m$. Існаванне рашэння СЛН $Ax \leq b$ эквівалентна таму, што $y^T b \geq 0$ для любога вектара $y \in \mathbb{R}^m_+$, задавальняючага ўмове $y^T A = 0$.*

Доказ вынікае з тэарэмы 1.3.1, калі $C_1 = \mathbb{R}^m_+$, $C_2 = \mathbb{R}^n$. □

Наступная лема з'яўляецца варыянтам лемы Фаркаша для *сістэмы лінейных ураўненняў з неадмоўнымі зменнымі.*

Лема 1.3.2 *Няхай $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ і $b \in \mathbb{R}^m$. Існаванне неадмоўнага рашэння $x \geq 0$ СЛУ $Ax = b$ эквівалентна таму, што $y^T b \geq 0$ для любога вектара $y \in \mathbb{R}^m$, задавальняючага ўмове $y^T A \geq 0$.*

Доказ вынікае з тэарэмы 1.3.1, калі $C_1 = \{0\}$, $C_2 = \mathbb{R}^n_+$. □

І ў заключэнне сфармулюем афінны варыянт лемы Фаркаша.

Лема 1.3.3 *Дадзены матрыца $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ і вектар $b \in \mathbb{R}^m$. Вектар $b \in cone(A^1, \ldots, A^n)$, тады і толькі тады, калі для любога вектара $y \in \mathbb{R}^m$ з умовы $y^T A \geq 0$ вынікае, што $y^T b \geq 0$.*

Доказ пакідаецца чытачу ў якасці практыкавання. □

Прамая задача	Двойная задача
$\max c^T x$	$\min b^T y$
$A_i x \le b_i\,,\ i \in \mathcal{R}_\infty$	$y_i \ge 0\,,\ i \in \mathcal{R}_\infty$
$A_i x = b_i\,,\ i \in \mathcal{R}_\in$	$y_i \in \mathbb{R}\,,\ i \in \mathcal{R}_\in$
$A_i x \ge b_i\,,\ i \in \mathcal{R}_\ni$	$y_i \le 0\,,\ i \in \mathcal{R}_\ni$
$x_j \ge 0\,,\ j \in \mathcal{C}_\infty$	$y^T A^j \ge c_j\,,\ j \in \mathcal{C}_\infty$
$x_j \in \mathbb{R}\,,\ j \in \mathcal{C}_\in$	$y^T A^j = c_j\,,\ j \in \mathcal{C}_\in$
$x_j \le 0\,,\ j \in \mathcal{C}_\ni$	$y^T A^j \le c_j\,,\ j \in \mathcal{C}_\ni$

Табліца 1.2: Пара двойных задач ЛП

1.3.2 Тэарэма двойнасці

Няхай $C_X \subseteq \mathbb{R}^n$ і $C_Y \subseteq \mathbb{R}^m$ ёсць замкнёныя выпуклыя конусы, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Разгледзім пару аналітычных задач ЛП

$$\max\{c^T x\ :\ Ax \le_{C_Y} b,\ x \ge_{C_X} 0\} \tag{П}$$

і

$$\min\{b^T y\ :\ A^T y \ge_{C_X^D} c,\ y \ge_{C_Y^D} 0\}. \tag{Д}$$

(П) і (Д) называюцца, адпаведна, ***прамой*** і ***двойнай*** задачамі. У дачыненні да прамой задачы (П) зменныя x_i называюцца ***прамымі***, а зменныя y_i — ***двойнымі***. Зазначым таксама, што дачыненне двойнасці сіметрычнае, г. зн. задача двойная да двойнай з'яўляецца прамой.

Дастаткова агульнае правіла запісу двойнай задачы для дадзенай (паліэдральнай) задачы ЛП прыведзена ў табліцы 1.3.2.

Напрыклад, двойнай для наступнай задачы ЛП

$$\begin{array}{rcrcrcl}
2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & \to & \max\\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 9\,,\\
-2x_1 & + & x_2 & & & \le & 5\,,\\
x_1 & & & - & 3x_3 & \ge & 4\,,\\
x_1 & & & & & \ge & 0\,,\\
 & & & & x_3 & \le & 0
\end{array}$$

будзе задача

$$\begin{array}{rcrcrcr}
9y_1 & + & 5y_2 & + & 4y_3 & \to & \min\\
y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & \ge & 2\,,\\
y_1 & + & y_2 & & & = & -4\,,\\
-y_1 & & & - & 3y_3 & \le & 3\,,\\
 & & y_2 & & & \ge & 0\,,\\
 & & & & y_3 & \le & 0\,.
\end{array}$$

Двойнай да задачы ЛП (1.3) у нармальнай форме будзе задача

$$\min\{b^T y\ :\ A^T y = c,\ y \ge 0\}. \tag{1.3.23}$$

Запішам цяпер двойную задачу да задачы (1.5) паўазначанага праграмавання ў нармальнай форме:

$$\begin{array}{rcl} (B,Y) & \to & \min \\ (A^i,Y) & = & c_i\,, \quad i=1,\dots,n\,, \\ Y & \geq_{SM_+^m} & 0. \end{array} \tag{1.3.24}$$

Для задачы (1.6) паўазначанага праграмавання ў стандартнай форме двойная задача мае наступны выгляд:

$$\begin{array}{rcl} b^T y & \to & \min \\ \sum_{i=1}^m A^i y_i & \geq_{SM_+^n} & C\,. \end{array} \tag{1.3.25}$$

Зазначым, што ў задачы (1.3.24) невядомай з'яўляецца матрыца $Y \in SM_+^m$, а ў задачы (1.3.25) невядомы вектар $y \in \mathbb{R}^m$.

Для прыкладу, двойная задача да задачы (1.18) мае наступны выгляд:

$$\begin{array}{rcl} \big(A^0,P\big) & \to & \min \\ \big(A^i,P\big) & = & 0, \quad i=1,\dots,m, \\ p_{00} & = & 1, \\ P & \in & SM_{n+1}^+\,. \end{array} \tag{1.3.26}$$

Паміж прамой і двойнай задачамі існуе вельмі цесная ўзаемасувязь. Мы сфармулюем тэарэму двойнасці і некалькі важных яе следстваў пры ўмове, што

$$\text{конусы } K(C_Y, AC_X) \text{ і } K(-C_X^D, A^T C_Y^D) \text{ замкнёныя.} \tag{1.3.27}$$

У прыватнасці, гэтая ўмова выконваецца для паліэдральных задач ЛП.

Тэарэма 1.3.2 (двойнасці) *Маюць месца наступныя альтэрнатывы.*

1. *Абедзве задачы (П) і (Д) маюць дапушчальныя рашэнні і*

$$\begin{array}{l} \max\{c^T x \,:\, Ax \leq_{C_Y} b,\ x \geq_{C_X} 0\} = \\ \min\{b^T y \,:\, A^T y \geq_{C_X^D} c,\ y \geq_{C_Y^D} 0\}. \end{array} \tag{1.3.28}$$

2. *Калі адна з задач (П) ці (Д) не мае дапушчальных рашэнняў, а другая мае, то функцыя мэты гэтай задачы неабмежавана.*

3. *Абедзве задачы не маюць дапушчальных рашэнняў.*

Доказ. Няхай $x \in \mathbb{R}^n$ і $y \in \mathbb{R}^m$ — адпаведна адвольныя дапушчальныя рашэнні прамой і двойнай задач. Па азначэнню двойнага конуса маем

$$(A^T y - c)^T x \geq 0 \quad \text{і} \quad y^T(b - Ax) \geq 0\,.$$

Адкуль

$$c^T x \leq y^T A x \leq y^T b\,.$$

Мы даказалі, што max $\leq$ min. Для доказу роўнасці дастаткова паказаць, што мае рашэнне наступная сістэма няроўнасцей

$$\begin{array}{l} Ax \leq_{C_Y} b,\ x \geq_{C_X} 0; \\ A^T y \geq_{C_X^D} c,\ y \geq_{C_Y^D} 0; \\ -c^T x + b^T y \leq 0\,. \end{array} \tag{1.3.29}$$

Азначым

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & C_Y \times (-C_X^D) \times \mathbb{R}_+\,, \\ C_2 & = & C_X \times C_Y^D\,, \end{array}$$

$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^T \\ -c^T & b^T \end{bmatrix}, \quad \overline{b} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

і $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Цяпер (1.3.29) можна перапісаць у выглядзе

$$\overline{A}z \leq_{C_1} \overline{b},\ z \geq_{C_2} 0\,. \tag{1.3.30}$$

Згодна тэарэме 1.3.1, сістэма (1.3.30) мае рашэнне тады і толькі тады, калі выконваецца наступная ўмова

$$u^T \overline{b} \geq 0 \text{ для ўсіх } u, \text{ такіх, што } \quad u \geq_{C_1^D} 0 \text{ і } A^T u \geq_{C_2^D} 0\,. \tag{1.3.31}$$

Прадставім вектар u у выглядзе $u = (w, v, t)$, дзе $w \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Цяпер умову (1.3.31) можна запісаць наступным чынам:

$$\begin{array}{l} \text{калі } w \geq_{C_Y^D} 0,\ v \leq_{C_X} 0,\ t \geq 0 \\ \text{і} \quad A^T w - tc \geq_{C_X^D} 0,\ Av + tb \geq_{C_Y} 0, \\ \text{то } w^T b + v^T c \geq 0. \end{array} \tag{1.3.32}$$

Каб даказаць гэтую імплікацыю, дапусцім, што w, v, t задавальняюць яе пасылцы. Разгледзім два выпадкі:

1) калі $t > 0$, то з $w^T(tb + Av) \geq 0$ і $v^T(A^T w - tc) \leq 0$ маем

$$w^T b \geq -\frac{1}{t} w^T A v \geq -c^T v;$$

2) калі $t = 0$, то, так як існуюць такія $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$, што

$$A\overline{x} \leq_{C_Y} b,\ \overline{x} \geq_{C_X} 0 \quad \text{і} \quad A^T \overline{y} \geq_{C_X^D} c,\ \overline{y} \geq_{C_Y^D} 0,$$

атрымліваем

$$w^T b \geq w^T A \overline{x} \geq 0 \geq -v^T A^T \overline{y} \geq -v^T c.$$

Цяпер разгледзім другую альтэрнатыву. Калі сістэма

$$Ax \leq_{C_Y} b,\ x \geq_{C_X} 0$$

не мае рашэнняў, а

$$A^T y^0 \geq_{C_X^D} c,\ y^0 \geq_{C_Y^D} 0,$$

то па тэарэме 1.3.1 існуе такі вектар $u \in \mathbb{R}^m$, што $A^T u \geq_{C_X^D} 0$, $u \geq_{C_Y^D} 0$ і $b^T u < 0$. Тады вектар $\hat{y} = y^0 + \lambda u$ таксама з'яўляецца дапушчальным рашэннем задачы (Д) для ўсіх $\lambda \geq 0$. Калі λ імкнецца да ∞, то функцыя мэты задачы (Д) імкнецца да $-\infty$.

У выпадку, калі сістэма

$$A^T y \geq_{C_X^D} c,\ y \geq_{C_Y^D} 0$$

не мае рашэнняў, а

$$Ax^0 \leq_{C_Y} b,\ x^0 \geq_{C_X} 0,$$

то па тэарэме 1.3.1 існуе такі вектар v, што $Av \geq_{C_Y} 0$, $v \leq_{C_X} 0$, $c^T v < 0$. Тады вектар $\hat{x} = x^0 - \lambda v$ з'яўляецца дапушчальным рашэннем задачы (П) для ўсіх $\lambda \geq 0$. Калі λ імкнецца да ∞, то функцыя мэты задачы (П) таксама імкнецца да ∞.

Зразумела, каб даказаць магчымасць трэцяй альтэрнатывы, дастаткова прывесці прыклад пары двойных задач ЛП, якія ёй задавальняюць:

$$\max\{-x:\ 0x \leq -1\}, \quad \min\{-y:\ 0y = -1,\ y \geq 0\}.$$

Зазначым, што існуюць і менш трывіяльныя прыклады. □

Вынік 1.3.1 *Няхай $\overline{x}$ і $\overline{y}$ — дапушчальныя рашэнні адпаведна задач (П) і (Д). Наступныя ўмовы эквівалентны:*

a) $\overline{x}$, $\overline{y}$ — аптымальныя рашэнні прамой і двойнай задач;

b) $c^T\overline{x} = c^T\overline{y}$;

*c) (***умова дапаўняючай няжорсткасці***)*

$$\overline{y}^T(b - A\overline{x}) = 0 \quad i \quad \overline{x}^T(c - A^T\overline{y}) = 0\,.$$

Доказ. Эквівалентнасць умоў a) і b) была вызначана ў тэарэме двойнасці. Дакажам эквівалентнасць b) і c).

b) $\Rightarrow$ *c)*. Так як

$$A\overline{x} \leq_{C_Y} b,\ \overline{x} \geq_{C_X} 0; \quad A^T\overline{y} \geq_{C_X^D} c,\ \overline{y} \geq_{C_Y^D} 0; \quad c^T\overline{x} = b^T\overline{y}\,,$$

то $c^T\overline{x} \leq \overline{y}^T A\overline{x} \leq \overline{y}^T b$. Значыць, $\overline{x}^T c = \overline{x}^T A^T\overline{y}$ і $\overline{y}^T b = \overline{y}^T A\overline{x}$, ці

$$\overline{y}^T(b - A\overline{x}) = 0 \quad \text{і} \quad \overline{x}^T(c - A^T\overline{y}) = 0\,.$$

c) $\Rightarrow$ *b)*. Так як c) выконваецца, то $c^T\overline{x} = \overline{y}^T A\overline{x}$ і $b^T\overline{y} = \overline{y}^T A\overline{x}$. Адкуль $c^T\overline{x} = b^T\overline{y}$. □

Вынік 1.3.2 *Абедзве задачы (П) і (Д) маюць дапушчальныя рашэнні тады і толькі тады, калі мае рашэнне сістэма няроўнасцей (1.3.29). Калі (x^*, y^*) ёсць рашэнне сістэмы няроўнасцей (1.3.29), то x^* — аптымальнае рашэнне задачы (П), а y^* — аптымальнае рашэнне задачы (Д).*

На прыкладзе пакажам, што без патрабавання выканання ўмовы (1.3.27) асобныя адносіны двойнасці могуць не выконвацца. Разгледзім пару двойных задач паўазначанага праграмавання

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \to & \min \\ \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1+1 \end{bmatrix} & \geq_{SM_+^3} & 0 \end{array}$$

і

$$\begin{array}{rcl} -y_{33} & \to & \max \\ y_{12}+y_{21}+y_{33} & = & 1, \\ y_{22} & = & 0, \\ Y & \geq_{SM_+^3} & 0. \end{array}$$

Прамымі дапушчальнымі рашэннямі з'яўляюцца ўсе вектары $x \in \mathbb{R}^3$, для якіх $x_1 = 0$, $x_2 \geq 0$. Мноства двойных дапушчальных рашэнняў утвараюць матрыцы наступнага выгляду

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

дзе $a \geq b^2$. Мы бачым, што аптымальнае значэнне прамой функцыі мэты роўна 0, а двойнай — -1.

У заключэнне трэба таксама зазначыць, што асобныя двойныя суадносіны могуць выконвацца і пры больш слабых дапушчэннях, чым умова (1.3.27).

1.3.3 Геаметрычная інтэрпрэтацыя двойнасці

Будзем разглядаць пару двойных задач ЛП (1.3) і (1.3.23). Дапусцім, што задача (1.3) мае аптымальнае рашэнне $x^* \in P_{\leq}(A, b)$. Няхай, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ ёсць нумары тых няроўнасцей, якія ў кропцы x^* выконваюцца як роўнасці. Так як x^* — аптымальнае рашэнне задачы (1.3), то з умовы $A_I x \leq 0$ павінна вынікаць, што $c^T x \leq 0$, бо інакш $x^* + \epsilon x \in P_{\leq}(A, b)$ і $c^T(x^* + \epsilon x) > c^T x^*$ для дастаткова малога $\epsilon > 0$, што супярэчыць аптымальнасці кропкі x^*. Цяпер па лемы 1.3.3 мы маем, што вектар c павінен належаць конусу $\mathrm{cone}(A_I^T)$, параджанаму радкамі падматрыцы A_I, г. зн., што

$$c^T = \lambda_{i_1} A_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_k} A_{i_k} \qquad (1.3.33)$$

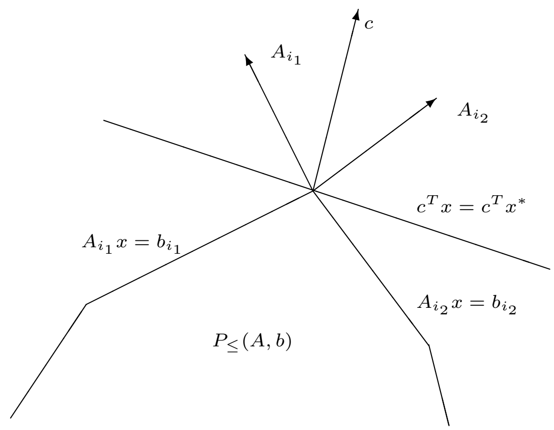


Рис. 1.1: Геаметрычная інтэрпрэтацыя ЛП-двойнасці

для нейкіх $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k} \geq 0$ (гл. мал. 1.3.3).
Тады

$$\begin{aligned}&\max\{c^Tx \,:\, Ax \leq b\} \;=\; c^Tx^* \;=\\ &\lambda_{i_1}b_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_k}b_{i_k} \;\geq\; \min\{b^Ty \,:\, A^Ty = c\,,\; y \geq 0\},\end{aligned} \tag{1.3.34}$$

так як вектар y^* з каардынатамі

$$y_i^* = \begin{cases} \lambda_{i_s}\,, & i = i_s\,,\; s = 1, \ldots, k, \\ 0\,, & i \in N_m \setminus I. \end{cases}$$

з'яўляецца дапушчальным для задачы на мінімум. Як мы бачылі раней, справядліва адваротная да (1.3.34) няроўнасць

$$\max\{c^Tx \,:\, Ax \leq b\} \leq \min\{b^Ty \,:\, A^Ty = c\,,\; y \geq 0\}.$$

Таму няроўнасць (1.3.34) выконваецца як роўнасць і $c^Tx^* = b^Ty^*$. Адкуль вынікае, што y^* — аптымальнае рашэнне двойнай задачы. Відавочна таксама, што для x^* і y^* выконваецца ўмова дапаўняючай няжорсткасці

$$y_i^*(A_ix^* - b_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

У заключэнне гэтага параграфа прывядзем яшчэ адну інтэрпрэтацыю тэарэмы двойнасці. У прасторы $\mathbb{R}^n$ матэрыяльная кропка рухаецца пад уздзеяннем пастаяннай сілы c. Дапусцім, што першапачатковае становішча матэрыяльнай кропкі $x^0 \in P_{\leq}(A,b)$, і ўсе грані $P_{\leq}(A,b)$ з'яўляюцца абсалютна няпруткімі. У пазіцыі $x \in P_{\leq}(A,b)$ на матэрыяльную кропку дзейнічае сіла c і сілы рэакцыі тых граняў, на якіх ляжыць x. Няхай I ёсць мноства нумароў тых няроўнасцяў, якія ў кропцы x^* выконваюцца як роўнасці.

Тады той факт, што ў кропцы x^* сілы рэакцыі граняў ураўнаважваюць сілу c, запісваецца ўмовай (1.3.33). Такім чынам, у дадзенай інтэрпрэтацыі задача (1.3) ёсць задача пошуку стану спакою матэрыяльнай кропкі, а задача (1.3.23) — гэта задача пошуку сілы рэакцыі граняў, якая ўраўнаважвае сілу c.

1.4 Прынцып гранічных рашэнняў

У гэтым параграфе мы ўстановім, што задача ЛП з'яўляецца *камбінаторнай*, г. зн. што яе можна вырашыць простым пераборам концай колькасці варыянтаў.

Тэарэма 1.4.1 *Калі задача ЛП (1.3) мае рашэнне, то існуе такое множства радкоў $I \subseteq N_m$, што кожнае рашэнне СЛУ $A_I x = b_I$ з'яўляецца аптымальнае рашэннем задачы (1.3).*

Доказ. Няхай $x^{(0)}$ — нейкае дапушчальнае рашэнне задачы (1.3). Разаб'ем абмежаванні задачы (1.3) на два падмноствы

$$A_i x^{(0)} = b_i\,,\; i \in I(x^{(0)}), \quad A_i x^{(0)} < b_i\,,\; i \in N_m \setminus I(x^{(0)}),$$

дзе $I(x) = \{i \in N_m : A_i x = b_i\}$ ёсць мноства абмежаванняў, якія ў кропцы x выконваюцца як роўнасці. Пакладзем $I = I(x^{(0)})$. Разгледзім сістэму лінейных ураўненняў $A_I x = b_I$. Калі любое яе рашэнне з'яўляецца аптымальным рашэннем задачы ЛП (1.3), то прынцып гранічных рашэнняў даказаны. Інакш знойдзецца рашэнне $\overline{x}$ сістэмы $A_I x = b_I$, якое не з'яўляецца аптымальным рашэннем задачы ЛП (1.3). Пакажам спачатку, што $c^T x^{(0)} = c^T \overline{x}$. Разгледзім прамую, якая праходзіць праз $x^{(0)}$ і $\overline{x}$. Яна задаецца наступным параметрычным ураўненнем $x(t) = x^{(0)} + t(\overline{x} - x^{(0)})$, $-\infty < t < \infty$. Пры дастаткова малых значэннях параметра t, кропка $x(t)$ таксама будзе задавальняць усім абмежаванням задачы (1.3). Таму існуе такое $\epsilon > 0$, што для ўсіх $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ кропка $x(t)$ з'яўляецца дапушчальным рашэннем (1.3). Таму

$$c^T x(t) = c^T x^{(0)} + t(c^T \overline{x} - c^T x^{(0)}) \le c^T x^{(0)}, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

адкуль вынікае, што рознасць $c^T \overline{x} - c^T x^{(0)}$ павінна быць роўнай нулю. Таму $c^T \overline{x} = c^T x^{(0)}$ і, як вынік, маем

$$c^T x(t) = c^T x^{(0)}, \quad \text{для ўсіх} \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Няхай

$$t^0 = \min\left\{ \frac{b_i - A_i(x^{(0)})}{A_i(\overline{x} - x^{(0)})} \;:\; i \in N_m \setminus I\,, A_i(x - x^{(0)}) > 0 \right\}.$$

Няцяжка ўпэўніцца, што

- $t^0 \in [0, 1]$,

- кропка $x^{(1)} = x(t^0)$ з'яўляецца аптымальным рашэннем задачы ЛП (1.3),
- $I(x^{(0)}) \subset I(x^{(1)})$.

Працягваючы дзейнічаць такім чынам, мы можам пабудаваць паслядоўнасць аптымальных рашэнняў $x^{(0)}, x^{(1)} \ldots, x^{(k)}$ задачы ЛП (1.3), што

$$I(x^{(0)}) \subset I(x^{(1)}) \subset \ldots \subset I(x^{(k)}).$$

Зразумела, што $k \leq m-1$. Пры гэтым кожнае рашэнне сістэмы ўраўненняў $A_{I(x^{(k)})} = b_{I(x^{(k)})}$ павінна быць аптымальным рашэннем задачы ЛП (1.3). □

З тэарэмы 1.4.1 вынікае наступны концы метад рашэння задачы ЛП:

> разглядаем па чарзе ўсе падмноствы мноства радкоў N_m, знаходзім па аднаму рашэнню для кожнай з вырашальных сістэм, а затым у концым мностве атрыманых рашэнняў сярод тых, якія задавальняюць усім абмежаванням задачы, выбіраем тое, на якім функцыя мэты прымае максімальнае значэнне.

1.4.1 Базісы і базісныя рашэнні

Апісанне многіх метадаў лінейнага праграмавання (сімплекс-метада, метада Кармаркара, метада бар'ераў і іншых) значна спрашчаецца, калі задача ЛП (1.3), ці (1.2) задавальняе *ўмове паўнаты рангу*:

- $\operatorname{rank} A = n$ для задачы (1.3);
- $\operatorname{rank} A = m$ для задачы (1.2).

Аналагічна таму, як мы ўстанавілі эквівалентнасць задач ЛП у нармальнай і стандартнай формах, можна паказаць, што любую задачу ЛП шляхам павелічэння колькасці невядомых можна звесці да задачы наступнага выгляду

$$\max\{c^T x \,:\, Ax \leq b,\, x \geq 0\}. \tag{1.4.35}$$

Калі запісаць (1.4.35) у нармальнай форме, то, відавочна, яна будзе задавальняць умове паўнаты рангу.

На прыкладзе задачы (1.3) пакажам, што ўмова паўнаты рангу можа быць выканана з дапамогай нескладанага пераўтварэння зыходнай задачы без павелічэння колькасці невядомых. Метадам Гаўса, выканаўшы $O(\max(n,m)\min^2(n,m))$ арыфметычных аперацый, можна знайсці радковы базіс матрыцы A, г. зн. падматрыцу A_I, $|I| = \operatorname{rank} A$, а таксама лінейныя выразы астатніх радкоў A праз радкі A_I:

$$A_k = \sum_{i \in I} \lambda_{ki} A_i. \tag{1.4.36}$$

Акрамя таго, за тыя ж $O(\max(n,m)\min^2(n,m))$ арыфметычных аперацыі можна праверыць ці выражаецца вектар c^T функцыі мэты ў выглядзе лінейнай камбінацыі радкоў матрыцы A_I:

$$c^T = \sum_{i\in I} \lambda_i A_i. \tag{1.4.37}$$

Калі выраз (1.4.37) атрымаць немагчыма, то задача ЛП (1.3) не мае рашэння. Сапраўды, у гэтым выпадку $c \notin \mathcal{R}(\mathcal{A}^T)$. Таму $c = u+v$, дзе $u \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^T)$, $v \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$, прычым $v \neq 0$. Калі задача (1.3) мае дапушчальнае рашэнне x^0, то кропка $x(t) = x^0 + tv$ — таксама дапушчальнае рашэнне (1.3) для ўсіх $t \in \mathbb{R}^n$. Так як $c^T x(t) = c^T x^0 + tv^T v$, то $c^T x(t) \to \infty$, калі $t \to \infty$.

Дапусцім цяпер, што выраз (1.4.37) знойдзены. Увядзем $|I|$ новых невядомых

$$y_i = A_i x, \quad i \in I, \tag{1.4.38}$$

з дапамогай якіх перапішам (1.3) у наступным выглядзе:

$$\begin{aligned} c^T x = \sum_{i\in I}\lambda_i A_i x &= \sum_{i\in I}\lambda_i y_i \to \max, \\ A_i x &= y_i \le b_i\,, \quad i \in I, \\ A_k x = \sum_{i\in I}\lambda_{ki} A_i x &= \sum_{i\in I}\lambda_{ki} y_i \le b_k\,, \quad k \in N_m \setminus I. \end{aligned} \tag{1.4.39}$$

Задача ЛП (1.4.39) адносна невядомых y эквівалентна зыходнай задачы ЛП (1.3). Сапраўды, так як радкі A_I лінейна незалежныя, то сістэма лінейных ураўненняў (1.4.38) вырашальна для любога вектара y. Іншымі словамі, па любому рашэнню y задачы (1.4.39) можна знайсці (неадназначна пры $|I| < n$) рашэнне зыходнай задачы. Задача (1.4.39) мае $n' = |I| = \operatorname{rank} A \le n$ невядомых і m абмежаванняў, n' з якіх маюць працейшы выгляд $y_i \le b_i$, $i \in I$. Таму ўмова паўнаты рангу для задачы (1.4.39) выконваецца.

Цяпер будзем лічыць, што задача ЛП (1.3) задавальняе ўмове паўнаты рангу. Падмноства радкоў $I \subseteq N_m$, $|I| = n$, называецца *базісным*, калі $\operatorname{rank} A_I = n$. У гэтым выпадку матрыца A_I называецца *базіснай*, сістэма лінейных ураўненняў $A_I x = b_I$ мае адзінае рашэнне $x = A_I^{-1} b_I$, якое называецца *базісным рашэннем* задачы ЛП (1.3). Калі x задавалняе ўсім застаўшымся няроўнасцям $A_{N_m\setminus I} \le b_{N_m\setminus I}$ задачы (1.3), то такое рашэнне называецца *дапушчальным базісным рашэннем (дбр)*, а мноства I называецца *дапушчальным базісным мноствам (дбм)*. Зазначым толькі, што дбр — гэта не што іншае як *вяршыня* паліэдра $P_{\le}(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \le b\}$.

Прыклад 1.4.1 *Разгледзім задачу ЛП з $n = 3$ невядомымі і $m = 7$ абмежаваннямі*

$$\begin{array}{rcrcrcll} -x_1 & & & & & \le & 0, & H_1 \\ & - & x_2 & & & \le & 0, & H_2 \\ & & & - & x_3 & \le & 0, & H_3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \le & 4, & H_4 \\ 2x_1 & & & & & \le & 5, & H_5 \\ & & 3x_2 & & & \le & 7. & H_6 \end{array}$$

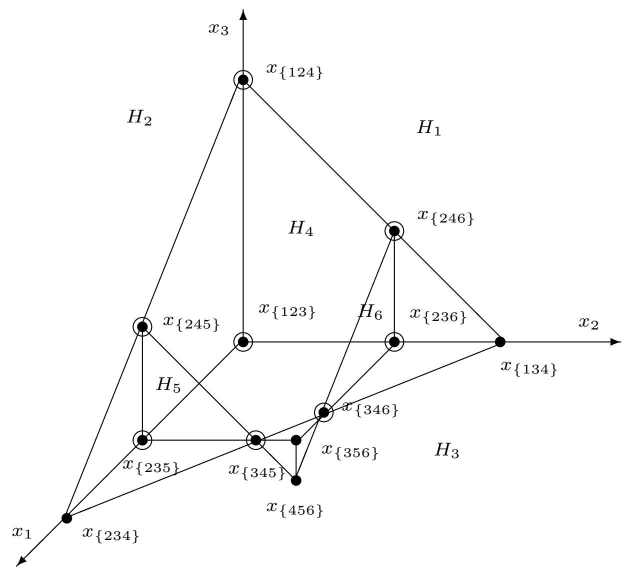


Рис. 1.2: Вяршыні і базісныя рашэнні

Абмежаванні задачы паказаны на мал. 1.2. Базісныя рашэнні задачы прадстаўлены тлустымі кропкамі, а дбр ў дадатак абведзены кружкамі. □

Дбр (ці вяршыня) x называецца ***выраджанай***, калі яму адпавядаюць два розных базісных мноствы I_1 і I_2, г. зн. што $A_{I_1}x = b_{I_1}$, $A_{I_2}x = b_{I_2}$, $|I_1| = |I_2| = n$, $I_1 \neq I_2$. Геаметрычна гэта азначае, што вяршыня x ляжыць на больш чым n фасетах паліэдра $P_{\leq}(A, b)$. Напрыклад, у шматгранніка на мал. 2 вяршыня $(2, 2, 0)$ з'яўляецца выраджанай. У далейшым паліэдр $P_{\leq}(A, b)$, які мае выраджаныя вяршыні, называецца ***выраджаным.*** Таксама называюцца ***выраджанымі*** задачы ЛП, якія маюць выраджаныя дбр.

1.4.2 Як па дапушчальнаму рашэнню задачы ЛП пабудаваць дапушчальнае базіснае рашэнне

Будзем разглядаць задачу ЛП (1.3), для якой выконваецца ўмова паўнаты рангу, $\operatorname{rank} A = n$. Няхай x ёсць дапушчальнае рашэнне задачы (1.3). У гэтым параграфе мы пакажам, як, пачынаючы з x, пабудаваць дбр $\overline{x}$ задачы (1.3), такое, што $c^T\overline{x} \geq c^T x$. Ідэя метада толькі ў дэталях адрозніваецца ад той, як мы даказвалі прынцып гранічных рашэнняў. Дэталёвае апісанне алгарытма (працэдура *convert_to_basis*) прыведзена на мал. 1.3.

Разгледзім, што адбываецца на адной ітэрацыі алгарытма. Няхай $I = I(x)$ ёсць мноства абмежаванняў задачы, якія ў кропцы x выконваюцца як роўнасці. Калі $\operatorname{rank} A_I = n$, то x з'яўляецца дбр. Інакш, знаходзім праекцыю

$y = \mathrm{pr}(c, \mathcal{N}(\mathcal{A}_\mathcal{I}))$ вектара c на нуль прастору матрыцы $\mathcal{N}(\mathcal{A}_\mathcal{I})$. Разгледзім асобна два выпадкі: 1) $y \neq 0$; 2) $y = 0$.

1) Няхай

$$\lambda = \min_{i \in N_m \setminus I \,:\, A_i y > 0} \frac{b_i - A_i x}{A_i y} \tag{1.4.40}$$

і $x^{(1)} = x + \lambda y$. Так як $c^T y > 0$, то $c^T x^{(1)} > c^T x$. У выпадку, калі $\lambda = \infty$, то задача ЛП (1.3) не мае рашэння, так як функцыя мэты не абмежавана. Калі ж $\lambda < \infty$, то тады $I(x)$ з'яўляецца асабістым падмноствам мноства $I(x^{(1)})$.

2) Калі $y = 0$, то вектар c артаганальны лінейнай падпрасторы $\mathcal{N}(\mathcal{A}_\mathcal{I})$. Так як $\operatorname{rank} A_I < n$ і $\operatorname{rank} A = n$, то існуе радок A_i матрыцы A, які не належыць $\mathcal{R}(\mathcal{A}_\mathcal{I}^T)$. Няхай $y = \mathrm{pr}(A_i, \mathcal{N}(\mathcal{A}_\mathcal{I}))$. Зазначым, што $A_i y > 0$. Вылічым λ па формуле (1.4.40) (цяпер абавязкова $\lambda < \infty$) і разгледзім вектар $x^{(1)} = x + \lambda y$. Са сказанага вышэй маем, што $c^T x = c^T x^1$ і $I(x) \subset I(x^{(1)})$.

У абодвух выпадках, калі не была ўстаноўлена невырашальнасць задачы ЛП, пасля заканчэння ітэрацыі метад будуе новае дапушчальнае рашэнне $x^{(1)}$, такое, што $c^T x \le c^T x^{(1)}$ і $I(x) \subset I(x^{(1)})$. Пасля гэтага x замяняецца на $x^{(1)}$ і ітэрацыя паўтараецца. У рэзультаце алгарытм будуе паслядоўнасць дапушчальных рашэнняў

$$x = x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)},$$

якая задавальняе наступным свойствам:

$$c^T x^{(i)} \ge c^T x^{(i-1)},\ I(x^{(i-1)}) \subset I(x^{(i)}) \quad i = 1, \ldots, k.$$

Зразумела, што колькасць k ітэрацый метада не пераўзыходіць m. Дамінуючай аперацыяй на кожнай ітэрацыі з'яўляецца вылічэнне матрыцы праектавання $P_{\mathcal{N}(\mathcal{A}_\mathcal{I})}$ на лінейную падпрастору $\mathcal{N}(\mathcal{A}_\mathcal{I})$. Няхай радкі падматрыцы $A_{I'}$, дзе $I' \subseteq I$, утвараюць базіс лінейнай падпрасторы $\mathcal{R}(\mathcal{A}_\mathcal{I}^T)$. Тады

$$P_{\mathcal{N}(\mathcal{A}_\mathcal{I})} = I - A_{I'}^T (A_{I'} A_{I'}^T)^{-1} A_{I'}$$

і $P_{\mathcal{N}(\mathcal{A}_\mathcal{I})}$ можна вылічыць за час $O(n^2|I|)$. Калі ж вылічваць матрыцу $P_{\mathcal{N}(\mathcal{A}_{\overline{\mathcal{I}}})}$, пералічваючы матрыцу $P_{\mathcal{N}(\mathcal{A}_\mathcal{I})}$, дзе $I \subset \overline{I}$, то гэта можна зрабіць за час $O(n^2|\overline{I} \setminus I|)$ (гл. параграф У.2.1). Таму сумарны час, патрэбны каб вылічыць усе матрыцы праектавання, не пераўзыходзіць $O(n^2 m)$. Так як усе астатнія аперацыі метада таксама можна выканаць за час $O(n^2 m)$, то складанасць усяго метада $O(n^2 m)$.

Абгрунтоўваючы карэктнасць працэдуры *convert_to_basis* мы даказалі справядлівасць наступнай тэарэмы, якая з'яўляецца ўдакладненнем прынцыпа гранічных рашэнняў для задач ЛП, якія задавальняюць умове паўнаты рангу.

Тэарэма 1.4.2 *Калі задача ЛП (1.3), якая задавальняе ўмове паўнаты рангу, мае рашэнне, то яна мае аптымальнае рашэнне, якое з'яўляецца базісным.*

convert_to_basis(c, A, b, x)
{
  for (; rank $A_{I(x)} \neq n$;) {
    if $(c \notin \mathcal{R}(\mathcal{A}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{I}(\S)}))$ $a := c$; **else** {
      Выбраць радок A_i, такі, што $A_i \notin \mathcal{R}(\mathcal{A}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{I}(\S)})$;
      $a := A_i$;
    }
    $y := \mathrm{pr}(a, \mathcal{N}(\mathcal{A}_{\mathcal{I}(\S)}))$;
    $\lambda := \min\{(b_i - A_i x)/(A_i y) \,:\, i \in N_m\,,\ A_i y > 0\}$;
    if $(\lambda = \infty)$ **return**; // задача ЛП не мае рашэння
    $x := x + \lambda y$;
  }
}

Рис. 1.3: Працэдура *convert_to_basis*

Прыклад 1.4.2 *Разгледзім задачу ЛП*

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\textit{пры абмежаваннях } (20)$$

Трохграннік P абмежаванняў задачы прадстаўлены на мал. 2. Пачынаючы з дапушчальнага рашэння $x^{(0)} = (1, 1, 2)^T$, трэба знайсці такое дбр $\overline{x}$, што $c^T \overline{x} \geq c^T x^{(0)}$.

Так як $I^{(0)} = I(x^{(0)}) = \{1\}$, $A_{I^{(0)}} = (1\ 1\ 1)$ і rank $A_{I^{(0)}} < 3$, вылічваем праекцыю $y = \mathrm{pr}(c, \mathcal{N}(\mathcal{A}_{\mathcal{I}^{(\prime)}}))$ па формуле $y = (I - A^T_{I^{(0)}}(A_{I^{(0)}}A^T_{I^{(0)}})^{-1}A_{I^{(0)}})c$. Паколькі $A_{I^{(0)}}A^T_{I^{(0)}} = (3)$ і $A_{I^{(0)}}c = 6$, то

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вылічваем

$$\lambda = \frac{b_3 - A_3 x^{(0)}}{A_3 y} = 1$$

і $x^{(1)} = x^{(0)} + y = (0, 1, 3)^T$.

Так як $I^{(1)} = I(x^{(1)}) = \{1, 3, 5\}$,

$$A_{I^{(1)}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

і rank $A_{I^{(1)}} = 3$, то $x^{(1)}$ — вяршыня P. □

1.4.3 Двойныя зменныя і ценявыя цэны

Прадпрыемства плануе вырабляць n відаў прадукцыі, выкарыстоўваючы m відаў рэсурсаў: для вытворчасці адзінкі j-га прадукта патрэбна a_{ij} адзінак i-га рэсурса. Кошт адзінкі j-га прадукта c_j, а b_i — наяўны аб'ём i-га рэсурса. Трэба знайсці вытворчы план, які гарантуе максімальны прыбытак. Калі абазначым праз x_j аб'ём выпуска прадукцыі j-га віду ($j = 1, \dots, n$), то задачу пошуку аптымальнага вытворчага плану можна сфармуляваць як наступную задачу ЛП

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \to & \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} & \le & b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j & \ge & 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{array}$$

ці ў матрычным выглядзе

$$z(b) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x \,:\, Ax \le b,\ x \ge 0\}. \tag{1.4.41}$$

Няхай x^* — аптымальнае дбр задачы (1.4.41), а y^* — аптымальнае рашэнне двойнай задачы. Для прастаты будзем лічыць, што x^* — нявыраджанае дбр. Тады мноства $I(x^*)$ абмежаванняў, якія ў кропцы x^* выконваюцца як роўнасці, з'яўляецца аптымальным базісным мноствам. Цяпер дапусцім, што вектар рэсурсаў b мяняецца на $\bar{b} = b + \Delta b$, дзе $\Delta b \in \mathbb{R}^m$. Разгледзім задачу ЛП

$$\max\{c^T x \,:\, Ax \le \bar{b},\ x \ge 0\} \tag{1.4.42}$$

і няхай $\tilde{x}^*$ — яе аптымальнае рашэнне. Калі $\epsilon > 0$ дастаткова малы лік і $\|\Delta b\| \le \epsilon$, то $I(\tilde{x}^*) = I(x^*)$ (дакажыце гэта). Так як y^* застаецца дапушчальным рашэннем двойнай да (1.4.42) задачы ЛП (яе абмежаванні не залежаць ад b), то для пары $(\tilde{x}^*, y^*)$ выконваецца ўмова дапаўняючай няжорсткасці (гэта вынікае з таго, што яна выконваецца для пары (x^*, y^*)). Цяпер мы можам вылічыць

$$\frac{\partial z(b)}{\partial b_i} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z(b + \epsilon\, \mathrm{e}_i) - z(b)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(b + \epsilon\, \mathrm{e}_i)^T y^* - b^T y^*}{\epsilon} = y_i^* .$$

Эканамічны сэнс двойных зменных вынікае з прыблізнай роўнасці $z(b + \epsilon\, \mathrm{e}_i) \approx y_i^* \epsilon$, якая азначае, што на кожную дадатковую адзінку рэсурса i прадпрыемства атрымае прыбытак роўны y_i^*. Таму аптымальныя двойныя зменныя y_i^* называюцца *ценявымі цэнамі.* Калі ценявая цана y_i^* большая за цану рэсурса i на рынку, то прадпрыемству для павелічэння прыбытку мэтазгодна закупіць дадатковую колькасць i-га рэсурса. З умовы дапаўняючай няжорсткасці $y_i^*(b_i - A_i x^*) = 0$ вынікае, што ценявая цана няпоўнасцю выкарыстанага рэсурса ($A_i x^* < b_i$) роўна нулю.

1.5 Мера несумеснасці задач ЛП з цэлымі кафіцыентамі

Будзем разглядаць задачу ЛП у нармальнай форме

$$\max\{c^T x \,:\, Ax \le b\}, \tag{1.5.43}$$

калі $c \in \mathbb{Z}^n$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $n \le m$.

Для цэлалікавай матрыцы B праз $\Delta(B)$ будзем абазначаць абсалютную вялічыню яе максімальнага мінора, г. зн.

$$\Delta(B) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|\det(B_I^J)| : \, |I| = |J|\}.$$

Тэарэма 1.5.1 *Калі задача лінейнага праграмавання (1.5.43) мае рашэнне, то яна мае рацыянальнае аптымальнае рашэнне x^* ў шары $B(0,R)$, дзе*

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n}\Delta([A,b]), \tag{1.5.44}$$

прычым $c^T x^*$ з'яўляецца рацыянальным лікам $\frac{t}{s}$, дзе t, s – цэлыя і

$$0 < s \le \Delta(A). \tag{1.5.45}$$

Доказ. Па прынцыпу гранічных рашэнняў можна лічыць, што x^* з'яўляецца рашэннем нейкай падсістэмы лінейных ураўненняў $A_I x^* = b_I$. Па правілу Крамера існуе такое рашэнне гэтай сістэмы, кожная ненулявая кампанента якога вылічваецца па правілу $x_j^* = \det B^{(j)} / \det B$, дзе $B^{(j)}$ — нейкая квадратная падматрыца матрыцы $[A_I, b_I]$, а B — нявыраджаная квадратная падматрыца матрыцы A_I. Паколькі $|\det B| \le \Delta(A)$, то (1.5.45) выконваецца. Далей з няроўнасці

$$|x_j^*| \le |\det B^{(j)}| \le \Delta([A,b])$$

адразу вынікае, што $\|x^*\| \le \sqrt{n}\Delta([A,b])$. □

Няхай $\epsilon > 0$. Вектар $\tilde{x}$ называецца *ϵ-прыблізным рашэнем СЛН $Ax \le b$*, калі ен парушае кожную няроўнасць не больш чым на ϵ, г. зн., калі выконваюцца няроўнасці:

$$A_i \tilde{x} \le b_i + \epsilon\,, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.5.46}$$

Тэарэма 1.5.2 *Калі СЛН $Ax \le b$ мае ϵ_1-прыблізнае рашэнне, дзе*

$$\epsilon_1 = \frac{1}{(n+2)\Delta(A))}, \tag{1.5.47}$$

то яна з'яўляецца сумеснай і мае дакладнае рашэнне x^*.

```
refine(m, n, A, b, x̃, x̄)
{
  for (; ; ) {
    I := I(x̃, ε₁) =def {i ∈ N_m : |A_i x̃ − b_i| ≤ ε₁} ;
    знаходзім рашэнне x̄ сістэмы ўраўненняў A_I x = b_I;
    I^>(x̄) := {i ∈ N_m \ I : A_i x̄ > b_i};
    if (I^>(x̄) = ∅) return x̄;
    τ := min{(b_i − A_i x̃)/(A_i x̄ − A_i x̃) : i ∈ I^>(x̄)};
    x̃ := (1 − τ)x̃ + τx̄;
  }
}
```

Рис. 1.4: Працэдура *refine*.

Доказ. Дапусцім, што СЛН (1.5.46) несумесна. Разгледзім задачу лінейнага праграмавання

$$\max\{-\epsilon : Ax \le b + \epsilon\,\mathrm{e}\}.$$

Яна мае аптымальнае рашэнне (x^*, ϵ^*). Лік ϵ^* называецца *мерай несумеснасці СЛН.* Зразумела, што $\epsilon^* > 0$. З (1.5.45) маем $\epsilon^* = \frac{t}{s} \ge \frac{1}{s} \ge \frac{1}{\Delta([A,-\mathrm{e}])}$. Па правілу раскладу дэтэрміната па слупку з улікам таго, што кожная квадратная падматрыца матрыцы $[A, -e]$ мае не больш чым $n+1$ радок, маем $\Delta([A,-\mathrm{e}]) \le (n+1)\Delta(A)$. Адкуль вынікае, што $\epsilon^* > \epsilon_1$. А гэта супярэчыць азначэнню ϵ^*. □

Заўвага 1.5.1 *Паколькі СЛУ $Ax = b$ можа быць запісана як СЛН $Ax \le b$, $-Ax \le -b$, то з існавання ϵ_1-прыблізнага рашэння x^0 СЛУ, г.зн.*

$$|A_i x - b_i| \le \epsilon_1, \quad i = 1, \ldots, m,$$

вынікае існаванне яе дакладнага рашэння.

Тэарэма 1.5.3 *Працэдура refine, прыведзеная на мал. 1.4, пераўтварае ϵ_1-прыблізнае рашэнне $\tilde{x}$ СЛН $Ax \le b$ у дакладнае рашэнне $\overline{x}$ за час $O(n^2 m)$.*

Доказ. З апісання алгарытма бачна, што I есць мноства тых няроўнасцей, якія ў кропцы $\tilde{x}$ выконваюцца "амаль як роўнасці". Таму сістэма $A_I x = b_I$ мае дакладнае рашэнне $\overline{x}$ (гл. заўвагу 1.5.1). Калі $\overline{x}$ будзе задавальняць і застаўшымся няроўнасцям $i \in N_m \setminus I$,то $\overline{x}$ — дакладнае рашэнне сістэмы $Ax \le b$. У адваротным выпадку разгледзім адрэзак $[\tilde{x}, \overline{x}] = \{x(t) = (1-t)\tilde{x} + t\overline{x} : 0 \le t \le 1\}$, які злучае дзве вядомыя нам кропкі $\tilde{x}$ і $\overline{x}$ (гл. мал. 1.5). Для любой кропкі $x(t)$ гэтага адрэзка маем

$$|A_i x(t) - b_i| \le \epsilon_1 \text{ для } i \in I \quad \text{і} \quad A_i x(t) \le b_i \text{ для } i \in N_m \setminus (I \cup I^>(\overline{x})).$$

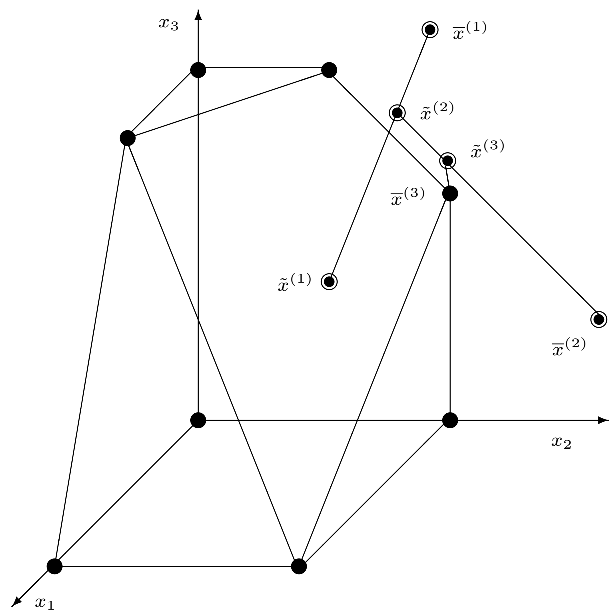


Рис. 1.5: Ілюстрацыя да доказу тэарэмы 1.5.3

Такім чынам, на адрэзку $[\tilde{x}, \overline{x}]$ будуць выконвацца ўсе няроўнасці, акрамя $I^{>}(\overline{x})$, прычым няроўнасці I выконваюцца "амаль як роўнасці". Для няроўнасці $i \in I^{>}(\overline{x})$ маем

$$A_i x(t) - b_i = A_i \tilde{x} + t(A_i \overline{x} - A_i \tilde{x}) \leq b_i.$$

Адкуль $t \leq (b_i - A_i \tilde{x})/(A_i \overline{x} - A_i \tilde{x})$. Таму калі лік τ выбрана так, як ў алгарытме, то ў кропцы $x(\tau)$ будуць выконвацца ўсе няроўнасці з $I^{>}(\overline{x})$. Больш таго, няроўнасць $j \in I^{>}(\overline{x})$, на якой дасягаецца значэнне τ, ператворыцца ў роўнасць і на наступнай ітэрацыі дабавіцца да мноства няроўнасцей I, якія выконваюцца "амаль як роўнасці".

Няхай k есць колькасць ітэрацый алгарытма, $\tilde{x}^{(j)}$, $\overline{x}^{(j)}$, $I^{(j)}$ — вектары $\tilde{x}$, $\overline{x}$ і мноства I на пачатку ітэрацыі j. Мы даказалі справядлівасць уключэнняў

$$I^{(1)} \subset I^{(2)} \subset \ldots \subset I^{(k)}.$$

Таму $k \leq m$. Паколькі найбольш працаёмкай часткай алгарытма з'яўляецца рашэнне сістэм лінейных ураўненняў

$$A_{I^{(1)}} x = b_{I^{(1)}},\ A_{I^{(2)}} x = b_{I^{(2)}},\ \ldots,\ A_{I^{(k)}} x = b_{I^{(k)}}$$

з укладзенымі адно ў другое мноствамі радкоў, то агульная колькасць арыфметычных аперацый алгарытма абмежавана па парадку велічынёй $n^2 m$. $\square$

Лема 1.5.1 *Няхай $\epsilon \le \epsilon^1$, $\tilde{x}$ — ϵ-прыблізнае рашэнне СЛУ $Ax = b$, $c \in \mathbb{R}^n$. Тады сістэма мае такое дакладнае рашэнне $\overline{x}$, для якого выконваецца няроўнасць*

$$|^T\overline{x} - {}^T\tilde{x}| \le \epsilon n \Delta([c, A]). \tag{1.5.48}$$

Доказ. Мноства рашэнняў сістэмы $Ax = b$ ёсць афінная падпрастора $x^0 + \mathcal{N}(\mathcal{A})$, дзе $Ax^0 = b$. Калі існуе $y \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ такі, што $cy \ne 0$, то вектар

$$\overline{x} = x^0 + \frac{c^T(\tilde{x} - x^0)}{c^T y} y$$

таксама з'яўляецца рашэннем сістэмы $Ax = b$ і $c^T\overline{x} = c^T\tilde{x}$. Таму ў гэтым выпадку (1.5.48) выконваецца.

У выпадку, калі $cy = 0$ для ўсіх $y \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$, пакладзем $\overline{x} = x^0$. Так як вектар c належыць лінейнай прасторы $\mathcal{R}(\mathcal{A}^T)$, то

$$c^T = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i.$$

Адкуль

$$c^T\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i \overline{x}_i \quad \text{i} \quad c^T\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i \tilde{x}_i.$$

Адымем ад першай роўнасці другую

$$c^T\overline{x} - c^T\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i \overline{x}_i - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - A_i \tilde{x}_i)$$

Па тэарэме 1.5.43 маем, што $|\lambda_i| \le \Delta([c, A])$. Можна лічыць таксама, што колькасць ненулявых кампанент вектара λ не большая за n. Адкуль вынікае

$$|c^T\overline{x} - c^T\tilde{x}| \le \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i||b_i - A_i\tilde{x}_i| \le \epsilon n \Delta([c, A]).$$

□

Заўвага 1.5.2 *Як гэта вынікае з доказу лемы 1.5.1, кропку $\overline{x}$ можна знайсці наступным чынам. Рашаем СЛУ $Ax = b$. Калі яе рашэнне $\overline{x}$ задавальняе (1.5.48), то на гэтым заканчваем. Інакш, у якасці $\overline{x}$ бярэм рашэнне СЛУ $Ax = b$, $c^T x = c^T\tilde{x}$.*

Разгледзім цяпер задачу ЛП (1.5.43). Азначым яе *ϵ-аптымальнае рашэнне* $\tilde{x}$ як ϵ-прыблізнае рашэнне СЛН $Ax \le b$, для якога выконваецца няроўнасць

$$c^T\tilde{x} \ge c^T x^* - \epsilon\,, \tag{1.5.49}$$

дзе x^* — аптымальнае рашэнне задачы ЛП (1.5.43).

Тэарэма 1.5.4 *Калі задача ЛП (1.5.43) мае ϵ_2-аптымальнае рашэнне $\tilde{x}$, дзе*

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2n\Delta^3([c, A])}, \tag{1.5.50}$$

то яна мае (дакладнае) аптымальнае рашэнне $\overline{x}$, якое можна знайсці працэдурай refine, выканаўшы $O(n^2m)$ арыфметычных аперацый.

Доказ. Будзем лічыць, што ў працэдуры *refine* на кожнай ітэрацыі шукаецца рашэнне $\overline{x}$ сістэмы $A_I x = b_I$, якое задавальняе ўмове (1.5.48) пры $\epsilon = \epsilon_2$ (гл. заўвагу 1.5.2). Праз не болей чым n ітэрацый, выканаўшы тыя ж $O(n^2m)$ аперацый, будзе атрымана дакладнае рашэнне $\overline{x}$ СЛН $Ax \le b$, для якога з (1.5.48) будзе вынікаць

$$\begin{aligned} c^T x^* &\ge c^T\overline{x} \ge c^T\tilde{x} - \epsilon_2 n\Delta([c, A]) \\ &= c^T\tilde{x} - \frac{1}{2\Delta^2([c, A])} \\ &> c^T x^* - \frac{1}{\Delta^2([c, A])}, \end{aligned}$$

і таму

$$c^T x^* - c^T\overline{x} < \frac{1}{\Delta^2([c, A])}. \tag{1.5.51}$$

Тут x^* — аптымальнае рашэнне задачы (1.5.43). Заўважым, што $c^T x^*$ і $c^T\overline{x}$ з'яўляюцца рацыянальнымі лікамі $\frac{t}{s}$ і $\frac{p}{q}$ з назоўнікамі $1 \le s, q \le \Delta(A)$, і калі яны адрозніваюцца, то

$$c^T x^* - c^T\overline{x} = \frac{tq - ps}{sq} \ge \frac{1}{sq} \ge \frac{1}{\Delta^2([c, A])},$$

што супярэчыць (1.5.51). Таму працэдура *refine* вяртае вектар $\overline{x}$, які з'яўляецца аптымальным рашэннем задачы ЛП. □

Наступная тэарэма з'яўляецца ўдакладненнем тэарэмы 1.5.4 на выпадак, калі прыблізнае рашэнне задачы ЛП з'яўляецца *дапушчальным* (задавальняе ўсім абмежаванням задачы). З такой сітуацыяй мы будзем сустракацца пры разглядзе метадаў унутранай кропкі.

Тэарэма 1.5.5 *Няхай* $\operatorname{rank} A = n$, $\epsilon < \frac{1}{\Delta^2(A)}$ *і $\tilde{x}$ ёсць дапушчальнае ϵ-аптымальнае рашэнне задачы ЛП (1.5.43). Тады аптымальнае рашэнне задачы (1.5.43) можна знайсці за час $O(n^2m)$ працэдурай convert_to_basis (гл. мал. 1.3).*

Доказ. За час $O(n^2m)$ працэдура *convert_to_basis*, пачынаючы з кропкі $\tilde{x}$, будуе дапушчальнае рашэнне x^0 задачы (1.5.43), такое, што $c^T x^0 \ge c^T\tilde{x}$. Няхай x^* — аптымальнае рашэнне задачы (1.5.43). Так як $\tilde{x}$ ёсць яе ϵ-прыблізнае рашэнне, то

$$c^T x^* - c^T x^0 \le c^T x^* - c^T\tilde{x} \le \epsilon < \frac{1}{\Delta^2(A)}. \tag{1.5.52}$$

Дапусцім, што $c^T x^* \neq c^T x^0$. Па тэарэме 1.5.1 можам лічыць, што $c^T x^* = \frac{t}{s}$, а $c^T x^0 = \frac{p}{q}$, дзе t, s, p, q — цэлыя лікі і $1 \leq s, q \leq \Delta(A)$. Цяпер атрымліваем няроўнасць

$$c^T x^* - c^T x^0 = \frac{t}{s} - \frac{p}{q} = \frac{tq - ps}{sq} \geq \frac{1}{sq} \geq \frac{1}{\Delta^2(A)}.$$

Так як атрыманая няроўнасць супярэчыць няроўнасці (1.5.52), то дапушчэнне аб тым, што $c^T x^* \neq c^T x^0$, было не справядлівым. □

1.6 Практыкаванні

1. Пакажыце, што кожная задача ЛП можа быць зведзена да наступнай задачы:

$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ \sum_{i=1}^{m} t_{ij} &= 1, \quad i = 1, \dots, n\,, \\ \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ijk} t_{ij} &= \lambda, \quad k = 1 \dots, q\,, \\ t_{ij} &\geq 0\,, \qquad i = 1, \dots, m\,;\ j = 1, \dots, n\,, \end{aligned} \tag{1.6.53}$$

якую даследаваў Л.В. Кантаровіч. Гэта задача дапускае наступную інтэрпрэтацыю. Маецца n варштатаў, якія могуць выконваць m заданняў, вырабляючы канечны прадукт, які складаецца з q дэталяў. Пры выкананні варштатам i задання j за адзінку часу выпрацоўваецца a_{ijk} дэталяў тыпу k ($k = 1, \dots, q$). Калі t_{ij} ёсць час працы станка i над дэталямі j, то λ — гэта колькасць выраблёных дэталяў.

2. Выкарыстоўваючы лему Фаркаша, дакажыце

Тэарэма 1.6.1 (Гордан) *Няхай $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Мае месца адна з наступных альтэрнатыў:*

а) існуе вектар $x \in \mathbb{R}^n$, што $Ax < 0$;

б) існуе ненулявы вектар $u \in \mathbb{R}^m_+$, што $u^T A = 0$.

3. Выявіце сярод наступных задач ЛП двойныя пары:

а) $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$,

б) $\max\{c^T x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$,

в) $\max\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}$,

г) $\min\{c^T x : Ax \geq b\}$,

д) $\min\{c^T x : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$,

ж) $\min\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}$.

Дакажыце эквівалентнасць усіх гэтых задач.

4. Пакажыце, што паліэдральная задача ЛП у стандартнай форме з'яўляецца прыватным выпадкам задачы паўазначанага праграмавання ў стандартнай форме.

5. Выходзячы з тэарэмы двойнасці ЛП, дакажыце наступны важны рэзультат з тэорыі матрычных гульняў.

Тэарэма 1.6.2 (фон Нейман) *Для кожнай матрыцы* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *справядліва наступная роўнасць*

$$\max_{x \in \Sigma_m} \min_{j \in N_n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = \min_{y \in \Sigma_n} \max_{i \in N_m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \, .$$

6. Функцыя $d:\ V \times V \to \mathbb{R}$ ёсць *(паў)-метрыка* на мностве $V = \{1, \ldots, n\}$, калі

a) $d(i,i) = 0$ для ўсіх $i \in V$;

b) $d(i,j) = d(j,i)$ для ўсіх $i, j \in V$;

c) $d(i,j) + d(j,k) \geq d(i,k)$ для ўсіх $i, j, k \in V$.

Метрыка d называецца *l_2-ўкладаемай са скрыўленнем* α, калі для нейкага k існуюць вектары $x^i \in \mathbb{R}^k$ $(i \in V)$ такія, што

$$d(i,j) \leq \|x^i - x^j\| \leq \alpha d(i,j) \quad \text{для ўсіх } i, j \in V.$$

6.1. Сфармулюйце задачу пошука l_2-ўлажэння метрыкі d, якое мае мінімальнае скрыўленне, як задачу паўазначанага праграмавання. *Указанне*: разгледзьце матрыцу $P = [p_{ij}] = [d_{1i}^2 + d_{1j}^2 - d_{ij}^2]$.
6.2*. Дакажыце, што любая метрыка d з'яўляецца l_2-ўкладаемай са скрыўленнем $O(\log n)$.

Глава 2

Сімплекс-метад

Сімплекс-метад (больш дакладна, розныя яго варыянты), які вынайшаў у 1949 г. Дж. Данцыг, доўгі час (да сярэдзіны 80-х гадоў) заставаўся адзіным метадам ЛП, здольным з дастатковай эфектыўнасцю рашаць практычныя задачы. Метад прымяняецца для рашэння толькі паліэдральных задач ЛП. Існуюць два галоўных варыянты метада: прамы сімплекс-метад (у далейшым проста сімплекс-метад) і двойны сімплекс-метад.

Мы будзем разглядаць задачу ЛП (1.3) у нармальнай форме. Для апісання сімплекс-метада зручна лічыць, што задача (1.3) задавальняе ўмове паўнаты ранга, г. зн. $\operatorname{rank} A = n$. Тады, відавочна, $n \le m$.

2.1 Прамы сімплекс-метад

Ідэя сімплекс-метада заключаецца ў тым, каб, пачынаючы з дадзенай вяршыні паліэдра $P_{\le}(A,b)$, рухацца ўздоўж кантаў ад вяршыні да вяршыні, з кожным крокам павялічваючы функцыю мэты. Разгледзім, што адбываецца на адной ітэрацыі сімплекс-метада. Няхай x — нейкая вяршыня паліэдра $P_{\le}(A,b)$. Для прастаты, будзем лічыць, што яна не выраджана. Тады ёй адпавядае адзінае дбм I і $x = A_I^{-1} b_I$. Няхай $u = -(A_I^{-1})^s$. Перасячэнне афіннай падпрасторы $\mathcal{A} = \{\S + \lambda\sqcap \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ з $P_{\le}(A,b)$ ёсць кант паліэдра $P_{\le}(A,b)$, а прамень $\mathcal{A}_+ = \{\S + \lambda\sqcap \,:\, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ накіраваны ўнутр паліэдра. Калі у дадатак $c^T u = -c^T A_I^{-1} \mathrm{e}_s > 0$, то u з'яўляецца напрамкам узрастання функцыі мэты. Значыць, рухаючыся ад вяршыні x па канту паліэдра (у напрамку u) да змежнай вяршыні, мы павялічым значэнне функцыі мэты.

Для больш дакладнага выкладання метада нам трэба ўвесці некалькі азначэнняў. Кожнаму базіснаму мноству I задачы (1.3) супаставім вектар $\pi^T = c^T A_I^{-1}$, які называецца *вектарам патэнцыялаў*. У далейшым лічым, што мноства $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ прадстаўляецца спісам, г. зн. што парадак запісу яго элементаў фіксаваны; праз $I[k]$ абазначаем элемент i_k. Калі $\pi \ge 0$, то базіснаму мноству I адпавядае дбр $y^I \in \mathbb{R}^m$ двойнай задачы:

$$y^I_{I[i]} = \pi_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad y^I_i = 0, \quad i \in N_m \setminus I. \tag{2.1.1}$$

```
simplex(c, A, b, I, x, π) // I — дбм
{
  B^{-1} = A_I^{-1}; x := B^{-1} b_I; π^T := c^T B^{-1};
  for (; π ∉ ℝ^n_+;) { // інакш x — аптымальнае рашэнне
    выбіраем індэкс s, такі, што π_s < 0;
    u := -B^{-1} e_s; // -u — s-ты слупок адваротнай матрыцы
    if (Au ≤ 0) return false; // ф-цыя мэты неабмежавана
    λ := min { (b_i - A_i x)/(A_i u) : i ∉ I, A_i u > 0 };
    Выбраць індэкс t, для якога дасягаецца значэнне λ;
    I[s] := t; v := A_t B^{-1}; B^{-1} := B^{-1} I(s, v)^{-1};
    x := x + λu;    // x = A_I^{-1} b_I
    π^T := π^T I(s, v)^{-1};    // π^T = c^T B^{-1}
  }
  return true;
}
```

Рис. 2.1: Сімплекс-метад

Таму ў гэтым выпадку I называецца *двойна-дапушчальным базісным мноствам (ддбм)*, а вектар $x = A_I^{-1} b_I$ называецца *двойна дапушчальным базісным рашэннем (ддбр)* задачы (1.3). Калі ж у дадатак, x ёсць дбр, то з тэарэмы аб дапаўняючай няжорсткасці вынікае, што ў такім выпадку x будзе аптымальным рашэннем задачы (1.3), а y^I — аптымальным рашэннем двойнай задачы (1.3.23).

Дэталёвае апісанне сімплекс-метада прадстаўлена на мал. 2.1. На ўваход працэдуры *simplex*, акрамя параметраў задачы (1.3), павінна падавацца дбм I. Калі задача ЛП мае аптымальнае рашэнне, то выхадзе x ёсць аптымальнае рашэнне задачы (1.3), а вектар π і мноства I прадстаўляюць рашэнне (гл. (2.1.1)) двойнай задачы.

Тэарэма 2.1.1 *Адна ітэрацыя працэдуры simplex, якая прадстаўлена на мал. 2.1, павялічвае функцыю мэты на велічыню $-\lambda\pi_s \ge 0$. Калі $\pi \ge 0$, то x — аптымальнае рашэнне задачы (1.3), а y^I — аптымальнае рашэнне двойнай задачы. У выпадку, калі $Au \le 0$, функцыя мэты задачы (1.3) неабмежавана.*

Доказ. Перш за ўсё адзначым, што калі $\pi \ge 0$, то

$$
\begin{aligned}
c^T x &= \pi^T A_I x = (y^I)^T A x = (y^I)^T b \\
&\ge \min\{b^T y : A^T y = c^T,\ y \ge 0\} \\
&= \max\{c^T x' : Ax' \le b\},
\end{aligned}
$$

і па тэарэме двойнасці x і y^I з'яўляюцца аптымальнымі рашэннямі адпаведна прамой і двойнай задач.

Разгледзім выпадак, калі $\pi_s < 0$ для нейкага s. Няхай $u = -A_I^{-1} e_s$. Адзначым, што прамень $x(\lambda) = x + \lambda u \quad (\lambda \ge 0)$ накіраваны ўздоўж канта шматгранніка $P_{\leq}(A,b)$, ці $x(\lambda) \notin P_{\leq}(A,b)$ для ўсіх $\lambda > 0$. Акрамя таго

$$c^T u = -\pi^T A_I A_I^{-1} e_s = -\pi_s > 0. \tag{2.1.2}$$

Таму $c^T(x+\lambda u) = c^T x - \lambda \pi_s$. Калі $Au \leq 0$, то для ўсіх $\lambda > 0$ маем $x(\lambda) \in P_{\leq}(A,b)$ і з (2.1.2) вынікае, што функцыя мэты задачы (1.3) неабмежавана. $\square$

Калі задача ЛП (1.3) з'яўляецца нявыраджанай, то на кожнай ітэрацыі сімплекс-метада $\lambda > 0$. Таму па тэарэме 2.1.1 кожная ітэрацыя сімплекс-метада павялічвае кошт бягучага базіснага рашэння на дадатную велічыню. А гэта азначае, што ўсе базісныя рашэнні, будуемыя сімплекс-метадам, з'яўляюцца рознымі. Так як колькасць базісных рашэнняў концая, то сімплекс-метад рашае нявыраджаную задачу ЛП за концую колькасць ітэрацый.

Прыклад 2.1.1 *Разгледзім наступную задачу:*

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \to & \max \\ -2x_1 - x_2 & \leq & -6, \\ x_1 - 2x_2 & \leq & -2, \\ x_1 - x_2 & \leq & 1, \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 14, \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 8, \\ -x_1 + x_2 & \leq & 3. \end{array}$$

Мноства абмежаванняў гэтай задачы адлюстравана на мал. 2.2.

Ніжэй мы прыводзім ітэрацыі сімплекс-метада, які пачынае працаваць з базіснага мноства $I = \{1,2\}$.

0. $I = (1,2)$, $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -2/5 & 1/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$, $\quad x^{(0)} = (2,2)^T$, $\quad \pi = (-3/5, -1/5)^T$.
1. $s = 1$, $\quad u = (2/5, 1/5)^T$, $\quad \lambda = \min\{5, 8\} = 5$, $\quad t = 3$, $\quad I = (3,2)$, $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad x^{(1)} = (4,3)^T$, $\quad \pi = (3, -2)^T$.
2. $s = 2$, $\quad u = (1,1)^T$, $\quad \lambda = \min\{1, 6\} = 1$, $\quad t = 4$, $\quad I = (3,4)$, $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, $\quad x^{(2)} = (5,4)^T$, $\quad \pi = (-1/3, 2/3)^T$.
3. $s = 1$, $\quad u = (-1/3, 2/3)^T$, $\quad \lambda = \min\{3, 4\} = 3$, $\quad t = 5$, $\quad I = (5,4)$, $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$, $\quad x^{(3)} = (4,6)^T$, $\quad \pi = (1/5, 3/5)^T$.

Так як вектар патэнцыялаў π неадмоўны, то $x = (4,6)^T$ — аптымальнае рашэнне задачы, а $y = (0,0,0,\frac{3}{5},\frac{1}{5},0)^T$ — аптымальнае рашэнне двойнай задачы. У гэтым можна таксама пераканацца, калі праверыць тэарэму двойнасці ці, альтэрнатыўна, тэарэму аб дапаўняючай няжорсткасці. $\square$

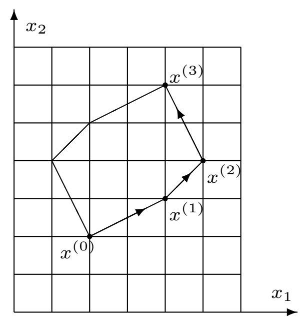


Рис. 2.2: Абмежаванні задачы ЛП з прыклада 2.1.1

2.1.1 Зацыкліванне і правіла Блэнда

У апісанні сімплекс-метада на мал. 2.1 дапускаецца неадназначнасць у выбары радка (індэкс s), які выводзіцца з базіса, а таксама ў выбары радка (індэкс t), які ўводзіцца ў базіс. Можа так здарыцца (гл. прыклад 2.1.2), што λ будзе роўным нулю. Тады на дадзенай ітэрацыі зменіцца толькі дбм I, а дбр x застанецца нязменным. Магчыма таксама, што выканаўшы нейкую паслядоўнасць ітэрацый з нязменным дбр, мы вернемся да зыходнага базіснага мноства. Такая з'ява называецца *зацыкліваннем*.

Прыклад 2.1.2 *Разгледзім наступную задачу ЛП*

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
\frac{3}{4}x_1 & - & 20x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & 6x_4 & \to & \max\\
\frac{1}{4}x_1 & - & 8x_2 & - & x_3 & + & 9x_4 & \le & 0\,,\\
\frac{1}{2}x_1 & - & 12x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 3x_4 & \le & 0\,,\\
 & & & & x_3 & & & \le & 1\,,\\
-x_1 & & & & & & & \le & 0\,,\\
 & & -x_2 & & & & & \le & 0\,,\\
 & & & & -x_3 & & & \le & 0\,,\\
 & & & & & & -x_4 & \le & 0\,.
\end{array}
$$

Пачынаючы з базіснага мноства $I = \{4,5,6,7\}$, будзем рашаць задачу сімплекс-метадам, выкарыстоўваючы наступныя правілы вырашэння неадназчанасцей:

(a) з базіса выводзіць радок $I[s]$, для якога $s \in \arg\min_{1\le i\le n} \pi_i$;

(b) у базіс уводзіць радок t, які мае мінімальны нумар сярод небазісных радкоў, на якіх дасягаецца значэнне λ.

Ніжэй мы прыводзім ітэрацыі сімплекс-метада.

1. $I = \{4, 5, 6, 7\}$,

$$B^{-1} = A_I^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$x = (0, 0, 0, 0)^T$, $\pi = (-\frac{3}{4}, 20, -\frac{1}{2}, 6)^T$.

2. $s = 1$, $u = (1, 0, 0, 0)^T$, $\lambda = 0$, $t = 1$, $I = \{1, 5, 6, 7\}$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -32 & -4 & 36 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$x = (0, 0, 0, 0)^T$, $\pi = (3, -4, -\frac{7}{2}, 33)^T$.

3. $s = 2$, $u = (32, 1, 0, 0)^T$, $\lambda = 0$, $t = 2$, $I = \{1, 2, 6, 7\}$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 8 & -84 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$x = (0, 0, 0, 0)^T$, $\pi = (1, 1, -2, 18)^T$.

4. $s = 3$, $u = (-8, -\frac{3}{8}, 1, 0)^T$, $\lambda = 0$, $t = 4$, $I = \{1, 2, 4, 7\}$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{64} & \frac{3}{16} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$x = (0, 0, 0, 0)^T$, $\pi = (-2, 3, \frac{1}{4}, -3)^T$.

5. $s = 4$, $u = (0, -\frac{3}{16}, \frac{21}{2}, 1)^T$, $\lambda = 0$, $t = 5$, $I = \{1, 2, 4, 5\}$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & -\frac{5}{2} & 56 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{16}{3} \end{bmatrix},$$

$x = (0, 0, 0, 0)^T$, $\pi = (-1, 1, -\frac{1}{2}, 16)^T$.

6. $s = 1$, $u = (0, 0, -2, -\frac{1}{3})^T$, $\lambda = 0$, $t = 6$, $I = \{6, 2, 4, 5\}$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -4 \end{bmatrix},$$

$x = (0, 0, 0, 0)^T$, $\pi = (\frac{1}{2}, -2, -\frac{7}{4}, 44)^T$.

7. $s = 2$, $u = (0, 0, 0, -\frac{1}{3})^T$, $\lambda = 0$, $t = 7$, $I = \{6, 7, 4, 5\}$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$x = (0, 0, 0, 0)^T$, $\pi = (-\frac{1}{2}, 6, -\frac{3}{4}, 20)^T$.

Пасля шасці ітэрацый мы вярнуліся да зыходнага базіснага мноства. Такім чынам, сімплекс-метад з выбраным правілам замяшчэння радкоў зацыкліваецца. □

На шчасце, існуюць іншыя правілы замяшчэння радкоў, пры якіх сімплекс-метад не зацыкліваецца. У гэтым параграфе мы разгледзім выдатнае па сваёй прастаце *правіла Блэнда*:

> сярод радкоў з адмоўным патэнцыялам з базіса выводзіць радок з найменшым нумарам; у базіс заўсёды ўводзіць радок з мінімальным нумарам, на якім дасягаецца значэнне λ (гл. апісанне алгарытма).

Тэарэма 2.1.2 *Варыянт сімплекс-метада, калі з базіса выводзіцца радок $I[s]$, дзе*

$$s = \arg\min\{I[i] \,:\, \pi_i < 0\}$$

і дабаўляецца радок

$$t = \min\left\{r \,:\, r \in \arg\min\left\{\frac{b_i - A_i x}{A_i u} \,:\, i \in N_m \setminus I\,,\, A_i u > 0\right\}\right\},$$

рашае задачу ЛП (1.3) за канцую колькасць ітэрацый.

Доказ. Абазначым праз $x^{(k)}$, $\pi^{(k)}$, $y^{(k)}$, $u^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $I^{(k)}$ адпаведна вектары x, π, $y^{\pi,I}$, u, лік λ і мноства базісных радкоў I на k-й ітэрацыі. З (2.1.2) маем

$$c^T x^{(0)} \le c^T x^{(1)} \le c^T x^{(2)} \le \ldots, \tag{2.1.3}$$

дзе $c^T x^{(k)} = c^T x^{(k+1)}$ тады і толькі тады, калі $x^{(k)} = x^{(k+1)}$ (калі $x^{(k)} \neq x^{(k+1)}$, то $\lambda^{(k)} > 0$, і таму $c^T x^{(k)} < c^T x^{(k+1)}$). Дапусцім адваротнае, што метад не зыходзіцца. Паколькі існуе толькі концая колькасць падмностваў з n радкоў матрыцы A, то знойдуцца такія k, l ($k < l$), што $I^{(k)} = I^{(l)}$. Тады $x^{(k)} = x^{(k+1)} = \ldots = x^{(l)}$. Няхай r — максімальны індэкс радка, які выдаляўся з базіса на адной з ітэрацый $k, \ldots, l$, скажам, на ітэрацыі p. Паколькі $I^{(k)} = I^{(l)}$, то радок r зноў дабаўляўся да базіса на нейкай ітэрацыі q, прычым $p < q < l$. Адсюль вынікае, што

$$\text{калі } i > r \text{ і } i \in I^{(p)}, \text{ то } i \in I^{(q)}. \tag{2.1.4}$$

З (2.1.2) маем, што $(y^{(p)})^T A u^{(q)} = c^T u^{(q)} > 0$. Такім чынам, для хаця б аднаго $i \in N_m$

$$y_i^{(p)}(A_i u^{(q)}) > 0. \tag{2.1.5}$$

Адзначым, што $i \in I^{(p)}$, інакш $y_i^{(p)} = 0$. З апісання алгарытма маем, што r ёсць мінімальны індэкс, для якога выконваецца

$$y_r^p < 0, \quad A_r u^q > 0, \quad A_r x^q = b_r. \tag{2.1.6}$$

Разгледзім наступныя выпадкі:

1) калі $i > r$, то з (2.1.4) маем $A_i u^{(q)} = 0$;

2) калі $i < r$, то з (2.1.6) вынікае, што $y_i^{(p)} \geq 0$ і $A_i u^{(q)} \leq 0$;

3) калі $i = r$, то зноў з (2.1.6) маем $y_i^{(p)} < 0, A_i u^{(q)} > 0$.

Атрыманая ва ўсіх трох магчымых выпадках супярэчнасць умове (2.1.5) гаворыць аб тым, што базісныя мноствы не паўтараюцца. Таму колькасць ітэрацый дадзенага варыянту сімплекс-метада таксама концая. □

Прыклад 2.1.3 *Вырашыць задачу ЛП з прыклада 2.1.2 варыянтам сімплекс-метада, у якім радкі замяшчаюцца па правілу Блэнда.*

Няцяжка праверыць, што мінулы раз мы адхіліліся ад правіла Блэнда толькі на 5-й ітэрацыі. Выканаем яе і ўсе астатнія ітэрацыі згодна правілу Блэнда.

5'. $s = 1$, $u = (0, -\frac{1}{16}, \frac{3}{2}, 0)^T$, $\lambda = 0$, $t = 5$, $I = \{5, 2, 4, 7\}$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$x = (0, 0, 0, 0)^T$, $\pi = (32, -1, -\frac{5}{4}, 3)^T$.

6'. $s = 2$, $u = (0, 0, 2, 0)^T$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $t = 3$, $I = \{5, 3, 4, 7\}$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$x = (0, 0, 1, 0)^T$, $\pi = (20, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 6)^T$.

7'. $s = 3$, $u = (1,0,0,0)^T$, $\lambda = 1$, $t = 2$, $I = \{5,3,2,7\}$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$x = (1,0,1,0)^T$, $\pi = (2, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{21}{2})^T$.

Так як усе патэнцыялы неадмоўныя, то $x = (1,0,1,0)^T$ — аптымальнае рашэнне задачы. □

2.1.2 Як знайсці пачатковую вяршыню

Любая задача лінейнага праграмавання можа быць прадстаўлена ў выглядзе

$$\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\}. \tag{2.1.7}$$

Разаб'ем СЛН $Ax \le b$ на дзве часткі: $\overline{A}x \le \overline{b}$, $\tilde{A}x \ge \tilde{b}$, дзе $\overline{b} \ge 0$, $\tilde{b} > 0$. Разгледзім задачу

$$\max\{\overset{T}{\mathrm{e}}(\tilde{A}x - s) : \overline{A}x \le \overline{b};\ \tilde{A}x - s \le \tilde{b};\ x, s \ge 0\}, \tag{2.1.8}$$

тут s — вектар новых зменных. Тады $x = 0$, $s = 0$ ёсць дбр задачы (2.1.8). Рашаем задачу (2.1.8) сімплекс-метадам. Калі велічыня максімума будзе роўна $\mathrm{e}\tilde{b}$, а (x^*, s) — аптымальнае рашэнне, то x^* — дбр (2.1.7). Калі ж максімум у задачы (2.1.8) меншы чым $\mathrm{e}^T\tilde{b}$, то задача (2.1.7) не мае дапушчальных рашэнняў.

2.2 Двойны сімплекс-метад

Існуе другі варыянт сімплекс-метада, які называецца *двойным сімплекс-метадам* у адрозненне ад разгледжанага раней прамога сімплекс-метада. Можна лічыць, што двойны сімплекс-метад — гэта прамы сімплекс-метад, дастасаваны да двойнай задачы. Двойны сімплекс-метад прадстаўлены на мал. 2.3. Працэдура *separate* вяртае нумар абмежавання, якое парушаецца ў дадзенай кропцы $x \in \mathbb{R}^n$. Калі ўсе абмежаванні выконваюцца, *separate* вяртае значэнне 0. Акрамя параметраў задачы на ўваход працэдуры *dual_simplex* падаецца ддбм I. Карэктнасць двойнага сімплекс-метаду вынікае з наступнай тэарэмы.

Тэарэма 2.2.1 *Адна ітэрацыя працэдуры dual_simplex, якая прадстаўленая на мал. 2.3, павялічвае кошт двойнай функцыі мэты на велічыню* $\lambda(b_s - A_s x) \le 0$. *Калі* x *— дапушчальнае рашэнне задачы (1.3), то яно з'яўляецца аптымальным, а* y^I *з'яўляецца аптымальным рашэннем двойнай задачы. У выпадку, калі* $u \le 0$, *задача (1.3) не мае дапушчальных рашэнняў.*

Доказ. Няхай x, π, I і x', π', I' – адпаведна ддбр, вектар патэнцыялаў і базіснае мноства ў пачатку і канцы нейкай ітэрацыі. Тады, так як $\pi_t - \lambda u_t = 0$, $u^T = A_s A_I^{-1}$ і $A_I^{-1} b_I = x$, маем

$$\begin{aligned} b^T y^{I'} = b^T_{I'} \pi' &= \sum_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus t} b_{I[i]}(\pi_i - \lambda u_i) + \lambda b_s \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{I[i]}(\pi_i - \lambda u_i) + \lambda b_s \\ &= \pi^T b_I - \lambda u^T b_I + \lambda b_s \\ &= \pi^T b_I - \lambda A_s A_I^{-1} b_I + \lambda b_s \\ &= b^T y^I + \lambda (b_s - A_s x). \end{aligned}$$

Калі x – дапушчальнае рашэнне, то $c^T x = c^T A_I^{-1} b_I = \pi^T b_I = b^T y^I$ і па тэарэме аб дапаўняючай няжорсткасці x з'яўляюцца аптымальным рашэннем прамой, а y^I — двойнай задачы.

Разгледзім цяпер выпадак, калі $u \le 0$. Азначым вектар $y \in \mathbb{R}^m$ з каардынатамі

$$y_s = 1;\ y_{I[i]} = -u_i,\ i = 1, \ldots, n;\ y_i = 0,\ i \in N_m \setminus (I \cup s).$$

Тады

$$\begin{aligned} y^T A = -u A_I + A_s &= -A_s A_I^{-1} A_I + A_s = 0, \\ y^T b = -u b_I + b_s &= -A_s A_I^{-1} b_I + b_s = -A_s x + b_s < 0. \end{aligned}$$

Па леме Фаркаша 1.3.1 мы робім выснову, што СЛН $Ax \le b$ не мае дапушчальных рашэнняў. □

Можна таксама прывесці прыклад задачы ЛП і правіла замяшчэння радкоў у двойным сімплекс-метадзе, калі ён зацыкліваецца. Наступная тэарэма ўказвае адно вельмі простае правіла вырашэння неадназначнасцяў у двойным сімплекс-метадзе (*двойнае правіла Блэнда*):

> у базіс уводзіць парушаемае абмежаванне з мінімальным нумарам; з базіса выводзіць абмежаванне, якое мае мінімальны нумар сярод абмежаванняў, на якіх дасягаецца значэнне λ.

Тэарэма 2.2.2 *Варыянт двойнага сімплекс-метада, калі ў базіс уводзіцца парушаемае абмежаванне з мінімальным нумарам* $s = \min\{i \,:\, i \in N_m \setminus I,\ A_i x > b_i\}$ *і выдаляецца абмежаванне* $I[t]$, *дзе*

$$t = \operatorname{argmin}\{I[i] \,:\, i \in \operatorname{argmin}\{\pi_i/u_i \,:\, i = 1, \ldots, n\,,\ u_i > 0\}\}\ ,$$

рашае задачу ЛП (1.3) за канцую колькасць ітэрацый.

Доказ гэтай тэарэмы мы пакідаем чытачу ў якасці практыкавання. □

```
dual_simplex(c, A, b, I, x, π); // I — ддбм
{
  B^{-1} := A_I^{-1}; π^T := c^T B^{-1}; x := B^{-1} b_I;
  for (; (s := separate(x)) ≠ 0;) {
    u^T := A_s B^{-1}; // u^T ёсць A_s запісаны ў базісе A_I
    if (u ≤ 0) return false; // няма дапушч. рашэнняў
    λ := min{π_i/u_i : i = 1, ..., n; u_i > 0}; (*)
    Выбраць індэкс t, для якога гэты мінімум дасягаецца;
    I[t] := s;
    π := π − λu; π_t := λ;   // знаходзім π^T = c^T A_I^{-1}
    B^{-1} := B^{-1} I(t, u)^{-1};   // вылічваем A_I^{-1}
    x := x + (b_s − A_s x) B^{-1} e_t;    // вылічваем x = B^{-1} b_I
  }
return true;
}
```

Рис. 2.3: Двойны сімплекс-метад

2.2.1 Зацыкліванне і лексікаграфічнае правіла

Перш чым приступіць да апісання яшчэ аднага правіла барацьбы з зацыкліваннем нам трэба ўвесці некалькі азначэнняў. Ненулявы вектар $x \in \mathbb{R}^n$ называецца *лексікаграфічна дадатным*, калі першая яго ненулявая кампанента дадатная. Калі $-x$ лексікаграфічна дадатны, то x называецца *лексікаграфічна адмоўным.* Калі $x = 0$, то гавораць, што x *лексікаграфічна роўны нулю.*

Няхай $x, y \in \mathbb{R}^n$. Калі вектар $x - y$ з'яўляецца лексікаграфічна дадатным, то будзем казаць, што вектар x *лексікаграфічна большы* за вектар y (і пісаць $x \overset{\text{lex}}{\succ} y$). Аналагічна, калі $x - y$ лексікаграфічна адмоўны, то кажуць, што x *лексікаграфічна меншы* за вектар y (і пісаць $x \overset{\text{lex}}{\prec} y$). Калі ж $x = y$, то вектары таксама *лексікаграфічна роўныя.* Зразумелым чынам уводзяцца паняцці *лексікаграфічна не меншы* ($\overset{\text{lex}}{\succeq}$) і *лексікаграфічна не большы* ($\overset{\text{lex}}{\preceq}$).

Прыклад 2.2.1

$$
\begin{aligned}
(0, 1, 0, 2) &\overset{\text{lex}}{\succ} (0, 0, 10, 3)\,, \\
(1, 3, 1, 2)^T &\overset{\text{lex}}{\prec} (2, 8, -5, 3)\,.
\end{aligned}
$$

□

Так як дачыненне лексікаграфічнага ўпарадкавання $\overset{\text{lex}}{\preceq}$ задае лінейны парадак на $\mathbb{R}^n$, то сярод концай колькасці вектароў $x^1, \ldots, x^k$ можна аднаначна вызначыць *лексікаграфічна мінімальны* (lexmin) і *лексікаграфічна максімальны* (lexmax).

Прыклад 2.2.2 *Калі*

$$x^1 = (0, 2, 8, 2)^T, \qquad x^2 = (0, 0, 10, 3)\,,$$
$$x^3 = (-4, 3, 8, 1)^T, \qquad x^4 = (0, 2, 9, 6)^T,$$

то $\operatorname{lexmin}\{x^1, x^2, x^3, x^4\} = x^3$, $\operatorname{lexmax}\{x^1, x^2, x^3, x^4\} = x^4$.

□

Тэарэма 2.2.3 *Няхай у пачатку двойнага сімплекс-метада ўсе слупкі матрыцы*

$$A(I) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} c^T \\ A \end{bmatrix} A_I^{-1}$$

лексікаграфічна дадатныя. Тады на працягу ўсяго алгарытма слупкі матрыцы $A(I)$ застаюцца лексікаграфічна дадатнымі, вектар невязак

$$r(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -c^T x \\ b - Ax \end{pmatrix}$$

строга лексікаграфічна ўзрастае ад ітэрацыі да ітэрацыі і метад спыняецца пасля концай колькасці ітэрацый, калі выбіраць радок для вывада з базіса па наступнаму правілу:

$$t \in \arg\operatorname{lexmin}\left\{ \frac{A(I)^j}{u_j} \; : \; u_j > 0, \; j = 1, \ldots, n \right\}. \tag{2.2.9}$$

Доказ. Дапусцім, што ў пачатку чарговай ітэрацыі ўсе пасылкі тэарэмы выконваюцца. Пакажам, што яны будуць выконвацца і пасля яе завяршэння. Няхай $\overline{I}$ і $\hat{I}$ ёсць базісныя мноствы, адпаведна, ў пачатку і пасля завяршэння ітэрацыі. Для зручнасці ўвядзем абазначэнні:

$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} A(\overline{I}), \quad \overline{x} \overset{\text{def}}{=} A_{\overline{I}}^{-1} b_{\overline{I}},$$
$$\hat{A} \overset{\text{def}}{=} A(\hat{I}), \quad \hat{x} \overset{\text{def}}{=} A_{\hat{I}}^{-1} b_{\hat{I}},$$

Зазначым, што $A_{\hat{I}}^{-1} = A_{\overline{I}}^{-1} I(t, u)^{-1}$, дзе $u = A_s A_{\overline{I}}^{-1}$. Так як па допушчэнню $\overline{A}^t \overset{\text{lex}}{\succ} 0$, то $\hat{A}^t = \overline{A}^t / u_t \overset{\text{lex}}{\succ} 0$. Калі $j \neq t$ і $u_j > 0$, то

$$\hat{A}^j = \overline{A}^j - \frac{u_j \overline{A}^t}{u_t} = u_j \left(\frac{\overline{A}^j}{u_j} - \frac{\overline{A}^t}{u_t} \right) \overset{\text{lex}}{\succ} 0$$

згодна з лексікаграфічным выбарам і так як $\operatorname{rank} A = n$. Калі ж $j \neq t$ і $u_j \leq 0$, то

$$\hat{A}^j = \overline{A}^j - \frac{u_j \overline{A}^j}{u_t} = \overline{A}^j + \frac{|u_j| \overline{A}^j}{u_t} \overset{\text{lex}}{\succeq} \overline{A}^j \overset{\text{lex}}{\succ} 0.$$

I нарэшце, так як $\overline{b}_s < 0$ і $\overline{A}^t \overset{\text{lex}}{\succ} 0$, атрымліваем

$$r(\hat{x}) = r(\overline{x}) + (r(\hat{x}) - r(\overline{x})) = r(\overline{x}) - \frac{r(\overline{x})_s \overline{A}^t}{u_t} = r(\overline{x}) + \frac{|r(\overline{x})_s| \overline{A}^t}{u_t} \overset{\text{lex}}{\succ} r(\overline{x}).$$

Такім чынам, вектар невязак $r(x)$ строга лексікаграфічна ўзрастае пасля кожнай ітэрацыі. І так як ён цалкам вызначаецца па базіснаму мноству, то адсюль адразу вынікае, што ніякае базіснае мноства не можа сустрэцца двойчы. Гэта азначае, што двойны сімплекс-метад спыняецца пасля концай колькасці ітэрацый. □

2.2.2 Як знайсці двойна дапушчальнае базіснае рашэнне

На практыцы вельмі часта задача ЛП задаецца ў наступным выглядзе

$$\max\{c^T x : \ b^1 \le Ax \le b^2, \ d^1 \le x \le d^2\}, \tag{2.2.10}$$

дзе $c, x, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$, $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Працэдуру *dual-simplex* лёгка мадыфікаваць для рашэння задачы (2.2.10). Для гэтага занумаруем няроўнасці наступным чынам:

$$\begin{aligned} A_i x \le b_i^2 &\quad \text{— праз} \quad i, \\ -A_i x \le -b_i^1 &\quad \text{— праз} \quad -i, \\ x_i \le d_i^2 &\quad \text{— праз} \quad m+i, \\ -x_i \le -d_i^1 &\quad \text{— праз} \quad -m-i. \end{aligned}$$

Тады $A_{-i} = -A_i$, $b_{-i} = -b_i^1$, а $A_{m+i} = \mathrm{e}_i$, $b_{m+i} = d_i^2$, $A_{-m-i} = -\mathrm{e}_i$, $b_{-m-i} = -d_i^1$. Зразумела, што радкі i і $-i$ не могуць адначасова ўваходзіць у базіс.

Акрамя таго, вельмі лёгка знайсці ддбр задачы (2.2.10), так як такімі з'яўляюцца аптымальныя рашэнні задачы

$$\max\{c^T x \ : \ d^1 \le x \le d^2\}.$$

Напрыклад, можна ўзяць кропку x^0 з каардынатамі:

$$x_i^0 = \begin{cases} d_i^2, & \text{калі } c_i \ge 0, \\ d_i^1, & \text{калі } c_i < 0. \end{cases}$$

Зазначым, што кропцы x^0 адпавядае базіснае мноства $I = \{m+i \ : \ c_i \ge 0\} \cup \{-m-i \ : \ c_i < 0\}$. Няцяжка таксама пераканацца (зрабіце гэта), што базіснае мноства I задавальняе ўсім пасылкам тэарэмы 2.2.3. Двойны сімплекс-метад рашэння задачы ЛП (1.3) можна трактаваць як *метад адсячэнняў*. Ідэю метада адсячэнняў праілюструем на наступным прыкладзе.

Прыклад 2.2.3 *Вырашыць наступную задачу*

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \to & \max \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4, \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\ -2x_1 & - & x_2 & \leq & -2, \\ & & 0 \leq x_1 \leq 3, & & \\ & & 0 \leq x_2 \leq 3, & & \end{array} \tag{2.2.11}$$

Мы пачынаем рашаць гэтую задачу з ддбр $x^{(0)} = (3,3)^T$, на якім дасягаецца максімум функцыі мэты на паралелепіпедзе

$$P_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x_1\,,\ x_2 \leq 3\}.$$

Яму адпавядаюць базіснае мноства $I = \{4,5\}$, адзінкавая базісная матрыца $B = A_I = I$ і вектар патэнцыялаў $\pi = (1,2)^T$. Ніжэй мы прыводзім ітэрацыі двойнага сімплекс-метада і даем ім геаметрычную інтэрпрэтацыю (гл. мал. 2.4).

1. Так як кропка $x^{(0)}$ не задавальняе 1-му абмежаванню задачы, то "адсякаем"яе ад паралелепіпеда P_0 гіперплоскасцю $x_1 + x_2 = 4$ (мал. 2.4 (b)). Пасля гэтага выконваем ітэрацыю двойнага сімплекс-метада:

   $$s = 1, \quad u = (1,1)^T, \quad \lambda = \min\{1,2\} = 1, \quad t = 1, \quad I = (1,5),$$

   $$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Зазначым, што ў кропцы $x^{(1)}$ функцыі мэты дасягае максімума на шматгранніку

   $$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x_1\,,\ x_2 \leq 3\,,\ x_1 + x_2 \leq 4\}.$$

2. Так як кропка $x^{(1)}$ ўсё яшчэ не з'яўляецца дапушчальнай для задачы (2.2.11), адсякаем яе ад P_1 з дапамогай гіперплоскасці $-x_1 + x_2 = 1$ (мал. 2.4 (c)). Выконваем ітэрацыю двойнага сімплекс-метада:

   $$s = 2, \quad u = (-1,2)^T, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad t = 2, \quad I = (1,2),$$

   $$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \pi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Няцяжка праверыць, што на $x^{(2)}$ дасягаецца максімум функцыі мэты на шматгранніку

   $$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x_1\,,\ x_2 \leq 3\,,\ x_1 + x_2 \leq 4\,,\ -x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

   Так як $x^{(2)}$ з'яўляецца вяршыняй шматгранніка P абмежаванняў задачы (2.2.11) і $P \subseteq P_2$, то $x^{(2)}$ — аптымальнае рашэнне задачы (2.2.11).

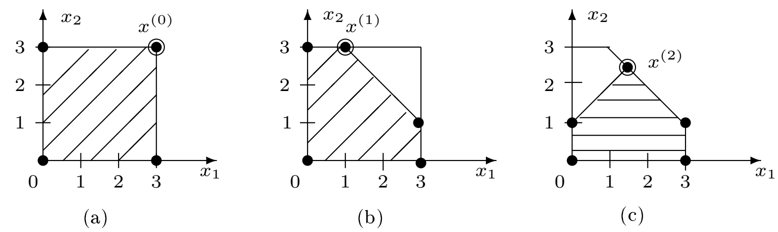


Рис. 2.4: Інтэрпрэтацыя двойнага сімплекс-метада як метада адсячэнняў

2.2.3 Дабаўленне новых абмежаванняў і змяненне правай часткі

Дапусцім, што мы вырашылі задачу ЛП (1.3). Цяпер мы хочам дабавіць яшчэ адно абмежаванне $ax \le \beta$. Інакш кажучы, мы хочам вырашыць наступную задачу

$$\max\{c^T x : \; Ax \le b, \; ax \le \beta\}. \tag{2.2.12}$$

Так як аптымальнае рашэнне x^* задачы (1.3) з'яўляецца двойна дапушчальным для задачы (2.2.12), то мы можам рашаць задачу (2.2.12) двойным сімплекс-метадам, пачынаючы з x^*.

Двойны сімплекс-метад можа таксама прымяняцца тады, калі пасля рашэння задачы (1.3) мы мяняем вектар b на іншы вектар b'. Калі змены невялікія, то можна чакаць, што новае аптымальнае рашэнне мала адрозніваецца ад старога. Калі I — аптымальнае базіснае мноства, то I будзе з'яўляцца двойна-дапушчальным базісным мноствам новай задачы, што зноў дазваляе выкарыстаць яго ў якасці пачатковага для двойнага сімплекс-метада.

2.3 Прыклады Клі і Мінці

У гэтым параграфе мы прадставім простыя аргументы, якія належаць Клі і Мінці[1] і вызначаюць, што існуюць "дрэнныя"прыклады задач ЛП, на якіх сімплекс-метад выконвае экспаненцыяльную па n, m колькасць ітэрацый. Іншымі словамі, сімплекс-метад не з'яўляецца палінаміяльным алгарытмам ЛП.

Абазначым праз $S(n,m)$ максімальную колькасць ітэрацый сімплекс-метада для задачы памеру (n,m). Дапусцім, што такую колькасць ітэрацый сімплекс-метад выконвае, калі ён рашае задачу

$$\max_{x \in P} x_n \,,$$

дзе P — нейкі n-мерны шматграннік, які задаецца m няроўнасцямі. Тады ў P маецца паслядоўнасць $v^0, v^1, \ldots, v^k$, дзе $k = S(n,m)$, змежных вяршынь,

[1] V. Klee, G.J. Minty. How good is the simplex method? pp. 159-175 in Inequalities III., ed. O. Shisha. – New York: Academic Press, Inc., 1972.

такая, што

$$v_n^0 < v_n^1 < \ldots < v_n^k$$

(гл. левую частку мал. 2.3). Дабавім яшчэ адну новую "вертыкальную"каардынату x_{n+1} і разгледзім у прасторы $\mathbb{R}^{n+1}$ тыя ж самыя абмежаванні, якія апісваюць шматграннік P. Паколькі ў гэтыя абмежаванні зменная x_{n+1} не ўваходзіць, то мноства рашэнняў атрыманай сістэмы няроўнасцей будзе ўяўляць сабою шматгранны цыліндр з сячэннем P у гарызантальнай плоскасці $x_{n+1} = \mathrm{const}$ і вертыкальнымі ўтвараючымі — паралельнымі восі x_{n+1} прамымі, праходзячымі праз вяршыні P (правая частка мал. 2.3). Разгледзім цяпер шматграннік Q, які апісваецца тымі ж няроўнасцямі, што і P, і дзвумя новымі — $x_{n+1} \geq x_n$ і $x_{n+1} \leq B - x_n$, дзе лік B выбіраецца такім чынам, каб гіперплоскасці $x_{n+1} = x_n$ і $x_{n+1} = B - x_n$ не перасякаліся ў цыліндры. На мал. 2.3 шматграннік Q уяўляе сабою частку цыліндра, заключаную паміж дзвумя нахіленымі ў розныя бакі асновамі. Пры гэтым кожнай вяршыні v^i шматгранніка P адпавядаюць дзве вяршыні u^i і w^i шматгранніка Q, першая з якіх ляжыць на ніжняй аснове, а другая — на верхняй. Зразумела, што ўздоўж паслядоўнасці вяршынь

$$u^0, u^1, \ldots, u^k, w^k, \ldots, w^1, w^0$$

каардыната x_{n+1} узрастае. Таму

$$S(n+1, m+2) \geq 2(S(n,m)+1).$$

З улікам таго, што для рашэння задачы ЛП на аднамерным адрэзку патрэбен адзін крок, маем $S(1,2) = 1$. Тады $S(2,4) \geq 3$, $S(3,6) \geq 7$ і наогул

$$S(n, 2n) \geq 2^n - 1.$$

Цікава зазначыць, што ў разгледжанай індуктыўнай пабудове "дрэннага"шматгранніка няроўнасці $x_{n+1} = x_n$ і $x_{n+1} = B - x_n$ можна замяніць на няроўнасці $x_{n+1} \geq \epsilon$ і $x_{n+1} \leq 1 - \epsilon x_n$, дзе $\epsilon \in (0, 1/2)$. Калі цяпер пачаць індукцыю з адрэзка $[0,1]$, то атрымаем наступнае лінейнае апісанне "дрэннага"шматгранніка P_ϵ:

$$\begin{array}{lllll}
0 & \leq & x_1 & \leq & 1, \\
\epsilon x_1 & \leq & x_2 & \leq & 1 - \epsilon x_1\,, \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
\epsilon x_{i-1} & \leq & x_i & \leq & 1 - \epsilon x_{i-1}\,, \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
\epsilon x_{n-1} & \leq & x_n & \leq & 1 - \epsilon x_{n-1}\,.
\end{array}$$

Зазначым, што $P_0 = [0,1]^n$ і для малых ϵ, шматграннік P_ϵ атрымліваецца з куба $[0,1]^n$ нязначнай яго дэфармацыяй. На мал. 2.3 адлюстраваны трохмерны шматграннік P_ϵ і таксама ўказаны шлях, праходзячы па ўсх $2^3 = 8$ яго вяршынях, уздоўж якога ўвесь час расце каардыната x_3.

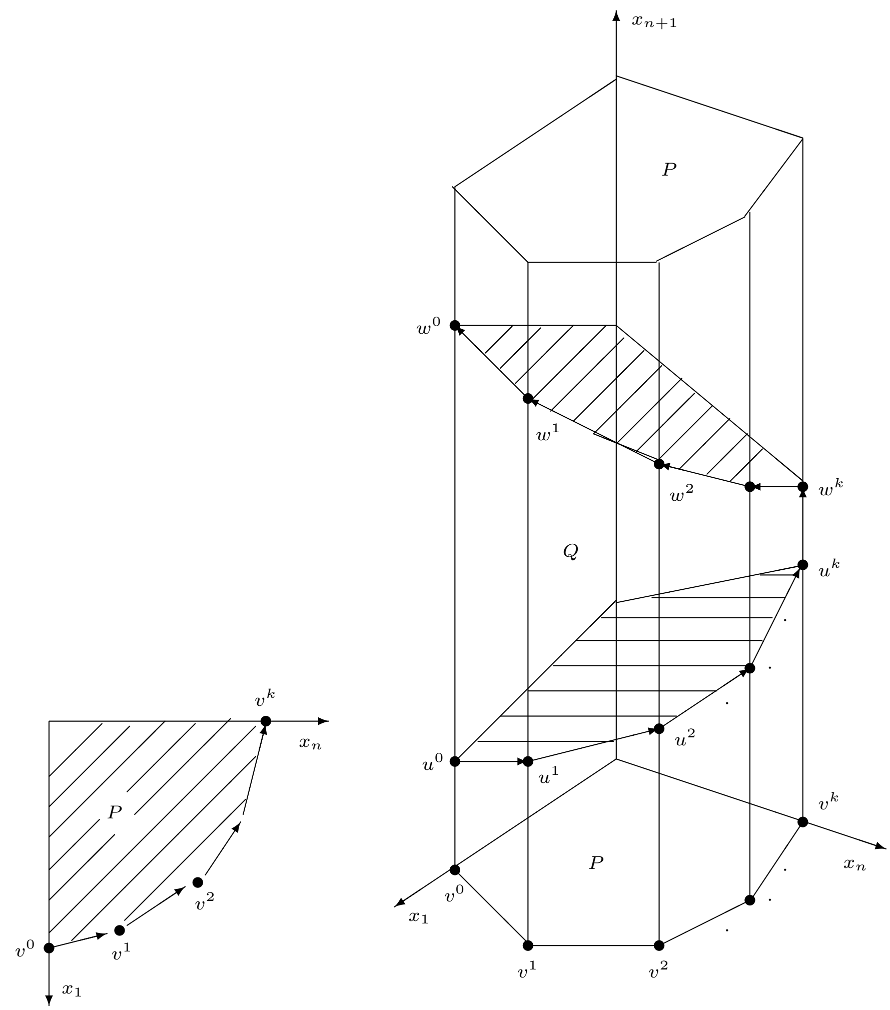


Рис. 2.5: "Дрэнны"прыклад задачы ЛП

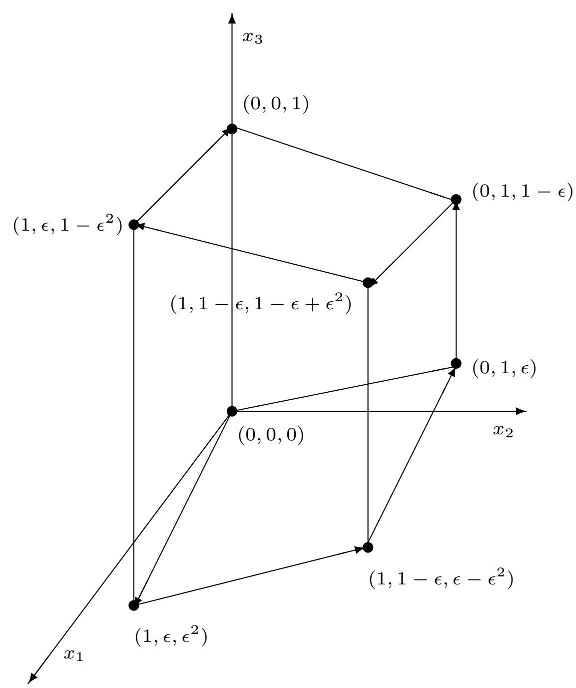


Рис. 2.6: Клі-Мінці куб

У чытача можа ўзнікнуць пытанне: чаму сімплекс-метад павінен адпраўляцца ў доўгі шлях $u^0, u^1, \ldots, u^k, w^k, \ldots, w^1, w^0$ (гл. мал. 2.3), калі маецца магчымасць дасягнуць оптымума ўсяго за адзін крок пераходам па рабру u^0, w^0? Адказ залежыць ад таго, якое правіла замяшчэння радкоў прынята ў канкрэтным варыянце сімплекс-метада. Няцяжка паказаць, што пры рашэнні задачы ЛП

$$\max_{x \in P_\epsilon} x_n\,,$$

пачынаючы з вяршыні $(0,0,\ldots,0)$, сімплекс-метад накіруецца ў далёкі шлях па ўсіх 2^n вяршынях шматгранніка P_ϵ, калі з базіса выдаляецца радок з найменшым патэнцыялам (правіла *найменшы адмоўны*), або радок з найменшым нумарам сярод радкоў з адмоўным патэнцыялам (правіла *першы падыходзячы*). Трэба таксама зазначыць, што прыклады з экспаненцыяльнай колькасцю ітэрацый пабудаваны і для амаль што ўсіх іншых вядомых варыянтаў сімплекс-метада. Таму магчымасць пабудовы сімплекс-метада з палінаміяльнай па n, m колькасцю ітэрацый ацэньваецца даволі песімістычна.

2.4 Практыкаванні

1. Дакажыце тэарэму 2.2.2.

2. Вырашыце наступныя задачы ЛП прамым сімплекс-метадам:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
5x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & \to & \max\\
x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \le & 3,\\
-x_1 & & & + & x_3 & \le & 2,\\
2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \le & 4,\\
2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \le & 2,\\
\multicolumn{7}{c}{x_1,\, x_2,\, x_3\, \ge 0\,;}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \to & \max\\
2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \le & 10,\\
3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \le & 10,\\
x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \le & 10,\\
\multicolumn{7}{c}{x_1,\, x_2,\, x_3\, \ge 0\,;}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & \to & \max\\
x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \le & 4,\\
4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \le & 3,\\
2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \le & 5,\\
3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \le & 1,\\
\multicolumn{11}{c}{x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5\, \ge 0\,.}
\end{array}$$

3. Вырашыце наступныя задачы ЛП двойным сімплекс-метадам:

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & - & 2x_2 & \to & \max \\ -3x_1 & + & x_2 & \leq & -1, \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1, \\ -2x_1 & + & 7x_2 & \leq & 6, \\ 9x_1 & - & 4x_2 & \leq & 6, \\ -5x_1 & + & 2x_2 & \leq & -3, \\ 7x_1 & - & 3x_2 & \leq & 6, \\ \multicolumn{5}{c}{x_1,\, x_2 \geq 0\,;} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \to & \max \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4, \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 0, \\ \multicolumn{7}{c}{x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0\,;} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \to & \max \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 3, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4, \\ x_1 & - & x_2 & & & \leq & 0, \\ \multicolumn{7}{c}{x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0\,.} \end{array}$$

Глава 3

Самаўзгодненыя функцыі і метад Ньютана

Тэорыя самаўзгодненых функцый была распрацавана Ю. Несцеравым і А. Неміроўскім у манаграфіі [10]. У межах гэтай тэорыі ўдалося паказаць, што большасць метадаў унутранай кропкі, першапачаткова распрацаваных для вырашэння паліэдральных задач ЛП, амаль што без змен могуць быць дастасаваны для вырашэння аналітычнай задачы ЛП, а таксама шырокага кола задач выпуклай аптымізацыі.

3.1 Азначэнне, прыклады і свойствы

Вывучаючы ў наступнай главе метады ўнутранай кропкі, мы будзем разглядаць аптымізацыйныя задачы наступнага выгляду

$$\inf\{f(x) \,:\, Ax = b,\ x \in \operatorname{dom} F\}\,, \tag{3.1.1}$$

дзе $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x$ ёсць выпуклая квадратычная функцыя (калі $Q = 0$, то $f(x) = c^T x$ лінейная), а функцыя F задавальняе наступным чатыром свойствам:

(B1) $\operatorname{dom} F$ ёсць адкрытае выпуклае мноства ў $\mathbb{R}^n$ і для любога сапраўднага t мноства $F_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \operatorname{dom} F :\ F(x) \le t\}$ замкнёнае;

(B2) $F \in \mathbf{C}^3$ і ў кожнай кропцы $x \in \operatorname{dom} F$ матрыца Гессэ $F''(x)$ дадатна-азначана;

(B3) для $x \in \operatorname{dom} F$ і $h \in \mathbf{R}^n$ справядліва няроўнасць

$$\left| \frac{d}{dt} h^T F''(x+th)h|_{t=0} \right| \le 2\|h\|^3_{F''(x)};$$

(B4) (абмежаванасць Ньютанаўскіх крокаў) існуе $K > 0$, што $\Psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|F'(x)\|_{F''(x)^{-1}} \leq K$ для ўсіх $x \in \operatorname{dom} F$.

Функцыя са свойствамі (B1)–(B4) называецца *самаўзгодненым бар'ерам з параметрам* K для мноства $X = \operatorname{cl}(\operatorname{dom} F)$ (ці проста K-*самаўзгодненым бар'ерам*). Мноства ўсіх K-самаўзгодненых бар'ераў абазначаем праз $\mathbf{SSC}(K)$. Калі функцыя F задавальняе толькі ўмовам (B1)–(B3), то яна называецца *строга самаўзгодненай* (абазначаем $F \in \mathbf{SSC}$).

Зробім некалькі заўваг наконт свойстваў (B1)–(B4). Патрабаванні ўмовы (B1) эквівалентны таму, што $F(x^i)$ збягаецца да бясконцасці для кожнай паслядоўнасці $\{x^i \in \operatorname{dom} F\}$, якая збягаецца да гранічнай кропкі мноства $\operatorname{dom} F$. Калі ў азначэнні строга самаўзгодненай функцыі ва ўмове (B1) мы апусцім патрабаванне аб замкнёнасці мностваў F_t, то мы атрымаем паняцце *самаўзгодненай функцыі.*

З умовы (B2) вынікае, што F з'яўляецца строга выпуклай функцыяй і таму, калі яна абмежавана знізу, то яна мае адзіную кропку мінімума $x(F)$.

Умова (B3) азначае, што ў кожнай кропцы $x \in \operatorname{dom} F$, дыфферэнцыял другога парадку функцыі F лакальна непарыўны па Ліпшыцу ў лакальнай метрыцы $\|\cdot\|_{F''(x)}$. Свойства (B3) эквівалентна наступнаму, на першы погляд, больш строгаму патрабаванню:

(B3') для $x \in \operatorname{dom} F$ і $u, v, h \in \mathbf{R}^n$ выконваецца няроўнасць

$$\left| \frac{d}{dt} u^T F''(x+th) v|_{t=0} \right| \leq 2\|u\|_{F''(x)} \|v\|_{F''(x)} \|h\|_{F''(x)}.$$

Мы прыводзім доказ гэтага факта ў дадатку A (гл. тэарэму A.1). Павінна быць зразумелым, што ў доказах мы будзем выкарыстоўваць больш моцнае сцвярджэнне (B3'); пры праверцы ж самаўзгодненасці нам дастаткова даказаць выкананне ўмовы (B3).

Апошняе свойства (B4) азначае, што ў кожнай кропцы $x \in \operatorname{dom} F$ даўжыня кроку Ньютана $F''(x)^{-1}F'(x)$ у лакальнай метрыцы $\|\cdot\|_{F''(x)}$ абмежавана велічынёй K.

3.1.1 Прыклады самаўзгодненых функцый

У гэтым параграфе мы прывядзем некалькі прыкладаў строга самаўзгодненых функцый, а таксама разгледзім шэраг аперацый, якія захоўваюць самаўзгодненасць. Але спачатку нам патрэбна ўвесці некалькі азначэнняў.

У далейшым будзе карысным разглядаць мноства функцыяналаў (абазначаем праз $\mathbf{SSC}'$), якое азначаецц аналагічна як і $\mathbf{SSC}$, толькі ўмова, што матрыцы $F''(x)$ павінны быць дадатна азначанымі, паслабляецца і замяняецца патрабаваннем, што ўсе яны неадмоўна азначаны. Зазначым адразу, што гэта азначэнне прыводзіць да нейкай недакладнасці ў абазначэннях; напрыклад, $\|v\|_{F''(x)} = \sqrt{v^T F''(x) v}$ можа не быць нормай. Мы будзем спасылацца на функцыяналы з $\mathbf{SSC}'$ як на *магчыма выраджаныя строга самаўзгодненыя* функцыі.

Разгледзім першых два прыклады самаўзгодненых функцый.

1. **Выпуклая квадратычная функцыя**: $F(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + d$ ($Q \in SM_+^n$, $c \in \mathbf{R}^n$, $d \in \mathbf{R}$), $\mathrm{dom}\ F = \mathbf{R}^n$.

Так як $F''(x) = Q$ для ўсіх $x \in \mathrm{dom}\ F$, то няцяжка пераканацца, што $F \in \mathbf{SSC}'$, а калі матрыца Q дадатна азначана, то $F \in \mathbf{SSC}$. □

2. **Лагарыфмічная функцыя**: $F(x) = -\ln x$, $\mathrm{dom}\ F = \mathbf{R}_{++}$.

Паколькі $F''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ і $F'''(x) = -\frac{2}{x^3}$ для $x \in \mathrm{dom}\ F$, то свойствы (B1) і (B2) выконваюцца. Няхай $h \in \mathbf{R}^n$. Так як $\|h\|_{F''(x)} = \frac{|h|}{x}$ і

$$\left|\frac{d}{dt}h^T F''(x+th)h|_{t=0}\right| = |F'''(x)h^3| = \frac{2|h^3|}{x^3} = 2\|h\|^3_{F''(x)},$$

то ўмова (B3) таксама выконваецца. □

Тэарэма 3.1.1 *Самаўзгодненасць захоўваецца пры наступных аперацыях.*

a) (Афінныя пераўтварэнні) Няхай $F \in \mathbf{SSC}'$ з $\mathrm{dom}\ F \subseteq \mathbf{R}^m$, і няхай $y = T(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} Ax + b$ ёсць афіннае пераўтварэне, дзе $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ і $b \in \mathbf{R}^m$. Калі $T(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{dom}\ F \neq \emptyset$, то $\overline{F}(x) = F(T(x))$ належыць $\mathbf{SSC}'$ з $\mathrm{dom}\ \overline{F} = T^{-1}(\mathrm{dom}\ F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbf{R}^n : T(x) \in \mathrm{dom}\ F\}$. Больш таго, калі $F \in \mathbf{SSC}$ і $\mathrm{rank}\, A = n$, то $F \in \mathbf{SSC}$.

b) (Сумаванне) Няхай $F_1, F_2 \in \mathbf{SSC}'$ і $\mathrm{dom}\ F_1 \cap \mathrm{dom}\ F_2 \neq \emptyset$. Калі $p_1, p_2 \geq 1$, то $F(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x)$ належыць $\mathbf{SSC}'$ з $\mathrm{dom}\ F = \mathrm{dom}\ F_1 \cap \mathrm{dom}\ F_2$. Акрамя таго, калі хаця б адна з дзвюх функцый F_1 ці F_2 строга самаўзгодненая, то $F \in \mathbf{SSC}$.

c) (Прамы здабытак) Няхай $F_1, F_2 \in \mathbf{SSC}'$ ($\mathbf{SSC}$). Тады $F(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$ належыць $\mathbf{SSC}'$ ($\mathbf{SSC}$) з $\mathrm{dom}\ F = \mathrm{dom}\ F_1 \times \mathrm{dom}\ F_2$.

d) Няхай $F_1 \in \mathbf{SSC}'$ ($\mathbf{SSC}$) і F_2 — выпуклая квадратычная функцыя. Тады, калі $t > 0$, то $F(x) = F_1(x) + tF_2(x)$ належыць $\mathbf{SSC}'$ ($\mathbf{SSC}$) з $\mathrm{dom}\ F = \mathrm{dom}\ F_1$.

Доказ. Мы абмяжуемся доказам пункта a). Доказ сцвярджэнняў b)—d) мы пакідаем чытачу ў якасці нескладанага практыкавання.

Няхай усе дапушчэнні пункта a) выконваюцца. Зразумела, што $\overline{F} \in \mathbf{C}^3$. Для кожнага $x \in \mathrm{dom}\ \overline{F}$ матрыца $\overline{F}''(x) = A^T F''(Ax+b)A$ неадмоўна азначана, а калі $\mathrm{rank}\, A = n$ і $F''(x)$ дадатна азначана, то $\overline{F}''(x)$ — таксама дадатна азначана. Таму ўмовы (B1) і (B2) выконваюцца.

Дакажам (B3). Спачатку зазначым, што для $x \in \mathrm{dom}\ \overline{F}$ і $h \in \mathbf{R}^n$

$$\|h\|_{\overline{F}''(x)} = \|F''(Ax+b)^{\frac{1}{2}}Ah\| = \|Ah\|_{F''(Ax+b)}.$$

Таму

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}h^T\overline{F}''(x+th)h|_{t=0}\right| &= \left|\frac{d}{dt}h^TA^TF''(A(x+th)+b)Ah|_{t=0}\right| \\ &\leq 2\|Ah\|^3_{F''(Ax+b)} = 2\|h\|^3_{\overline{F}''(x)}\end{aligned}$$

і ўмова (B3) таксама выконваецца. □

3. **Лагарыфмічны бар'ер для паліэдра** $P_{\leq}(A,b)$ ёсць функцыя

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{i=1}^m \ln(b_i - A_i x).$$

Падразумяваецца, што $\operatorname{dom} F = \{x \in \mathbf{R}^n : \ Ax < b\} \neq \emptyset$. Зазначым, што

$$F'(x) = A^T D(x)^{-1}\,\mathrm{e}\,, \quad F''(x) = A^T D(x)^{-2} A\,,$$

дзе $D(x) = \operatorname{diag}(b - Ax)$. Прымяняючы пункты a) і b) тэарэмы 3.1.1, мы заключаем, што $F \in \mathbf{SSC}'$; калі $\operatorname{rank} A = n$, то $F''(x)$ з'яўляецца дадатна азначанай і таму $F \in \mathbf{SSC}$. □

3.1.2 Свойствы самаўзгодненых функцый

Наступная тэарэма дае галоўныя тэхнічныя сродкі для даследавання строга самаўзгодненых функцый.

Тэарэма 3.1.2 *Няхай $F \in \mathbf{SSC}'$, $x \in \operatorname{dom} F$, $r \in [0,1)$. Тады*

a) $\operatorname{ell}(x, F''(x), r) \subset \operatorname{dom} F$*;*

b) для ўсіх $y \in \operatorname{ell}(x, F''(x), r)$ і $v \in \mathbf{R}^n$ выконваюцца няроўнасці:

$$(1-r)\|v\|_{F''(x)} \leq \|v\|_{F''(y)} \leq \frac{1}{1-r}\|v\|_{F''(x)}\,; \qquad (3.1.2)$$

c) для $y \in \operatorname{dom} F$ справядліва няроўнасць

$$\big|\|y-x\|_{F''(x)} - \|y-x\|_{F''(y)}\big| \leq \|y-x\|_{F''(x)}\|y-x\|_{F''(y)}\,.$$

Доказ. Мы сфармулявалі сцвярджэнні тэарэмы згодна частаце іх выкарыстання ў далейшым. Але даказваць іх зручней у адваротным парадку.

c) Няхай $y \in \operatorname{dom} F$. Увядзем абазначэнні $h = y - x$, $x(t) = x + th$. Няхай $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in \mathbf{R}_+ \ : \ x(t) \in \operatorname{dom} F\}$. Так як $x, y \in \operatorname{dom} F$ і $\operatorname{dom} F$ — адкрытае мноства, то $[0,1] \subset \Delta$. Для $t \in \Delta$, азначым функцыю $\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} h^T F''(x(t))h$. Па (B3) маем

$$|\psi'(t)| = \left|\frac{d}{d\tau}h^T F''(x(t)+\tau h)h|_{\tau=0}\right| \leq 2\|h\|^3_{F''(x(t))} = 2(\psi(t))^{\frac{3}{2}}$$

З гэтай няроўнасці вынікае, што або $\psi(t) \equiv 0$ для ўсіх $t \in \Delta$, або $\psi(t) > 0$ для $t \in \Delta$[1]. У першым выпадку

$$\|h\|_{F''(x)} = \|h\|_{F''(x(0))} = \|h\|_{F''(x(1))} = \|h\|_{F''(y)}$$

і c) выконваецца. У другім выпадку

$$\left|(\psi^{-\frac{1}{2}}(t))'\right| \leq 1\,,$$

ці

$$\left|\psi^{-\frac{1}{2}}(t) - \psi^{-\frac{1}{2}}(0)\right| \leq t. \tag{3.1.3}$$

У прыватным выпадку, для $t = 1$ атрымліваем

$$\left|\psi^{\frac{1}{2}}(0) - \psi^{\frac{1}{2}}(1)\right| \leq \psi^{\frac{1}{2}}(0) \cdot \psi^{\frac{1}{2}}(1)\,,$$

ці, што тое самае,

$$\big|\|h\|_{F''(x)} - \|h\|_{F''(y)}\big| \leq \|h\|_{F''(x)}\|h\|_{F''(y)}\,.$$

Такім чынам, і ў гэтым выпадку c) выконваецца.

b) Спачатку мы дакажам сцвярджэнне пункта b) пры дапушчэнні, што $y \in \mathrm{dom}\ F \cap \mathrm{ell}(x, F''(x), r)$. Пазней, калі мы дакажам пункт a), дапушчэнне $y \in \mathrm{dom}\ F$ будзе знята. Зазначым таксама, што доказ пункта a) абапіраецца на пункт b), але там загадзя вядома, што кропка $y \in \mathrm{dom}\ F$.

Няхай $v \in \mathbf{R}^n$. Для

$$t \in \delta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{t \in \Delta : \ \|x(t) - x\|_{F''(x)} < 1\} = [0, \tau),$$

азначым $\phi(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} v^T F''(x(t))v$. Па тэарэме 3.1.1 (пункт a)) заключаем, што ϕ — самаўзгодненая функцыя. Так як $\|x(1) - x(0)\|_{F''(x)} = \|y - x\|_{F''(x)} \leq r < 1$, то $[0, 1] \in \delta$. Па (В3') маем

$$\begin{array}{rcl} |\phi'(t)| & = & \left|\dfrac{d}{d\xi} v^T F''(x(t) + \xi h)v|_{\xi=0}\right| \\ & \leq & 2\|v\|^2_{F''(x(t))} \cdot \|h\|_{F''(x(t))} \\ & = & 2\phi(t)\psi^{\frac{1}{2}}(t)\,. \end{array} \tag{3.1.4}$$

Калі $\psi(t) \equiv 0$, то з (3.1.4) вынікае, што $\phi(t) \equiv \mathrm{const}$ на δ. Таму $\|v\|^2_{F''(x)} = \phi(0) = \phi(1) = \|v\|^2_{F''(y)}$ і, зразумела, ў гэтым выпадку b) выконваецца.

Цяпер разгледзім выпадак, калі $\psi(t) > 0$ для ўсіх $t \in \Delta$. Паколькі $\psi^{\frac{1}{2}}(0) = \|y - x\|_{F''(x)} \leq r$, з (3.1.3) атрымліваем, што

$$\psi^{\frac{1}{2}}(t) \leq \frac{r}{1 - tr}$$

[1] Вы выкарысталі добра-вядомае следства з тэарэмы аб адзінасці рашэння сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў: калі абсалютна непарыўная сапраўдная функцыя f, азначаная на сегменце $\Delta \subset \mathbf{R}$, задавальняе няроўнасці $|f'(t)| \leq g(t)|f(t)|$, дзе g суміруемая функцыя, то або $f \equiv 0$ на Δ, або f не прымае нулявога значэння на гэтым сегменце.

для ўсіх $t \in \delta$. Як вынік, працягваючы (3.1.4), маем

$$|\phi'(t)| \le \frac{2r\phi(t)}{1-tr}$$

для ўсіх $t \in \delta$. Такім чынам, або $\phi \equiv 0$ на δ (гэты выпадак мы ўжо разглядзелі вышэй), або $\phi(t) > 0$ для ўсіх $t \in \delta$. У апошнім выпадку справядліва няроўнасць

$$\left|\ln \frac{\phi(t)}{\phi(0)}\right| \le 2 \ln \frac{1}{1-tr}\,,$$

якая па азначэнню ϕ пры $t = 1$ з'яўляецца перафармулёўкай няроўнасці (3.1.2).

a) Нам трэба даказаць, што, калі $y \in \mathbf{R}^n$ і $\|y-x\|_{F''(x)} < 1$, то $y \in \operatorname{dom} F$. Няхай h, $x(t)$ і δ азначаны як і вышэй. Нам дастаткова даказаць, што $\tau = 1/\|h\|_{F''(x)}$. Дапусцім, што гэта не так і $\tau\|h|_{F''(x)} < 1$. Прымяняючы b) для кропак $x(t)$ ($x(t)$ падстаўляем замест y), $t \in \delta$, мы ўбачым, што другія вытворныя функцыі $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(x(t))$ абмежаваны для ўсіх $t \in \delta$ і, як следства, g — таксама абмежавана на δ. Згодна (B1), гэта азначае, што

$$x(\tau) = \lim_{t \to \tau - 0} x(t) \in \operatorname{dom} F\,.$$

Паколькі мноства $\operatorname{dom} F$ адкрытае, то $x(t) \in \operatorname{dom} F$ для нейкага $t > \tau$. З улікам дапушчэння $\tau\|h\|_{F''(x)} < 1$, апошняе ўлучэнне супярэчыць азначэнню τ. Гэта даказвае a). $\square$

Няхай $\beta \in (0, 1]$. Матрыца $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ называецца *β-ўзгодненай* з матрыцай $B \in M_{n,n}(\mathbf{R})$, калі для ўсіх $v \in \mathbf{R}^n$ выконваюцца наступныя няроўнасці:

$$\beta^2 v^T A v \le v^T B v \le \frac{1}{\beta^2} v^T A v.$$

Заўважым, што 1-ўзгодненасць нявыраджаных матрыц A і B азначае, што $A = B$.

Тэарэма 3.1.3 *Няхай $F \in \mathbf{SSC}'$, $x \in \operatorname{dom} F$, і нявыраджаная сіметрычная матрыца G β-ўзгоднена з $F''(x)$. Дапусцім $y \in \mathbf{R}^n$ і $r = \|y-x\|_G < \beta$. Тады $y \in \operatorname{dom} F$ і выконваюцца наступныя няроўнасці:*

$$(\beta - r)\|v\|_G \le \|v\|_{F''(y)} \le \frac{\|v\|_G}{\beta - r} \quad \textit{для ўсіх } v \in \mathbf{R}^n\,, \tag{3.1.5}$$

$$F(y) \le F(x) + F'(x)^T(y-x) - \ln(1 - r/\beta) - r/\beta\,, \tag{3.1.6}$$

$$F(x) \le F(y) + F'(y)^T(x-y) + \ln(1 - r/\beta) + \frac{r}{\beta - r}\,, \tag{3.1.7}$$

$$\|F'(y) - F'(x) - G(y-x)\|_{G^{-1}} \le \left(\frac{1}{\beta(\beta - r)} - 1\right) r. \tag{3.1.8}$$

Доказ. Заўважым спачатку, што, так як $\beta > 0$ і $F''(x)$ неадмоўна азначана, то матрыца G таксама неадмоўна азначана.

Так як

$$\|y - x\|_{F''(x)} \leq \frac{1}{\beta}\|y - x\|_G < 1,$$

па тэарэме 3.1.2 (пункт a)) заключаем, што $y \in \mathrm{dom}\ F$, і таму, згодна (3.1.2), маем

$$\|v\|_{F''(y)} \leq \frac{\|v\|_{F''(x)}}{1 - \|y - x\|_{F''(x)}} \leq \frac{\|v\|_G}{\beta - r}.$$

Аналагічна,

$$\|v\|_{F''(y)} \geq (1 - \|y - x\|_{F''(x)})\|v\|_{F''(x)} \geq (1 - r/\beta)\beta\|v\|_G = (\beta - r)\|v\|_G\,.$$

Цяпер дакажам няроўнасць (3.1.6). Выкарыстоўваючы няроўнасць (3.1.5), атрымліваем

$$\begin{aligned}
F(y) - F(x) \quad - \quad & F'(x)^T(y - x) \ = \\
= \quad & \int_0^1 \theta \int_0^1 (y - x)^T F''(x + \tau\theta(y - x))(y - x)\, d\tau\, d\theta \\
\leq \quad & \int_0^1 \theta \int_0^1 \frac{(y - x)^T G(y - x)}{(\beta - \tau\theta r)^2}\, d\tau\, d\theta \\
= \quad & r^2 \int_0^1 \theta \int_0^1 \frac{1}{(\beta - \tau\theta r)^2}\, d\tau\, d\theta \\
= \quad & -\ln(1 - r/\beta) - r/\beta\,.
\end{aligned}$$

Доказ няроўнасці (3.1.7) поўнасцю паралельны доказу няроўнасці (3.1.6), калі x і y памяняць месцамі і выкарыстоўваць няроўнасць

$$v^T F''(y + \tau\theta(x - y))v \leq \frac{1}{(\beta - (1 - \tau\theta)r)^2} v^T G v$$

замест няроўнасці

$$v^T F''(x + \tau\theta(y - x))v \leq \frac{1}{(\beta - \tau\theta r)^2} v^T G v;$$

дэталі мы пакідаем чытачу.

Засталося даказаць (3.1.8). Спачатку заўважым, што

$$\|F'(y) - F'(x) - G(y - x)\|_{G^{-1}} = \|(B - G)(y - x)\|_{G^{-1}},$$

дзе

$$B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^1 F''(x + \theta(y - x))\, d\theta.$$

Інтэгруючы няроўнасці

$$(\beta - \theta r)^2 v^T G v \leq v^T F''(x + \theta(y - x))v \leq \frac{1}{(\beta - \theta r)^2} v^T G v$$

па θ, $0 \le \theta \le 1$, атрымліваем

$$\beta(\beta - r)v^T G v \le v^T B v \le \frac{1}{\beta(\beta - r)} v^T G v,$$

ці, што тое самае,

$$(\beta(\beta - r) - 1)v^T G v \le v^T (B - G) v \le \left(\frac{1}{\beta(\beta - r)} - 1 \right) v^T G v.$$

Так як G неадмоўна азначана, то яна мае квадратны корань $G^{\frac{1}{2}}$. Няхай $v = G^{-\frac{1}{2}}\xi$. Тады

$$(\beta(\beta - r) - 1)\|\xi\|^2 \le \xi^T G^{-\frac{1}{2}}(B - G)G^{-\frac{1}{2}}\xi \le \left(\frac{1}{\beta(\beta - r)} - 1 \right) \|\xi\|^2.$$

Апошняя няроўнасць азначае, што

$$\|G^{-\frac{1}{2}}(B - G)G^{-\frac{1}{2}}\| \le \frac{1}{\beta(\beta - r)} - 1.$$

Адкуль

$$\begin{aligned} \|(B - G)(y - x)\|_{G^{-1}} &= \|G^{-\frac{1}{2}}(B - G)G^{-\frac{1}{2}}G^{\frac{1}{2}}(y - x)\| \\ &\le \|G^{-\frac{1}{2}}(B - G)G^{-\frac{1}{2}}\| \cdot \|(y - x)\|_G \\ &\le \left(\frac{1}{\beta(\beta - r)} - 1 \right) r. \end{aligned}$$

□

3.2 Мінімізацыя самаўзгодненых функцый. Метад Ньютана

Каб лепш зразумець ролю строга самаўзгодненых функцый у аптымізацыі, карысна разгледзець наступную задачу безумоўнай аптымізацыі

$$\min_x F(x), \tag{3.2.9}$$

дзе $F \in \mathbf{SSC}$. Дапусцім, што $F(x)$ абмежавана знізу. У гэтым выпадку, так як F строга выпуклая, яна мае адзіны мінімум, які будзем абазначаць праз $x(F)$. Наступная тэарэма паказвае, як можна праверыць, што дадзеная кропка $x \in \mathrm{dom}\ F$ знаходзіцца дастаткова блізка ад $x(F)$.

Тэарэма 3.2.1 *Няхай $F \in \mathbf{SSC}$, $x \in \mathrm{dom}\ F$, і сіметрычная матрыца G з'яўляецца β-ўзгодненай з $F''(x)$. Калі $\gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|F'(x)\|_{G^{-1}} < \beta^3$, то*

$$r \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|x(F) - x\|_G \le \frac{\gamma}{\beta^2 - \gamma/\beta}.$$

Наадварот, калі $r < \beta$, то

$$\gamma \le \frac{r}{\beta(\beta - r)}.$$

Доказ. Спачатку дакажам верхнюю мяжу на r. Па тэарэме 3.1.2 (пункт c)) для $y \in \operatorname{dom} F$ выконваецца няроўнасць:

$$\|y - x\|_{F''(y)} \ge \frac{\|y - x\|_{F''(x)}}{1 + \|y - x\|_{F''(x)}} \ge \frac{\beta^2 \|y - x\|_G}{\beta + \|y - x\|_G}.$$

Калі прымяніць гэту няроўнасць для $y = x + \tau(x(F) - x)$, дзе $\tau \in [0, 1]$, то атрымаем

$$\begin{aligned} \|x(F) - x\|_{F''(y)} &= \frac{1}{\tau}\|y - x\|_{F''(y)} \\ &\ge \frac{\beta^2 \|x(F) - x\|_G}{\beta + \tau\|x(F) - x\|_G} \ge \frac{\beta^2 r}{\beta + \tau r} \end{aligned}$$

Так як $F'(x(F)) = 0$, то маем

$$\begin{aligned} \gamma r &= \|F'(x)G^{-\frac{1}{2}}\| \cdot \|G^{\frac{1}{2}}(x(F) - x)\| \\ &\ge -F'(x)^T(x(F) - x) \\ &= (F'(x(F)) - F'(x))^T(x(F) - x) \\ &= \int_0^1 (x(F) - x)^T F''(x + \tau(x(F) - x))(x(F) - x)\, d\tau \\ &\ge \beta^4 r^2 \int_0^1 \frac{1}{(\beta + \tau r)^2}\, d\tau \\ &= \frac{\beta^3 r^2}{\beta + r}, \end{aligned}$$

ці, пасля перагрупоўкі, $\beta\gamma \ge (\beta^3 - \gamma)r$. Так як $\gamma < \beta^3$, то $r \le \beta\gamma/(\beta^3 - \gamma)$.

Цяпер дакажам справядлівасць верхняй мяжы на велічыню γ. Гэта ацэнка, відавочна, справядліва, калі $\gamma \le r$. Таму дапусцім, што $\gamma > r$. Так як $r < \beta$, выкарыстоўваючы няроўнасць (3.1.8) з тэарэмы 3.1.3, атрымліваем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\beta(\beta - r)} - 1\right)^2 r^2 \ \ge \\ \ge\ & \|F'(x(F)) - F'(x) - G(x(F) - x)\|^2_{G^{-1}} \\ =\ & F'(x)^T G^{-1} F'(x) + 2F'(x)^T(x(F) - x) + \\ & (x(F) - x)^T G(x(F) - x) \\ \ge\ & \gamma^2 - 2\gamma r + r^2 = (\gamma - r)^2. \end{aligned}$$

ці, пасля перагрупоўкі,

$$\gamma \le \frac{r}{\beta(\beta - r)}.$$

□

Агульна прынята вымяраць адлегласць ад дадзенай кропкі да кропкі $x(F)$ у метрыцы, задаваемай нормай $\| \cdot \|_{F''(x(F))}$. Таму для $x \in \mathrm{dom}\, F$ азначым $\overline{r}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|x(F) - x\|_{F''(x(F))}$. Калі x знаходзіцца дастаткова блізка ад $x(F)$, больш дакладна, калі $r(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|x(F) - x\|_{F''(x)} < 1$, то, згодна (3.1.2),

$$\overline{r}(x) \leq \frac{r(x)}{1 - r(x)}\,. \tag{3.2.10}$$

Формула (3.2.10) апраўдвае выкарыстанне лакальнай нормы $\|\cdot\|_{F''(x)}$ замест нормы $\| \cdot \|_{F''(x(F))}$.

Прымяняючы тэарэму 3.2.1 для $\beta = 1$, атрымліваем

Вынік 3.2.1 *Няхай* $F \in \mathbf{SSC}$, $x \in \mathrm{dom}\, F$. *Калі* $\Psi(F, x) < 1$, *то*

$$r(x) \leq \frac{\Psi(F, x)}{1 - \Psi(F, x)}.$$

Наадварот, калі $r(x) < 1$, *то*

$$\Psi(F, x) \leq \frac{r(x)}{1 - r(x)}.$$

Найбольш фундаментальнай ітэрацыйнай працэдурай для рашэння гладкіх задач безумоўнай аптымізацыі з'яўляецца метад Ньютана. Яго паводзіны ў прымяненні да мінімізацыі самаўзгодненых функцый характэрызуюцца наступнай тэарэмай.

Тэарэма 3.2.2 *Няхай* $F \in \mathbf{SSC}$, $x \in \mathrm{dom}\, F$ *і сіметрычная матрыца* G *з'яўляецца* β*-узгодненай з* $F''(x)$. *Тады справядліва наступнае:*

a) кропка

$$y = x - \frac{\beta^2 G^{-1} F'(x)}{1 + \beta \|F'(x)\|_{G^{-1}}}$$

належыць $\mathrm{dom}\, F$ *і*

$$F(y) \leq F(x) - \beta \|F'(x)\|_{G^{-1}} + \ln\left(1 + \beta \|F'(x)\|_{G^{-1}}\right)\,; \tag{3.2.11}$$

b) калі $r(x) < \frac{\beta^4}{1+\beta^2}$ *і* $z = x - G^{-1} F'(x)$, *то* $z \in \mathrm{dom}\, F$ *і*

$$r(z) \leq \frac{r(x) + 1 - \beta^2}{\beta^4 - (1 + \beta^2) r(x)} r(x)\,. \tag{3.2.12}$$

Доказ. Так як

$$\overline{r} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|y - x\|_G = \frac{\beta^2 \|F'(x)\|_{G^{-1}}}{1 + \beta \|F'(x)\|_{G^{-1}}} < \beta\,,$$

па тэарэме 3.1.3 (няроўнасць (3.1.6)), маем

$$\begin{aligned} F(y) &\le F(x) + F'(x)^T(y-x) - \ln(1-\overline{r}/\beta) - \overline{r}/\beta \\ &= F(x) - \frac{\beta^2\|F'(x)\|^2_{G^{-1}}}{1+\beta\|F'(x)\|_{G^{-1}}} \\ &\quad - \ln\left(1 - \frac{\beta\|F'(x)\|_{G^{-1}}}{1+\beta\|F'(x)\|_{G^{-1}}}\right) - \frac{\beta\|F'(x)\|_{G^{-1}}}{1+\beta\|F'(x)\|_{G^{-1}}} \\ &= F(x) - \beta\|F'(x)\|_{G^{-1}} + \ln\left(1+\beta\|F'(x)\|_{G^{-1}}\right) . \end{aligned}$$

Цяпер дакажам сцвярджэнне b). Так як $r \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|x(F)-x\|_G \le \frac{1}{\beta} r(x) < \beta$, па тэарэме 3.1.3 (няроўнасць (3.1.8)), мы атрымліваем

$$\begin{aligned} \|x(F)-z\|^2_G &= \|x(F)-x-G^{-1}(F'(x(F))-F'(x))\|^2_G \\ &= (x(F)-x)^T G(x(F)-x) \\ &\quad -2(F'(x(F))-F'(x))^T(x(F)-x) \\ &\quad +(F'(x(F))-F'(x))^T G^{-1}(F'(x(F))-F'(x)) \\ &= \|F'(x(F))-F'(x)-G(x(F)-x)\|^2_{G^{-1}} \\ &\le \left(\frac{1}{\beta(\beta-r)}-1\right)^2 r^2. \end{aligned}$$

Так як

$$\|z-x\|_G = \|G^{-1}F'(x)\|_G = \|F'(x)\|_{G^{-1}} \le \frac{r}{\beta(\beta-r)} < \beta\,,$$

то, згодна тэарэме 3.1.3, кропка z належыць $\mathrm{dom}\ F$. Па тэарэме 3.2.1 і (3.1.5) з улікам няроўнасці $r \le \frac{1}{\beta} r(x)$ атрымліваем

$$\begin{aligned} \|x(F)-z\|_{F''(z)} &\le \frac{\|x(F)-z\|_G}{\beta - \|z-x\|_G} \\ &\le \frac{1}{\beta - \dfrac{r}{\beta(\beta-r)}}\left(\frac{1}{\beta(\beta-r)}-1\right) r \\ &= \frac{\beta r + 1 - \beta^2}{\beta^3 - (1+\beta^2) r}\, r \\ &\le \frac{r(x)+1-\beta^2}{\beta^4-(1+\beta^2) r(x)} r(x)\,. \end{aligned}$$

Гэта завяршае доказ. □

Вынік 3.2.2 *Няхай* $F \in \mathbf{SSC}$, $x \in \mathrm{dom}\ F$. *Тады справядліва наступнае:*

a) кропка

$$y = x - \frac{F''(x)^{-1}F'(x)}{1+\Psi(F,x)}$$

```
min_SSC(F,γ,ϵ,x) // x ∈ dom F
{
  for (; Ψ(F,x) ≥ γ;)
    x := x − F''(x)^{-1} F'(x) / (1 + Ψ(F,x));
  for (; Ψ²(F,x) / (1 − Ψ(F,x)) > ϵ;)
    x := x − F''(x)^{-1} F'(x);
}
```

Рис. 3.1: Метад Ньютана для мінімізацыі строга самаўзгодненай функцыі

належыць dom F *і*

$$F(y) \leq F(x) - \Psi(F,x) + \ln(1+\Psi(F,x))\,; \tag{3.2.13}$$

b) калі $r(x) < \frac{1}{2}$ *і* $z = x - F''(x)^{-1}F'(x)$, *то*

$$r(z) \leq \frac{r^2(x)}{1-2r(x)}\,. \tag{3.2.14}$$

Заўвага 3.2.1 *Рэзультат, аналагічны таму, што прыведзены ў пункце b) следства 3.2.2, у літаратуры па вылічальных метадах вядомы як тэарэма Кантаровіча.*

Варыянт метада Ньютана для рашэння задачы (3.2.9) прадстаўлены на мал. 3.1. Тое, што функцыя $F \in$ **SSC** з'яўляецца параметрам працэдуры *min_SSC*, азначае, што мы павінны забяспечыць працэдуру падпраграмамі для вылічэння градыента і матрыцы Гессэ функцыі F у кожнай кропцы $x \in \mathrm{dom}\, F$.

Тэарэма 3.2.3 *Дадзена* $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{4}$. *Пачынаючы з кропкі* $x^0 \in \mathrm{dom}\, F$, *алгарытм на мал. 3.1 вылічвае* ϵ*-аптымальнае рашэнне задачы (3.2.9) пасля* $O(F(x^0) - F(x(F)))$ *ітэрацый на кроку 1 і* $O(\log\frac{1}{\epsilon})$ *ітэрацый на кроку 2.*

Доказ. Згодна пункту а) выніка 3.2.2, кожная ітэрацыя кроку 1 памяншае $F(x)$ не меней чым на

$$\Psi(F,x) - \ln(1+\Psi(F,x)) = const.$$

Такім чынам, на кроку 1 магчыма самае большае $O(F(x^0) - F(x(F)))$ ітэрацый.

Калі алгарытм спыняецца, то

$$\begin{aligned} F(x) - F(x(F)) &\leq F'(x)^T(x - x(F)) \\ &\leq \|F'(x)\|_{F''(x)^{-1}} \|x - x(F)\|_{F''(x)} \\ &\leq \frac{\Psi^2(F,x)}{1-\Psi(F,x)} \leq \epsilon\,, \end{aligned}$$

а гэта азначае, што x з'яўляецца ϵ-аптымальным рашэннем задачы (3.2.9).

Цяпер мы ацэнім колькасць ітэрацый на кроку 2. Няхай $x^{(i)}$ азначае кропку x пасля i-й ітэрацыі кроку 2, і няхай $x^{(0)}$ ёсць кропка x пасля першага кроку. Калі для прастаты абазначым $r(x^{(i)})$ праз r_i, то, згодна выніку 3.2.1,

$$r_0 \leq \frac{\Psi(F, x^{(0)})}{1 - \Psi(F, x^{(0)})} < \frac{\gamma}{1-\gamma} \leq \frac{1}{3}$$

і

$$q \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{r_0}{1 - 2r_0} < 1.$$

Таму, згодна пункту b) выніка 3.2.2,

$$r_i \leq \frac{r_{i-1}^2}{1 - 2r_{i-1}} < \left(\frac{r_0}{1-2r_0}\right)^i r_0 < \frac{q^i}{3}.$$

Па тэарэме 3.2.1

$$\Psi(F, x^{(i)}) \leq \frac{r_i}{1 - r_i}$$

і таму

$$\begin{aligned} \frac{\Psi^2(F, x^{(i)})}{1 - \Psi(F, x^{(i)})} \quad &\leq \quad \frac{\dfrac{r_i^2}{(1-r_i)^2}}{1 - \dfrac{r_i}{1-r_1}} = \frac{r_i^2}{(1-r_i)(1-2r_i)} \\ &\leq \quad \frac{r_i^2}{(1-1/3)(1-2/3)} < \frac{q^{2i}}{2}. \end{aligned}$$

Цяпер ацэнка $O(\log \frac{1}{\epsilon})$ на колькасць ітэрацый вынікае з няроўнасці $q^{2i}/2 \leq \epsilon$. □

3.3 Самаўзгодненыя бар'еры

Напомнім, што K-самаўзгоднены бар'ер для замкнёнага выпуклага мноства X — гэта такая строга самаўзгодненая функцыя F з $\mathrm{dom}\, F = \mathrm{int}\, X$, якая задавальняе ўмове (B4) аб абмежаванасці ўбывання функцыі ўздоўж ньютанаўскага напрамку.

Для $K > 0$ абазначым праз $\mathbf{SSC}'(K)$ падмноства тых функцыяналаў з $\mathbf{SSC}'$, якія для ўсіх $x \in \mathrm{dom}\, F$ задавальняюць наступнаму свойству

$$\lim_{t \to +0} \sup F'(x)^T \left(tI + F''(x)\right)^{-1} F'(x) \leq K^2. \tag{3.3.15}$$

Параўнаем гэтае свойства з (B4). Калі $F \in \mathbf{SSC}(K)$ і $x \in \mathrm{dom}\, F$, то, так як матрыца $F''(x)$ нявыраджана,

$$\lim_{t \to +0} \sup F'(x)^T \left(tI + F''(x)\right)^{-1} F'(x) = F'(x)^T F''(x)^{-1} F'(x) \leq K^2.$$

Гэта даказвае, што $\mathbf{SSC}(K) \subseteq \mathbf{SSC}'(K)$.

Ю. Несцераў і А.Неміроўскі [10] даказалі наступны вельмі важны і даволі нечаканы рэзультат.

Тэарэма 3.3.1 *Існуе абсалютная канстанта C, такая, што для кожнага замкнёнага выпуклага мноства $S \subseteq \mathbf{R}^n$ існуе функцыянал $F \in \mathbf{SSC}'(C\sqrt{n})$ з $\mathrm{dom}\ F = \mathrm{int}\ S$. Калі S не ўтрымлівае афіннай падпрасторы, то F можна азначыць па правілу*

$$F(x) = O(1) \ln |S^*(x)|, \tag{3.3.16}$$

дзе $O(1)$ ёсць нейкая абсалютная канстанта,

$$S^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbf{R}^n \,:\, z^T(y-x) \leq 1 \text{ для ўсіх } y \in S\}$$

ёсць паляра мноства S адносна кропкі x, а $|\cdot|$ азначае n-мерную меру Лебега.

Бар'ер выпуклага мноства S, азначаемы па формуле (3.3.16), называецца *ўніверсальным.* Заўважым, што ўніверсальны бар'ер з'яўляецца залішне складаным, каб выкарыстоўваць яго на практыцы (складана вылічваць значэнні функцыі, градыенты і матрыцы Гессэ).

Наступная тэарэма з'яўляецца амаль што відавочнай (параўнайце з тэарэмай (3.1.1).

Тэарэма 3.3.2 *Самаўзгодненыя бар'еры інварыянтны пры наступных аперацыях.*

a) (Афіннае пераўтварэнне) Няхай $F \in \mathbf{SSC}'(K)$ з $\mathrm{dom}\ F \subseteq \mathbf{R}^m$, і няхай $T(x) \stackrel{\text{def}}{=} Ax+b$ ёсць афіннае пераўтварэнне, дзе $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ і $b \in \mathbf{R}^m$. Калі $T(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{dom}\ F \neq \emptyset$, то $\overline{F}(x) = F(T(x))$ належыць $\mathbf{SSC}'(K)$ з $\mathrm{dom}\ \overline{F} = T^{-1}(\mathrm{dom}\ F)$. Больш таго, калі $F \in \mathbf{SSC}(K)$ і $\mathrm{rank}\, A = n$, то $F \in \mathbf{SSC}(K)$.

b) (Сумаванне) Няхай $F_1 \in \mathbf{SSC}'(K_1)$, $F_2 \in \mathbf{SSC}'(K_2)$ і $\mathrm{dom}\ F_1 \cap \mathrm{dom}\ F_2 \neq \emptyset$. Тады $F(x) = F_1(x)+F_2(x)$ належыць $\mathbf{SSC}'\left(\sqrt{K_1^2+K_2^2}\right)$ з $\mathrm{dom}\ F = \mathrm{dom}\ F_1 \cap \mathrm{dom}\ F_2$. Акрамя таго, калі хацяб адна з дзвюх функцый F_1 ці F_2 строга самаўзгодненая, то $F \in \mathbf{SSC}\left(\sqrt{K_1^2+K_2^2}\right)$.

c) (Прамы здабытак) Няхай $F_1 \in \mathbf{SSC}'(K_1)$, $F_2 \in \mathbf{SSC}'(K_2)$. Тады $F(x,y) = F_1(x) + F_2(y)$ належыць $\mathbf{SSC}'\left(\sqrt{K_1^2+K_2^2}\right)$ з $\mathrm{dom}\ F = \mathrm{dom}\ F_1 \times \mathrm{dom}\ F_2$. Акрамя таго, калі абедзве функцыі F_1 і F_2 строга самаўзгодненыя, то $F \in \mathbf{SSC}\left(\sqrt{K_1^2+K_2^2}\right)$.

Доказ. Згодна тэарэме 3.1.1, ва ўсіх трох выпадках нам дастаткова праверыць выкананне ўмовы (B4). Для прастаты, мы будзем лічыць, што ўсе функцыі належаць класу $\mathbf{SSC}$. Для функцый класа $\mathbf{SSC}'$ доказ аналагічны, толькі матрыцы $F''(x)$ трэба спачатку замяніць матрыцамі $tI + F''(x)$, а потым перайсці да прэдзелу пры $t \to +0$.

а) Так як $\overline{F}'(x) = A^T F'(T(x))$ і $\overline{F}''(x) = A^T F''(T(x))A$, то

$$\begin{aligned}
\|\overline{F}'(x)\|^2_{\overline{F}''(x)^{-1}} &= F'(T(x))^T A \left(A^T F''(T(x))A\right)^{-1} A^T F'(T(x)) \\
&= F'(T(x))^T F''(T(x))^{-\frac{1}{2}} \times \\
&\quad F''(T(x))^{\frac{1}{2}} A \left(A^T F''(T(x))A\right)^{-1} A^T F''(T(x))^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad F''(T(x))^{-\frac{1}{2}} F'(T(x)) \\
&\leq \|F'(T(x))\|^2_{F''(T(x))} \times \\
&\quad \|F''(T(x))^{\frac{1}{2}} A \left(A^T F''(T(x))A\right)^{-1} A^T F''(T(x))^{\frac{1}{2}}\| \\
&\leq K^2.
\end{aligned}$$

Тут мы выкарысталі той факт, што норма матрыцы праектавання

$$F''(T(x))^{\frac{1}{2}} A \left(A^T F''(T(x))A\right)^{-1} A^T F''(T(x))^{\frac{1}{2}}$$

роўна 1.

Разгляд пунктаў b) і c) пакідаецца чытачу ў якасці практыкавання. □

3.3.1 Прыклады самаўзгодненых бар’ераў

У гэтым параграфе мы прывядзем некалькі прыкладаў функцый з $\mathbf{SSC}'(K)$.

1. Любая **пастаянная функцыя** на $\mathbf{R}^n$ належыць $\mathbf{SSC}'(0)$. Можна даказаць, што гэта адзіна магчымы самаўзгоднены бар’ер з $\mathrm{dom}\, F = \mathbf{R}^n$ і таксама адзіны магчымы самаўзгоднены бар’ер з параметрам меншым адзінкі. У далейшым мы будзем мець справу з бар’ерамі для асабістых падмностваў з $\mathbf{R}^n$ і таму іх параметры будуць заўсёды не меншымі адзінкі. □

2. **Лагарыфмічная функцыя** $F(x) = -\ln(x)$ з $\mathrm{dom}\, F = \mathbf{R}_{++}$. Так як $F \in \mathbf{SSC}$ і $F'(x)F''(x)^{-1}F'(x) = \frac{1}{x}x^2\frac{1}{x} = 1$ для $x > 0$, то мы заключаем, што $F \in \mathbf{SSC}(1)$. □

3. **Лагарыфмічны бар’ер** для мноства

$$G = \{x \in \mathbf{R}^n :\ g(x) \leq 0\},$$

дзе $g(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + d$ — выпуклая ($Q \in SM^n_+$) квадратычная функцыя. Дапусцім, што мноства G мае непустую ўнутранасць. Дакажам, што функцыянал $F(x) = -\ln(-g(x))$ з $\mathrm{dom}\, F = \mathrm{int}\, G$ належыць $\mathbf{SSC}'(1)$.

Зразумела, што F — выпуклая функцыя. Таксама відавочна, што $F \in \mathbf{C}^\infty$ і $F(x^i) \to \infty$, калі паслядоўнасць $\{x^i\}$ кропак з G збягаецца да нейкай гранічнай кропкі мноства G. Такім чынам, нам трэба праверыць умовы (B3) і (B4).

Для $x \in \operatorname{int} G$, $h \in \mathbf{R}^n$, заўважаючы, што $g''(x) \equiv Q$, атрымліваем

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\frac{g'(x)}{g(x)}\,, \\
F''(x) &= -\frac{g''(x)}{g(x)} + \frac{g'(x)g'(x)^T}{g^2(x)}\,, \\
\frac{d}{dt}h^T F''(x+th)h|_{t=0} &= 3\frac{h^T g''(x)h\cdot(g'(x)^T h)}{g^2(x)} - 2\left(\frac{g'(x)^T h}{g(x)}\right)^3.
\end{aligned}$$

Пры абазначэннях

$$q \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{g'(x)^T h}{g(x)}\,, \quad p \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-\frac{h^T g''(x)h}{g(x)}}$$

(зазначым, што $g(x) < 0$ для ўсіх $x \in \operatorname{int} G$), маем

$$\begin{aligned}
F'(x)^T h &= q\,, \\
\|h\|^2_{F''(x)} &= h^T F''(x)h = q^2 + p^2, \\
\frac{d}{dt}h^T F''(x+th)h|_{t=0} &= 3p^2 q + 2q^3.
\end{aligned}$$

Калі $q = 0$, то, відавочна, (B3) выконваецца. Дапускаючы, што $q \neq 0$, атрымліваем

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}h^T F''(x+th)h\right|_{t=0} &= |3p^2 q + 2q^3| \\
&= 2|q|^3 + 3p^2|q| = 2|q|^3\left(1 + \frac{3}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^2\right) \\
&\leq 2|q|^3\left(1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= 2\|h\|^3_{F''(x)}\,.
\end{aligned}$$

Такім чынам, у выпадку, калі $q \neq 0$, (B3) таксама выконваецца.

Нам засталося праверыць (B4). Для прастаты, дапусцім, што $F''(x)$ дадатна азначана; выпадак неадмоўна азначанай матрыцы $F''(x)$ разглядаецца аналагічна, толькі замест матрыцы $F''(x)$ трэба выкарыстоўваць матрыцу $tI + F''(x)$, а затым перасці да прэдзелу пры $t \to +0$. Калі паклясці $h = F''(x)^{-1}F'(x)$, атрымаем

$$\begin{aligned}
q &= F'(x)^T h = F'(x)^T F''(x)^{-1}F'(x) \\
&= h^T F''(x)h = q^2 + p^2.
\end{aligned}$$

Адкуль вынікае няроўнасць $q \geq q^2$, якая выконваецца толькі тады, калі $0 \leq q \leq 1$. □

4. **Лагарыфмічны бар'ер**

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - A_i x)$$

для паліэдра $P_{\leq}(A, b)$ належыць $\mathbf{SSC}'(\sqrt{m})$, прычым, калі $\operatorname{rank} A = n$, то $F \in SSC(\sqrt{m})$.

Так як лагарыфмічная функцыя належыць $\mathbf{SSC}(1)$, то гэты факт вынікае з пунктаў a) і b) тэарэмы 3.3.2. □

5. **Лагарыфмічны бар'ер для выпуклых квадратычных абмежаванняў**. Няхай

$$G = \{x \in \mathbf{R}^n \, : \, g^i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m\},$$

дзе ўсе $g^i \, : \, \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ з'яўляюцца выпуклымі квадратычнымі функцыямі. Калі $\operatorname{int} G \neq \emptyset$, то, згодна пункту b) тэарэмы 3.3.2, функцыя

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(-g^i(x))$$

з $\operatorname{dom} F = \operatorname{int} G$ належыць $SSC'\,(\sqrt{m})$. □

Усе самаўзгодненыя бар'еры, якія мы ўжо паспелі разгледзець, з'яўляюцца прыватнымі выпадкамі бар'ера з наступнай тэарэмы.

Тэарэма 3.3.3 *Няхай $g \, : \, \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ёсць паліном парадку $m \geq 0$, D — замкнёнае выпуклае мноства ў $\mathbf{R}^n$, такое, што $g(x) > 0$ для ўсіх $x \in \operatorname{int} D$ і $g(x) = 0$ для $x \in \operatorname{bd} D$. Дапусцім, што для ўсіх $x \in \operatorname{int} D$ і $h \in \mathbf{R}^n$ паліном $p_{x,h}(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(x + th)$ ёсць канстанта, ці мае толькі сапраўдныя корані. Тады функцыя $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\ln g(x)$ з $\operatorname{dom} F = \operatorname{int} D$ належыць $\mathbf{SSC}'(\sqrt{m})$. Калі $p_{x,h} \not\equiv const$ для ўсіх $x \in \operatorname{int} D$ і ненулявых $h \in \mathbf{R}^n$, то $F \in \mathbf{SSC}(\sqrt{m})$.*

Доказ. Відавочна, што функцыя F задавальняе ўмове (B1). Няхай $x \in \operatorname{int} D$, $h \in \mathbf{R}^n$, $h \neq 0$, а $p_{x,h}$ ёсць паліном ступені $k \leq m$ з коранямі $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Выпадак, калі $p_{x,h} \equiv \text{const}$, мы прапануем чытачу прааналізаваць самастойна. Так як

$$
\begin{aligned}
p_{x,h}(t) &= a\prod_{i=1}^{k}(t-t_i)\,,\\
\phi(t) &\stackrel{\text{def}}{=} F(x+th) = -\ln g(x+th) = -\sum_{i=1}^{k}\ln|t-t_i| - \ln|a|\,,\\
\phi'(t) &= F'(x+th)^T h = -\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{|t-t_i|}\,,\\
\phi''(t) &= h^T F''(x+th)h = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(t-t_i)^2}\,,\\
\phi'''(t) &= \frac{d}{dt}h^T F''(x+th)h|_{t=0} = -2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(t-t_i)^3}\,,
\end{aligned}
$$

Так як $h^T F''(x)h = \sum_{i=1}^{k} 1/t_i^2 > 0$, то матрыца $F''(x)$ дадатна азначана. Таму (B2) выконваецца.

Умова (B3) вынікае з наступнага ланцуга

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}h^T F''(x+th)h|_{t=0}\right| &= 2\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{t_i^3}\right|\\
&\leq 2\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{t_i^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2\|h\|^3_{F''(x)}.
\end{aligned}
$$

Нам засталося даказаць (B4). Няхай $h = F''(x)^{-1}F'(x)$. Згодна пунктам a) i b) тэарэмы 3.3.2, функцыя ϕ з'яўляецца $\sqrt{k}$-самаўзгодненым бар'ерам. Так як $\phi'(0) = F'(x)^T F''(x)^{-1}F'(x)$ i $\phi''(0) = F'(x)^T F''(x)^{-1}F'(x)$, то

$$
m \geq k \geq \frac{(\phi'(0))^2}{\phi''(0)} = F'(x)^T F''(x)^{-1}F'(x).
$$

□

У заключэнне, прывядзем яшчэ адзін важны прыклад.

6. **Бар'ер для сістэмы паўазначаных няроўнасцей**. Дапушчальны абсяг D задачы паўазначанага праграмавання ў нармальнай форме (1.5) задаецца *сістэмай паўазначаных няроўнасцей*

$$
\sum_{i=1}^{n} A^i x_i \leq_{SM_+^m} B\,, \tag{3.3.17}
$$

дзе $B \in SM^m$, $A^i \in SM^m$ $(i = 1, \ldots, n)$. Такім чынам,

$$\begin{aligned} D &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \; B - \sum_{i=1}^{n} A^i x_i \in SM_+^m \right\}, \\ \mathrm{int}\; D &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \; B - \sum_{i=1}^{n} A^i x_i \in SM_{++}^m \right\}. \end{aligned}$$

Дапусцім, што $\mathrm{int}\; D \neq \emptyset$. Азначым функцыянал

$$F(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\ln\det\left(B - \sum_{i=1}^{n} A^i x_i \right)$$

з $\mathrm{dom}\; F = \mathrm{int}\; D$. Так як

$$g(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det\left(B - \sum_{i=1}^{n} A^i x_i \right)$$

ёсць паліном m-й ступені, $g(x) > 0$ для $x \in \mathrm{int}\; D$ і $g(x) = 0$ для $x \in \mathrm{bd}\, D$, то па тэарэме 3.3.3 робім выснову, што $F \in \mathbf{SSC}'\left(\sqrt{m}\right)$. Калі, у дадатак, матрыцы A^i $(i = 1, \ldots, n)$ лінейна незалежны, г. зн.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A^i \neq 0 \quad \text{для любога } \lambda \in \mathbf{R}^n, \; \lambda \neq 0,$$

то няцяжка пераканацца, што для любых $x \in \mathrm{int}\; D$ і ненулявых $h \in \mathbf{R}^n$ паліном $p_{x,h}(t) \neq const$. У гэтым выпадку, згодна тэарэме 3.3.3, F з'яўляецца $\sqrt{m}$-самаўзгодненым бар'ерам для мноства D.

Пакажам, як можна вылічыць градыент і матрыцу другіх вытворных функцыі F. Азначаным функцыянал

$$V(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\ln\det X$$

з $\mathrm{dom}\; V = \mathrm{int}\; SM_+^n = SM_{++}^n$. Для $X \in SM_{++}^n$ і $H, U \in SM^n$ справядлівы формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(X)}{\partial H} &= -\frac{d}{dt} \ln\det(X + tH)|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \ln\det(X(I + tX^{-1}H))|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\ln\det X + \ln\det(I + tX^{-1}H)\right)|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \ln\det(I + tX^{-1}H))|_{t=0} = \mathrm{Tr}(X^{-1}H)\,, \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

$$\frac{\partial^2 V(X)}{\partial H\, \partial U} = -\frac{d}{dt} \mathrm{Tr}\left((X + tH)^{-1}U\right)|_{t=0} = \mathrm{Tr}(X^{-1}HX^{-1}U)\,. \tag{3.3.19}$$

Няхай $x \in \mathrm{dom}\ F$, $Y = B - \sum_{i=1}^{n} A^i x_i$. З улікам формул (3.3.18) і (3.3.19), мы можам вылічыць кампаненты градыента $F'(x)$ і матрыцы Гессэ $F''(x)$ па формулах:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = -\frac{\partial V(X)}{\partial A^i} = \mathrm{Tr}(-Y^{-1}A^i), \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{3.3.20}$$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 V(X)}{\partial A^i\, \partial A^j} = \mathrm{Tr}(Y^{-1}A^i Y^{-1} A^j), \quad i, j = 1, \ldots, n\,. \tag{3.3.21}$$

□

3.3.2 Лагарыфмічна аднародныя бар'еры

У гэтым параграфе мы разгледзім спецыяльны клас самаўзгодненых бар'ераў F, якія задавальняюць наступным дзвюм дадатковым умовам:

- $\mathrm{dom}\ F$ ёсць адкрыты непусты выпуклы конус;
- F з'яўляецца K^2-*лагарыфмічна аднароднай*, г. зн.

$$F(tx) = F(x) - K^2 \ln t. \tag{3.3.22}$$

Такія бар'еры будзем называць K-*нармальнымі.* Абазначым мноства ўсіх K-нармальных бар'ераў праз $\mathbf{BN}(K)$.

Тэарэма 3.3.4 *Калі F — K-нармальны бар'ер, то для $x \in \mathrm{dom}\ F$ выконваюцца наступныя роўнасці:*

$$\begin{aligned} F'(tx) &= \frac{1}{t}F'(x) \quad \textit{для } t > 0, & (3.3.23)\\ F'(x) &= -F''(x)x, & (3.3.24)\\ F'(x)^T x &= -K^2, & (3.3.25)\\ x^T F''(x) x &= K^2, & (3.3.26)\\ \Psi(F, x) &= K\,. & (3.3.27) \end{aligned}$$

Доказ. Дыфферэнцуючы (3.3.22) па t, атрымліваем

$$F'(tx)^T x = -\frac{K^2}{t}\,.$$

Пры $t = 1$ гэта роўнасць пераўтвараецца ў (3.3.25). Дыфферэнцуючы (3.3.25) па x, атрымліваем (3.3.24). Дамнажаючы (3.3.24) на x і выкарыстоўваючы (3.3.25), атрымліваем (3.3.26). Падстаўляючы $x = -F''(x)^{-1}F'(x)$ у (3.3.26), атрымліваем $F'(x)^T F''(x)^{-1} F'(x) = K^2$, што раўназначна (3.3.27). □

Разгледзім некалькі прыкладаў.

7. Стандартны **лагарыфмічны бар'ер** $F(x) = -\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ **для неадмоўнага артанта** $\mathbf{R}_+^n$ з'яўляецца $\sqrt{n}$-нармальным бар'ерам. □

8. **Лагарыфмічны бар'ер для надграфіка яўклідавай нормы**

$$C = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \,:\, t \geq \|x\|\}$$

ёсць функцыя $F(t, x) = -\ln(t^2 - x^T x)$ з $\mathrm{dom}\, F = \mathrm{int}\, C$. Па тэарэме 3.3.3 робім выснову, што $F \in \mathbf{SSC}(\sqrt{2})$. Відавочна, што функцыя F — 2-лагарыфмічна аднародная. Таму F з'яўляецца $\sqrt{2}$-нармальным бар'ерам. □

9. **Бар'ер для конуса верхніх трохвугольнікаў неадмоўна азначаных матрыц**. На практыцы сіметрычная матрыца $X \in SM^n$ звычайна прадстаўляецца яе верхнім трохвугольнікам. Азначым адлюстраванне $T : SM^n \to \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ па правілу:

$$T(X) \stackrel{\text{def}}{=} (x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{n-1,n-1}, x_{n-1,n}, x_{nn}).$$

Адваротнае адлюстраванне $T^{-1} : \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \to SM^n$ азначаецца па правілу:

$$T^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} x_{(i-1)n+j} E(i, j),$$

дзе $E(i, j) = e_i e_j^T + e_j e_i^T$. Абазначым конус $T(SM_+^n)$ праз UM_+^n. Зазначым, што элементы конуса UM_+^n можна разглядаць як верхнія трохвугольнікі неадмоўна азначаных матрыц. Таму мы будзем называць яго *конусам верхніх трохвугольнікаў неадмоўна азначаных матрыц*. Так як $T^{-1}(UM_+^n) = SM_+^n$, то функцыянал

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\ln \det(T^{-1}(x)),$$

азначаны на $\mathrm{int}\, UM_+^n = T(SM_{++}^n)$, належыць $\mathbf{SSC}(\sqrt{n})$ (гл. параграф 3.3.1, прыклад 6). А так як для $t > 0$ справядлівы роўнасці

$$\begin{aligned} T^{-1}(tx) &= tT^{-1}(x), \\ F(tx) &= -\ln \det(tT^{-1}(x)) = -t^n \ln \det(T^{-1}(x)) = t^n F(x), \end{aligned}$$

то функцыянал F з'яўляецца $\sqrt{n}$-нармальным бар'ерам для конуса UM_+^n. □

Увядзем адлюстраванне $H : SM^n \to \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ па правілу:

$$H(X) \stackrel{\text{def}}{=} (x_{11}, 2x_{12}, \ldots, 2x_{1n}, x_{22}, 2x_{23}, \ldots, 2x_{2n}, \ldots, x_{nn}).$$

Пры абазначэннях $c = H(C)$, $x = T(X)$, $a^i = H(A^i)$, задача паўазначанага праграмавання ў стандартнай форме (1.6) эквівалентна наступнай задачы:

$$\begin{array}{rcl} c^T x & \to & \max \\ (a^i)^T x & = & b_i\,, \quad i = 1, \ldots, m, \\ x & \geq_{UM_+^n} & 0, \end{array} \tag{3.3.28}$$

дзе $c \in \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $b \in \mathbf{R}^m$, $a^i \in \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

3.3.3 Бар'еры для двойных конусаў

Шэраг метадаў унутранай кропкі для аналітычнай задачы ЛП патрабуюць каб былі вядомы бар'еры не толькі для прамых, але і для двойных конусаў. У гэтым параграфе мы пакажам, як па K-нармальнаму бар'еру для нейкага конуса можна пабудаваць K-нармальны бар'ер для двойнага конуса.

Лема 3.3.1 *Няхай $a \in \mathbf{R}^n$ і n-мерная функцыя $F \in \mathbf{BN}(K)$ абмежавана знізу на множстве $D(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} H(a, K^2) \cap \operatorname{dom} F$. Кропка $\hat{x}$ з'яўляецца аптымальным рашэннем задачы*

$$\min_{x \in D(a)} F(x)\,. \tag{3.3.29}$$

тады і толькі тады, калі $a = -F'(\hat{x})$.

Доказ. Згодна ўмове аптымальнасці першага парадку, $\hat{x}$ — аптымальнае рашэнне задачы (3.3.29) тады і толькі тады, калі вектар $F'(\hat{x})$ артаганальны да $H(a, K^2)$, г. зн. $F'(\hat{x}) = \alpha a$ для нейкага сапраўднага $\alpha \neq 0$. Паколькі па (3.3.25)

$$\frac{K^2}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} F'(\hat{x})^T \hat{x} = -a^T \hat{x} = -K^2,$$

то $\alpha = -1$ і $a = -F'(\hat{x})$. □

Тэарэма 3.3.5 *Няхай C ёсць востры конус у $\mathbf{R}^n$ з непустою ўнутранасцю, а F ёсць K-нармальны бар'ер для C. Тады $\operatorname{int} C^D = \{-F'(x) : x \in \operatorname{int} C\}$ і функцыянал F^D, азначаны па правілу*

$$F^D(-F'(x)) = -F(x)\,, \tag{3.3.30}$$

з'яўляецца K-нармальным бар'ерам для C^D.

Доказ. Няхай $a \in \operatorname{int} C^D$. Так як конус C востры, то $a \neq 0$, $a^T x > 0$ для ўсіх $x \in \operatorname{int} C$, а множства $D(a)$ непустое і абмежаванае. Таму функцыя $F(x)$ абмежавана знізу на $D(a)$. Няхай $\hat{x}$ ёсць аптымальнае рашэнне задачы (3.3.29). Па леме 3.3.1 маем $a = -F'(\hat{x})$, што даказвае першую частку сцвярджэння тэарэмы.

Дакажам цяпер, што F^D з'яўляецца K-нармальным бар'ерам для конуса C^D. Зразумела, што $F^D \in \mathbf{C}^3$. Паколькі F — K^2-лагарыфмічна аднародная функцыя, то, выкарыстоўваючы (3.3.23), маем

$$\begin{aligned} F^D(-tF'(x)) &= F^D\left(-F'\left(\frac{x}{t}\right)\right) = -F\left(\frac{x}{t}\right) \\ &= -F(x) + K^2 \ln \frac{1}{t} = F^D(-F'(x)) - K^2 \ln t\,. \end{aligned}$$

Значыць, F^D — таксама K^2-лагарыфмічна аднародная функцыя.

Калі прадыферэнцаваць (3.3.30) па x, атрымаем

$$-F''(x)[(F^D)'(-F'(x))] = -F'(x)\,,$$

ці па (3.3.23)

$$(F^D)'(-F'(x)) = F''(x)^{-1}F'(x) = -x\,. \tag{3.3.31}$$

Далей, дыферэнцуючы роўнасць $(F^D)'(-F'(x)) = -x$ па x, маем

$$-F''(x)[(F^D)''(-F'(x))] = -I\,,$$

ці

$$(F^D)''(-F'(x)) = F''(x)^{-1}\,, \tag{3.3.32}$$

Для $h \in \mathbf{R}^n$, выкарыстоўваючы апошнюю роўнасць, атрымліваем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(h^T F''(x)[(F^D)''(-F'(x)+tF''(x)h)]F''(x)h\right)|_{t=0} =\\ \left(h^T F''(x)[(F^D)''(-F'(x))]F''(x)h\right)' h =\\ \left(h^T F''(x)F''(x)^{-1}F''(x)h\right)' h =\\ \left(h^T F''(x)h\right)' h = \frac{d}{dt}h^T F''(x+th)h|_{t=0}\,.\end{aligned}$$

Адсюль, для ўсіх $x \in \operatorname{dom} F$ і $h \in \mathbf{R}^n$, мы маем

$$\begin{aligned}&\left|\frac{d}{dt}\left(h^T F''(x)[(F^D)''(-F'(x)+tF''(x)h)]F''(x)h\right)|_{t=0}\right| =\\ &\left|\frac{d}{dt}h^T F''(x+th)h|_{t=0}\right| \le 2\left(h^T F''(x)h\right)^{3/2} =\\ &2\left(h^T F''(x)[(F^D)''(-F'(x))]F''(x)h\right)^{3/2}.\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Калі пара (x, h) прабягае ўсе значэнні з $\operatorname{dom} F \times \mathbf{R}^n$, то $(-F'(x), F''(x)h)$ прабягае ўсе значэнні з $\operatorname{dom} F^D \times \mathbf{R}^n$; таму ўмова (B3) выконваецца.

Нам засталося паказаць, што

$$F^D(-F'(x^i)) \to \infty, \quad \text{калі} \quad -F'(x^i) \to \xi \in \operatorname{bd} C^D.$$

Дапусцім адваротнае, што паслядоўнасць $\{F^D(-F'(x^i))\}$ абмежавана зверху. Тады па (3.3.30) паслядоўнасць $\{F(x^i)\}$ абмежавана знізу і, згодна леме 3.3.1,

$$x^i = \arg\min\{F(x)\,:\,x \in D(-F'(x^i))\}.$$

Іншымі словамі, функцыя $F(x)$ абмежавана знізу на ўсіх падмноствах $D(-F'(x^i))$. Таму $F(x)$ абмежавана знізу і на мностве $D(\xi)$. Адсюль па леме 3.3.1 вынікае, што $\xi = -F'(y)$ для нейкага $y \in \operatorname{dom} F$. Значыць $\xi \in \operatorname{int} C^D$, а гэта супярэчыць таму, што $\xi \in \operatorname{bd} C^D$. □

3.3.4 Свойствы самаўзгодненых бар'ераў

Самаўзгодненыя бар'еры маюць шэраг дадатковых карысных уласцівасцей, якія інтэнсіўна выкарыстоўваюцца ў метадах унутранай кропкі.

Лема 3.3.2 *Няхай $\phi \in \mathbf{SSC}(K)$ ($\phi \not\equiv const$) ёсць аднамерная функцыя з* $\operatorname{dom} \phi = (a, b)$ *($a < b$). Калі $x \in (a, b)$ і $\phi'(x) > 0$, то $\phi'(x) \le \frac{K^2}{b-x}$.*

Доказ. Для ўсіх $t \in (a, b)$ маем $\phi''(t) > 0$ (згодна (B2)) і $(\phi'(t))^2/\phi''(t) \le K^2$ (згодна (B4)). Няхай

$$\psi(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \phi'(t)\,, \quad \eta(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{K^2\psi(x)}{K^2 - (t-x)\psi(x)}\,.$$

Паколькі

$$\psi'(t) \ge \frac{\psi^2(t)}{K^2}\,, \quad \eta'(t) = \frac{\eta^2(t)}{K^2}\,, \quad \psi(x) = \eta(x),$$

то, пачынаючы з кропкі x, у якой $\psi(x) = \eta(x)$, хуткасць роста функцыі ψ не меншая хуткасці роста функцыі η. Таму $\psi(t) \ge \eta(t)$ для ўсіх $t \ge x$, такіх, што ψ і η карэктна азначаны ў кропцы t. Такім чынам, $K^2 - (b-x)\phi'(x) \ge 0$. $\square$

Абазначым праз

$$\pi_y(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf \left\{ t \ge 0 \,:\, y + \frac{1}{t}(x - y) \in S \right\}$$

функцыю Мінкоўскага выпуклага мноства $S \subseteq \mathbf{R}^n$ з полюсам у кропцы $y \in \operatorname{int} S$. Геаметрычна велічыню $\pi_y(x)$ можна ўявіць наступным чынам: праводзім прамую праз кропкі x і y; няхай z ёсць перасячэнне гэтай прамой з $\operatorname{bd} S$ у напрамку $x - y$; тады $\pi_y(x) = \|y - x\| / \|y - z\|$.

Тэарэма 3.3.6 *Няхай $F \in \mathbf{SSC}(K)$, $x, y \in \operatorname{dom} F$ і $h \in \mathbf{R}^n$. Тады выконваюцца наступныя свойствы:*

$$\frac{K^2\pi_y(x)}{\pi_y(x) - 1} \le F'(x)^T(y - x) \le K^2\,, \tag{3.3.34}$$

$$|F'(x)^T h| \le \frac{K^2}{1 - \pi_y(x)} \|h\|_{F''(y)}\,, \tag{3.3.35}$$

$$\|F'(x)\|_{F''(y)^{-1}} \le \frac{K^2}{1 - \pi_y(x)}\,, \tag{3.3.36}$$

$$\operatorname{dom} F \subset \operatorname{ell}(x(F), F''(x(F)), 1 + 3K^2). \tag{3.3.37}$$

Доказ. Няхай

$$\Delta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{t \in \mathbf{R}: \ y + t(x-y) \in \mathrm{dom}\, F\} = (a, b).$$

Так як $x, y \in \mathrm{dom}\, F$ і $\mathrm{dom}\, F$ — адкрытае выпуклае мноства, то $a < 0$ і $b = 1/\pi_y(x) > 1$. Разгледзім функцыю $\phi(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F(y + t(x-y))$. Згодна пункту а) тэарэмы 3.3.2, $\phi \in \mathbf{SSC}(K)$ з $\mathrm{dom}\, \phi = \Delta$.

Дакажам (3.3.34). Гэтыя няроўнасці відавочны ў выпадку, калі $\phi \equiv const$. Таму дапусцім, што $\phi \not\equiv const$. Спачатку праверым левую няроўнасць з (3.3.34). Зразумела, што яна справядліва ў выпадку, калі $F'(x)^T(x-y) \leq 0$. Таму дапусцім, што $F'(x)^T(x-y) > 0$. Так як $F'(x)^T(x-y) = \phi'(1) > 0$, то, згодна леме 3.3.2, маем $\phi'(1) \leq K^2/(b-1)$; таму левая частка (3.3.34) выконваецца.

Цяпер дакажам няроўнасць $F'(y)^T(x-y) \leq K^2$, якая адрозніваецца ад правай часткі няроўнасці (3.3.34) толькі ў абазначэннях. Дапусцім, што $F'(y)^T(x-y) = \phi'(0) > 0$; інакш патрэбная няроўнасць трывіяльна выконваецца. Зноў па леме 3.3.2 атрымліваем

$$F'(y)^T(x-y) = \phi'(0) \leq \frac{K^2}{b} \leq K^2.$$

Дакажам цяпер (3.3.35). Па тэарэме 3.1.2 (пункт а)), адкрыты эліпсоід $E = \mathrm{int}\ \mathrm{ell}(y, F''(y), 1)$ належыць $\mathrm{dom}\, F$. Няхай $\hat{y}$ ёсць кропка на прамені $[y, x-y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \ : \ z = y + t(x-y), \ t \geq 0\}$ такая, што x ляжыць паміж y і $\hat{y}$, і няхай $\hat{E}$ ёсць вобраз E пры пераўтварэнні падабенства з цэнтрам у $\hat{y}$ і каэфіцыентам $\alpha(\hat{y}) = \|x - \hat{y}\|/\|y - \hat{y}\|$ (гл. мал. 3.2). Тады

$$\hat{E} = \mathrm{int}\ \mathrm{ell}(x, F''(y), \alpha(\hat{y})) \subset \mathrm{dom}\, F\,.$$

Няхай $0 < \hat{\alpha} < \alpha(\hat{y})$, $\hat{h} = h/\|h\|_{F''(y)}$ і няхай $z = x - \hat{\alpha}\hat{h}$. Паколькі $z \in \mathrm{dom}\, F$ і $\pi_z(x) \leq \frac{1}{2}$, то, згодна (3.3.34), маем $|F'(x)^T(x-z)| \leq K^2$, ці $\|F'(x)^T h\| \leq \frac{K^2}{\hat{\alpha}}\|h\|_{F''(y)}$. Так як

$$\alpha(\hat{y}) = \frac{\|\hat{y} - x\|}{\|\hat{y} - y\|} = 1 - \frac{\|y - x\|_{F''(y)}}{\|\hat{y} - y\|_{F''(y)}}\,,$$

калі $\hat{y}$ набліжаецца да кропкі $\overline{y}$ перасячэння праменя $[y, x-y)$ з граніцай мноства $\mathrm{cl}(\mathrm{dom}\, F)$ (гл. мал. 3.2), а $\hat{\alpha}$ набліжаецца да $\alpha(\hat{y})$, то велічыня $K^2/\hat{\alpha}$ набліжаецца да $K^2/(1 - \pi_y(x))$; такім чынам, $\|F'(x)^T h\| \leq K^2 \|h\|_{F''(y)}/(1 - \pi_y(x))$.

Прымяняючы (3.3.35) для $h = F''(y)^{-1}F'(x)$, маем

$$F'(x)F''(y)^{-1}F'(x) \leq \frac{K^2}{1 - \pi_y(x)}\|F''(y)^{-1}F'(x)\|_{F''(y)}\,,$$

ці $\|F'(x)\|_{F''(y)^{-1}} \leq K^2/(1 - \pi_y(x))$. Гэта даказвае. (3.3.36).

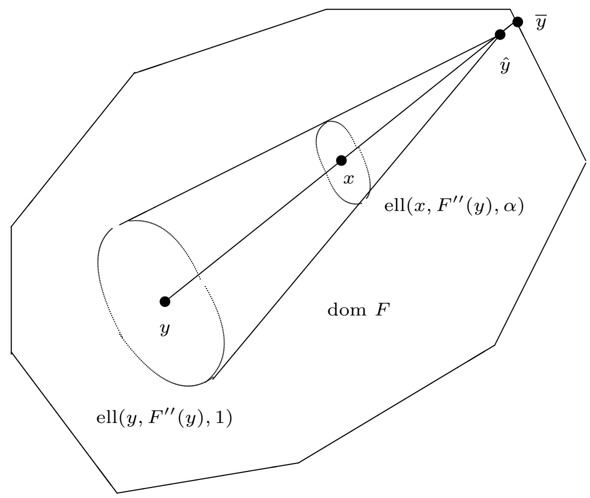


Рис. 3.2: Ілюстрацыя да доказу тэарэмы 3.3.6

Каб даказаць (3.3.37), дастаткова паказаць, што, калі $h \in \mathbf{R}^n$ і $h^T F''(x)h = 1$, то кропка $x(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(F) + th$ не належыць dom F для $t = 1 + 3K^2$. Няхай $\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} F'(x(t))^T h$; тады $\phi(0) = 0$. Згодна правілу выбару h і па (3.1.2), маем $\phi'(t) \geq (1-t)^2$. Адкуль $\phi(t) \geq t(3 - 3t + t^2)/3$, $0 \leq t < 1$. У той жа самы час, згодна (3.3.34), атрымліваем

$$t\phi(t) \leq \frac{K^2 \pi_{x(F)}(x(t))}{1 - \pi_{x(F)}(x(t))} \,.$$

З усяго гэтага вынікае, што

$$\pi_{x(F)}(x(1)) \geq \frac{1}{1 + 3K^2} \,,$$

і $x(1 + 3K^2) \notin \text{dom } F$. □

3.4 Практыкаванні

1. Няхай $F(x) = -\sum_{i=1}^{n} \ln(b_i - A_i x)$ — стандартны лагарыфмічны бар'ер для шматгранніка $P_{\leq}(A, b)$, дзе $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^m$. Дакажыце, што

   а) *аб'ёмны бар'ер*

   $$FV(x) = O(1)\sqrt{m} \ln(\det F''(x)),$$

   з dom $FV = P_{<}(A, b)$ належыць $\mathbf{SSC}(O(\sqrt{n}\sqrt[4]{m}))$;

b) *камбінаваны аб'ёмны бар'ер*

$$FC(x) = O(1)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}FV(x) + \sqrt{\frac{m}{n}}F(x)\right),$$

з $\mathrm{dom}\, FC = P_<(A,b)$, належыць $\mathbf{SSC}(O(\sqrt[4]{nm}))$. Для бар'ераў, прыведзеных у пунктах a) і b), ацаніце складанасць вылічэння градыента і матрыцы Гессэ.

2. Няхай

$$D = \{(x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \; : \; t \geq \|x\|^p\}$$

ёсць надграфік функцыі $\|x\|^p$. Дакажыце, што

a) для $p \geq 2$ функцыя

$$F_p(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\ln\left(t^{\frac{2}{p}} - x^T x\right) - \ln t$$

з'яўляецца $\sqrt{2}$-самаўзгодненым бар'ерам для мноства D;

b) для $1 \leq p \leq 2$ функцыя

$$G_p(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\ln\left(t^{\frac{2}{p}} - x^T x\right) - 2\ln t$$

з'яўляецца $\sqrt{3}$-самаўзгодненым бар'ерам для мноства D.

Глава 4

Метады ўнутранай кропкі

Нягледзечы на тое, што на практыцы сімплекс-метад працуе вельмі добра (звычайна колькасць ітэрацый расце лінейна з ростам памеру задачы), практычна для ўсіх вядомых яго варыянтаў існуюць прыклады задач ЛП, на якіх метад выконвае экспаненцыяльную колькасць ітэрацый (гл. параграф 2.3). Зразумела, што такая сітуацыя не магла задаволіць у першую чаргу тэарэтыкаў. Праблема пабудовы палінаміяльнага алгарытма для рашэння задачы ЛП разглядаецца ў наступнай пастаноўцы.

Дадзена задача ЛП у нармальнай форме

$$\max\{c^T x : Ax \le b\}, \tag{4.0.1}$$

калі $c \in \mathbf{Z}^n$, $A \in M_{m,n}(\mathbf{Z})$, $b \in \mathbf{Z}^m$, $n \le m$. *Памер задачы* (4.0.1) ацэньваецца велічынёй

$$L = \operatorname{size} A + \operatorname{size} c + \operatorname{size} b\,. \tag{4.0.2}$$

Алгарытм ЛП называецца *палінаміяльным*, калі для рашэння любой індывідуальнай задачы (4.0.1) ён выконвае палінаміяльную па L колькасць аперацый над лікамі палінаміяльнай па L даўжыні.

Часта пры ацэнцы складанасці алгарытмаў ЛП зручней працаваць з іншымі характарыстыкамі памеру задачы, якія мажарыруюцца велічынёй L. Калі абазначыць праз

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{\|c\|_\infty, \|b\|_\infty, \max_{1\le j\le n} \|A^j\|_\infty\right\} \tag{4.0.3}$$

максімум модуляў каэфіцыентаў задачы ЛП (у далейшым h называем *вышынёй* задачы), то

$$l \stackrel{\text{def}}{=} \lceil \log h + 1 \rceil \tag{4.0.4}$$

ёсць максімальная колькасць двайковых знакаў у запісе каэфіцыентаў задачы. Абазначым праз $\Delta = \Delta(D)$ канстанту, якая мажарыруе модулі дэтэрмінантаў пашыранай матрыцы

$$D = \begin{bmatrix} c & 0 \\ A & b \end{bmatrix}$$

каэфіцыентаў задачы ЛП (4.0.1). Пры ацэнцы складанасці алгарытмаў ЛП вельмі часта ўзнікае велічыня $\log(n\Delta)$, якую, у сваю чаргу, можна ацаніць з няроўнасці Адамара. Для любой квадратнай падматрыцы D' матрыцы D маем

$$|\det(D')| \le \|D'_1\| \ldots \|D'_k\| \le (\sqrt{n}h)^n \,.$$

Таму пры $n \ge 2$ справядліва ацэнка

$$\log(n\Delta) \le n\log(nh) \le n\log(n) + nl \le L \,. \tag{4.0.5}$$

Доўгі час пытанне аб існаванні палінаміяльнага метада ЛП было адкрытым. Станоўчы адказ на яго ў 1979 годзе атрымаў Л.Г. Хачыян[1]. Ён паказаў, што любы палінаміяльны па $(m, n, \log(\frac{1}{\epsilon}))$ (дзе ϵ — патрэбная дакладнасць) метад прыблізнага рашэння задачы ЛП з'яўляецца палінаміяльным метадам ЛП, калі для яго рэалізацыі дастаткова весці вылічэнні з палінаміяльнай па L разраднасцю. Больш дакладна, было паказана, як пераўтварыць "дастаткова добрае"ϵ-прыблізнае рашэнне задачы (4.0.1) у яе дакладнае рашэнне за час $O(m^2n)$ (гл. працэдуру *refine* на мал. 1.4). Першым палінаміяльным алгарытмам лінейнага праграмавання быў *метад эліпсоідаў*, першапачаткова распрацаваны для рашэння задач выпуклага праграмавання. Аднак вылічальныя эксперыменты з метадам паказалі, што ён не з'яўляецца канкурэнтам сімплекс-метаду. Нейкі час, пакуль не былі знойдзены іншыя палінаміяльныя алгарытмы, гэты факт быў найбольш сур'ёзным контраргументам сцвярджэнню аб тым, што палінаміяльны метад і практычны метад — сінонімы.

Пасля таго, як Н. Кармаркар у 1984 годзе[2] прапанаваў новы палінаміяльны алгарытм ЛП — праектыўны метад, які выдатна праявіў сябе на практыцы, у лінейным праграмаванні пачаўся бурны прагрэс. Наступным істотным крокам быў алгарытм Дж. Рэнегара (1986 г.)[3], колькасць ітэрацый якога з ростам памеру задачы расце як корань квадратны ад яго. Выдатныя тэарэтычныя ацэнкі для складанасці гэтых метадаў, а таксама іх канкурэнтаздольнасць на рэальных задачах у параўнанні з сімплекс-метадам вызначылі вельмі інтэнсіўную актыўнасць у накірунку распрацоўкі новых падобных метадаў (бібліяграфічныя даведкі чытач можа знайсці ў [10] і [11]). Гэтыя метады стартуюць з кропкі ўнутры дапушчальнага абсягу і працягваюць рухацца да кропкі оптымума таксама па ўнутраных кропках. Таму іх называюць *метадамі ўнутранай кропкі*. Сярод метадаў ўнутранай кропкі можна выдзеліць дзве асноўныя групы. Да першай групы адносяцца *праектыўныя метады*, якія фармулююць аптымізацыйную задачу ў так званай *праектыўнай форме* і на кожнай ітэрацыі рашаюць нейкую апраксімацыйную задачу, каб з бягучай унутранай кропкі знайсці напрамак

[1] Л.Г. Хачиян. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании. – ЖВМ и МФ, 1980, Т. 20, с. 51–68.

[2] N.K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. – Combinatorica, 1984, N 4, pp. 373–395.

[3] J. Renegar. A polynomial-time algorithm, based on Newton's method for linear programming. – Math. Progr., 1988, V 40, N 1, pp. 59–93.

убывання патэнцыяльнай функцыі. Метады другой групы зводзяць задачу ўмоўнай аптымізацыі да нейкай параметрычнай задачы безумоўнай аптымізацыі (напрыклад, выкарыстоўваючы варыянт метада штрафаў). Звычайна такія метады называюцца *траекторнымі*, ці *гаматопнымі*.

4.1 Метад бар'ераў

Метады штрафаў, як спосабы рашэння задачы аптымізацыі з абмежаваннямі шляхам звядзення яе да параметрычнай задачы без абмежаванняў, вядомы даўно. Але да работы Дж. Рэнегара (гл. зноску на стар. 104) амаль не існавала ніякіх тэарэтычных рэкамендацый адносна выбару метада рашэння атрыманай задачы безумоўнай аптымізацыі. Трэба аднак зазначыць, што вылічальныя эксперыменты, па меншай меры ў выпадку гладкіх выпуклых абмежаванняў, былі на карысць метада Ньютана.

4.1.1 Аптымальныя траекторыі

Будзем разглядаць задачу

$$\inf_{x \in \operatorname{dom} F} f(x)\,, \tag{4.1.6}$$

дзе $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$ ёсць выпуклая квадратычная функцыя (калі $Q = 0$, то $f(x) = c^T x$ лінейная) і $F \in \mathbf{SSC}(K)$. Для прастаты выкладання будзем лічыць, што мноства $\operatorname{dom} F$ абмежавана.

Няхай $h : \operatorname{dom} F \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ задае адлюстраванне

$$h(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} tf(x) + F(x). \tag{4.1.7}$$

Так як $h(x,t)$ з'яўляецца строга выпуклай функцыяй аргумента x, то пры кожным фіксаваным t яна мае адзіны мінімум, які абазначым праз $x(t)$. Іншымі словамі, функцыя

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\min\{h(x,t) :\ x \in \operatorname{dom} F\} \tag{4.1.8}$$

карэктна азначана для ўсіх $t \geq 0$. Зразумела, што $x(0) = x(F)$. У далейшым вектарную функцыю $x(t)$ будзем называць *аптымальнай траекторыяй* (ці проста *траекторыяй*) задачы (4.1.6).

Тэарэма 4.1.1 *Калі $F(x)$ абмежавана знізу, то*

$$\lim_{t\to\infty} f(x(t)) = \inf_{x\in\operatorname{dom} F} f(x)\,.$$

Доказ. Для кожнага $\epsilon > 0$ існуе кропка $x^\epsilon \in \operatorname{dom} F$, такая, што

$$f(x^\epsilon) \leq \inf_{x\in\operatorname{dom} F} f(x) + \epsilon\,.$$

Па азначэнню, для кожнага $t > 0$,

$$tf(x^\epsilon) + F(x^\epsilon) \geq tf(x(t)) + F(x(t)),$$

ці

$$f(x(t)) - f(x^\epsilon) \leq \frac{1}{t}\left(F(x^\epsilon) - F(x(t))\right) \leq \frac{1}{t}(F(x^\epsilon) - F(x(F))).$$

Таму

$$\lim_{t\to\infty} f(x(t)) \leq f(x^\epsilon) \leq \inf_{x\in\mathrm{dom}\ F} f(x) + \epsilon.$$

Так як апошняя няроўнасць справядліва для ўсіх $\epsilon > 0$, мы маем $\lim_{t\to\infty} f(x(t)) = \inf_{x\in\mathrm{dom}\ F} f(x)$. □

Лема 4.1.1 *Для ўсіх $t > 0$ выконваецца роўнасць $f'(x(t)) = -\frac{1}{t}F'(x(t))$.*

Доказ. Так як $x(t) \in \mathrm{dom}\ F$ і $\mathrm{dom}\ F$ — адкрытае мноства, то $h_x(x(t), t) = tf'(x(t)) + F'(x(t)) = 0$. □

Установім, з якой хуткасцю мы будзем набліжацца да аптымальнага рашэння задачы (4.1.6), калі будзем рухацца ўздоўж аптымальнай траекторыі.

Лема 4.1.2 *Калі $F \in \mathbf{SSC}(K)$, $t > 0$, то для ўсіх $x \in \mathrm{dom}\ F$*

$$f(x(t)) - f(x) \leq \frac{K^2}{t}.$$

Доказ. Так як f выпуклая, то згодна леме 4.1.1 і з улікам (3.3.34) атрымліваем

$$f(x(t)) - f(x) \leq f'(x(t))^T(x(t) - x) = \frac{1}{t}F'(x(t))^T(x - x(t)) \leq \frac{K^2}{t}.$$

□

Зразумела, што на практыцы мы можам вылічваць кропкі аптымальнай траекторыі толькі прыблізна.

Лема 4.1.3 *Калі $\|x(t) - x\|_{h_{xx}(x)} \leq r < 1$, то*

$$f(x) - f(x(t)) \leq \frac{1}{t}\left(Kr + \frac{r^2}{1-r}\right).$$

Доказ. Так як $f'(x) = \frac{1}{t}(h_x(x,t) - F'(x))$, то

$$\begin{aligned} f(x) - f(x(t)) &\leq f'(x)^T(x - x(t)) \\ &= \frac{1}{t}\left(h_x(x,t)^T(x - x(t)) - F'(x)^T(x - x(t))\right). \end{aligned}$$

Паколькі для фіксаванага t функцыя $h(x,t)$ з'яўляецца строга самаўзгодненай, то па тэарэме 3.1.3 (няроўнасць (3.1.8))

$$\begin{aligned}
& h_x(x,t)^T(x-x(t)) = (h_x(x,t) - h_x(x(t),t))^T(x-x(t)) \\
= \;& (x-x(t))^T h_{xx}(x)(x-x(t)) + \\
& (x-x(t))^T \left(h_x(x,t) - h_x(x(t),t) - h_{xx}(x)(x-x(t))\right) \\
\leq \;& r^2 + \|x-x(t)\|_{h_{xx}(x)} \times \\
& \|h_x(x,t) - h_x(x(t),t) - h_{xx}(x)(x-x(t))\|_{h_{xx}(x)^{-1}} \\
\leq \;& r^2 + r\frac{r^2}{1-r} = \frac{r^2}{1-r}\,.
\end{aligned}$$

Для завяршэння доказу ацэнім

$$-F'(x)^T(x-x(t)) \leq \|F'(x)\|_{F''(x)^{-1}}\|x-x(t)\|_{F''(x)} \leq Kr\,.$$

Тут мы выкарысталі той факт, што $\|v\|_{F''(x)} \leq \|v\|_{h_{xx}(x,t)}$ для любых $v \in \mathbf{R}^n$. □

Тэарэма 4.1.2 *Калі $t > 0$ і $\|x(t) - x\|_{h_{xx}(x)} \leq r$, $r \in [0,1)$, то для любога $y \in \mathrm{dom}\, F$ мае месца наступная няроўнасць*

$$f(x) - f(y) \leq \frac{1}{t}\left(K^2 + Kr + \frac{r^2}{1-r}\right)\,.$$

Доказ. З улікам лем 4.1.2 і 4.1.3 маем

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= f(x) - f(x(t)) + f(x(t)) - f(y) \\
&\leq \frac{1}{t}\left(K^2 + Kr + \frac{r^2}{1-r}\right)\,.
\end{aligned}$$

□

Наступная тэарэма паказвае, як можна адсочваць кропкі аптымальнай траекторыі з патрэбнай дакладнасцю.

Тэарэма 4.1.3 *Няхай $x \in \mathrm{dom}\, F$, $\rho, r \in [0,1)$, $t > 0$, і $\|x(t)-x\|_{h_{xx}(x,t)} \leq \rho r$. Тады $\|x(\tau) - x\|_{h_{xx}(x,\tau)} \leq r$ для $\tau \geq 0$, калі выконваецца адна з наступных умоў:*

a) $f(x) = c^T x$ лінейная функцыя і

$$K\left|\frac{\tau - t}{t}\right| \leq \frac{(1-\rho)(1-\rho r)r}{1 + (1-\rho)(1-\rho r)r}\,;$$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x$ выпуклая квадратычная функцыя, $\tau \geq t$, $\overline{\rho} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \rho\sqrt{(K+1)/K}$ і

$$\frac{\tau - t}{t} \leq \frac{(1-\overline{\rho})(1-\overline{\rho} r)r}{1 + (1-\overline{\rho})(1-\overline{\rho} r)r}\,;$$

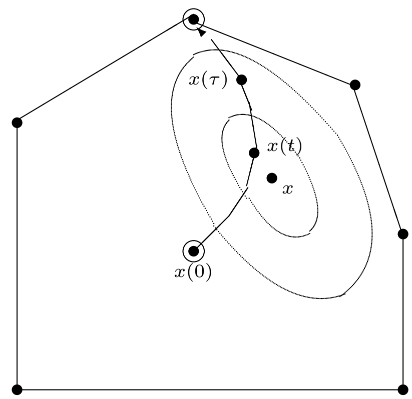


Рис. 4.1: Ілюстрацыя да тэарэмы 4.1.3

Доказ. Так як

$$h_x(x(t),t) = tf'(x(t)) + F'(x(t)) = 0\,,$$

то

$$h_x(x(t),\tau) = (\tau - t)f'(x(t)) + tf'(x(t)) + F'(x(t)) = -\frac{\tau - t}{t}F'(x(t))$$

і

$$\begin{aligned} \|h_x(x(t),\tau)\|_{h_{xx}(x(t),\tau)^{-1}} &\le \|h_x(x(t),\tau)\|_{F''(x(t))^{-1}} \\ &= \frac{|\tau - t|}{t}\|F'(x(t))\|_{F''(x(t))^{-1}} \\ &\le K\frac{|\tau - t|}{t}\,. \end{aligned}$$

У абодвух выпадках $K|(\tau - t)/t| < 1$. Калі мы абазначым $\|x(t) - x\|_{h_{xx}(x,\tau)}$ праз r', то згодна (3.1.2) і выніку 3.2.1 (пасля мы пакажам, што $r' < 1$), атрымліваем

$$\begin{aligned} \|x(\tau) - x\|_{h_{xx}(x,\tau)} &\le \|x(\tau) - x(t)\|_{h_{xx}(x,\tau)} + \|x(t) - x\|_{h_{xx}(x,\tau)} \\ &\le \frac{1}{1 - r'}\|x(\tau) - x(t)\|_{h_{xx}(x(t),\tau)} + r' \\ &\le \frac{1}{1 - r'}\frac{K\dfrac{|\tau - t|}{t}}{1 - K\dfrac{|\tau - t|}{t}} + r' \end{aligned}$$

а) Заўважаючы, што $h_{xx}(x,\tau) = h_{xx}(x,t) = F''(x)$, мы маем $r' \le \rho r < 1$ і

$$\|x(\tau) - x\|_{h_{xx}(x,\tau)} \le \frac{1}{1 - \rho r}\frac{K\dfrac{|\tau - t|}{t}}{1 - K\dfrac{|\tau - t|}{t}} + \rho r \le r\,.$$

b) Так як для ўсіх $v \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{h_{xx}(x,\tau)} &= v^T(\tau Q + F''(x))v \\
&\le v^T\left(tQ + F''(x) + \frac{\tau - t}{t}(tQ + F''(x))\right)v \\
&= \frac{\tau}{t}v^T(tQ + F''(x))v \\
&= \frac{\tau}{t}\|v\|^2_{h_{xx}(x,t)}\,,
\end{aligned}$$

то, у прыватным выпадку, справядліва няроўнасць $r' \le \sqrt{\frac{\tau}{t}}\rho r$. Акрамя таго, так як $1 < \frac{\tau}{t} < 1 + \frac{1}{K}$, то $r' < \sqrt{(K+1)/K}\,\rho r$. Далейшы аналіз аналагічны таму, што быў пры разглядзе пункта a), толькі замест ρ трэба падстаўляць велічыню $\overline{\rho} = \rho\sqrt{(K+1)/K}$. □

4.1.2 Апісанне алгарытма

Метад бар'ераў рухаецца ўздоўж аптымальнай траекторыіі $x(t)$, павялічваючы t на кожнай ітэрацыі.

Няхай $\rho \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{r}{1-2r}$. Пачынаючы з $t^{(0)} > 0$ і кропкі $x^{(0)} \in \mathrm{dom}\, F$, такой, што

$$\boxed{\|x(t^{(0)}) - x^{(0)}\|_{h_{xx}(x^{(0)},t^{(0)})} \le \rho r = \frac{r^2}{1-2r}\,,} \tag{4.1.9}$$

метад вылічвае наступную ітэрацыйную паслядоўнасць:

$$\boxed{\begin{aligned}
t^{(i)} &= \alpha(K,r)t^{(i-1)}\,, \\
x^{(i)} &= x^{(i-1)} - h_{xx}(x^{(i-1)}, t^{(i)})^{-1}h_x(x^{(i-1)}, t^{(i)})\,,
\end{aligned}} \tag{4.1.10}$$

дзе $\alpha(K,r)$ роўна

$$\boxed{\alpha_L(K,r) \overset{\mathrm{def}}{=} 1 + \frac{(1-\rho)(1-\rho r)r}{K(1+(1-\rho)(1-\rho r)r)}} \tag{4.1.11}$$

для лінейнай функцыі мэты, і, калі $\overline{\rho} = \rho\sqrt{(K+1)/K}$,

$$\boxed{\alpha_Q(K,r) \overset{\mathrm{def}}{=} 1 + \frac{(1-\overline{\rho})(1-\overline{\rho} r)r}{K(1+(1-\overline{\rho})(1-\overline{\rho} r)r)}} \tag{4.1.12}$$

для выпуклай квадратычнай функцыі мэты. Напрыклад, $\alpha_L(K, 1/5) > 1 + \frac{1}{10K}$.

Тэарэма 4.1.4 *Няхай $r \in (0, \frac{1}{2})$, $\rho = \frac{r}{1-2r}$, $\epsilon > 0$, і $t^{(0)} > 0$, $x^{(0)} \in \mathrm{dom}\, F$ задавальняюць (4.1.9). Тады метад бар'ераў, азначаны па (4.1.10), вылічвае ϵ-аптымальнае рашэнне задачы (4.1.6) за $N(\epsilon) = O(K\log(K/(t^{(0)}\epsilon)))$ ітэрацый.*

Доказ. Па індукцыі, выкарыстоўваючы вынік 3.2.2 і тэарэму 4.1.3, няцяжка паказаць, што для ўсіх $i > 0$ выконваюцца ўмовы:

$$\begin{aligned} x^{(i)} &\in \mathrm{dom}\ F\,, \\ \|x(t^{(i)}) - x^{(i-1)}\|_{h_{xx}(x^{(i-1)},t^{(i)})} &\le r\,, \\ \|x(t^{(i)}) - x^{(i)}\|_{h_{xx}(x^{(i)},t^{(i)})} &\le \rho r\,. \end{aligned}$$

Застаецца толькі ацаніць складанасць алгарытма. Па тэарэме 4.1.2

$$f(x^{(i)}) - \inf_{x \in \mathrm{dom}\ F} f(x) < \frac{2K^2}{t^{(i)}} = \frac{2K^2}{(\alpha(K,r))^i t^{(0)}}\,.$$

Велічыню $N(\epsilon)$ знойдзем з няроўнасці

$$\frac{2K^2}{(\alpha(K,r))^{N(\epsilon)} t^{(0)}} \le \epsilon\,.$$

Адкуль

$$N(\epsilon) = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{2K^2}{\epsilon t^{(0)}}\right)}{\ln \alpha(K,r)} \right\rceil\,.$$

Так як $\ln(1+t) \ge \frac{t}{e-1}$ для $0 \le t \le e-1$, то

$$\ln \alpha(K,r) \ge \frac{\alpha(K,r) - 1}{e-1} = O\left(\frac{1}{K}\right)$$

і таму $N(\epsilon) = O(K \log(K/(t^{(0)}\epsilon)))$. □

4.1.3 Стратэгія вялікіх крокаў

Тэарэтычнае значэнне для $\alpha(K,r)$ (як для лінейнай так і выпуклай квадратычнай функцыі мэты) хоць і гарантуе вельмі добрыя ацэнкі складанасці метада бар'ераў, але для практычнага выкарыстання з'яўляецца песімістычным; метад, які выкарыстоўвае тэарэтычнае значэнне параметра $\alpha(K,r)$ называюць *метадам малых крокаў.* Практычная рэалізацыя метада бар'ераў арыентуецца на значна большыя значэнні гэтага множніка. Зусім няцяжка распрацаваць версію метада бар'ераў, якая грунтуецца на *стратэгіі вялікіх крокаў.* Адзін з варыянтаў такой версіі прадстаўлены на мал. 4.2. Гэты алгарытм значна больш практычны за базавы варыянт метада бар'ераў, які рэалізуе стратэгію малых крокаў, аднак мае амаль што тую самую ацэнку складанасці ў найхужэйшым выпадку. Алгарытм можа выкарыстоўваць значна большы множнік α у параўнанні з прапаноўваемым тэорыяй. Пасля таго як параметр t павялічваецца, каб вярнуцца на аптымальную траекторыю, метад выклікае працэдуру *min_SSC* з мал. 3.1, якая,

```
barrier(r, ρ, γ, α, ε, f, F, K, t, x)
{
  for (; t < 2K²/ε ;) {
    t := αt;
    min_SSC(tf + F, γ, ρr);
}
```

Рис. 4.2: Метад бар'ераў, стратэгія вялікіх крокаў

у агульным выпадку, можа выканаць больш чым адну ітэрацыю метада Ньютана.

Далейшае паляпшэнне метада заключаецца ў тым, каб мяняць множнік α на кожнай ітэрацыі. Метад пачынае кожную ітэрацыю множаннем параметра t на α; выклікае працэдуру *min_SSC* каб вярнуцца на аптымальную траекторыю; множнік α павялічваецца ці памяншаецца у залежнасці ад колькасці ітэрацый, выкананых працэдурай *min_SSC*: калі было выканана мала ітэрацый, α павялічваецца, інакш, параметр памяншаецца.

4.1.4 Двухэтапны метад бар'ераў

У апісанні метада бар'ераў мы дапускалі, што нам загадзя вядома дастаткова добрая апраксімацыя $x^{(0)}$ кропкі траекторыі $x(t^{(0)})$. Усё ж для таго, каб тэорыя была сапраўды поўнай, трэба было б толькі патрабаваць каб была вядома нейкая ўнутраная кропка $x^{(0)} \in \mathrm{dom}\ F$, якая можа быць нават вельмі далёкай ад траекторыі $x(t)$. Зразумела, што, пачынаючы з кропкі $x^{(0)}$, з дапамогай алгарытма *min_SSC* (мал. 3.1) мы можам "выйсці"на траекторыю, а потым працягваць рашэнне метадам бар'ераў. Іншы, больш эфектыўны, падыход заключаецца ў выкарыстанні метада бар'ераў у *дзве стадыі* наступным чынам.

Заўважаючы, што $x^{(0)}$ ляжыць на аптымальнай траекторыі $y(t)$ (больш дакладна, $x^{(0)} = y(1)$) наступнай задачы

$$\inf_{y \in \mathrm{dom}\ F} -F'(x^{(0)})^T y\,, \tag{4.1.13}$$

мы можам прымяніць метад бар'ераў да задачы (4.1.13) "у адваротным накірунку *памяншаючы* параметр t замест яго павелічэння. Зазначым, што для лінейнай функцыі мэты гэта дазваляецца тэарэмай 4.1.3. Як рэзультат, мы атрымаем нейкую апраксімацыю $\tilde{x}$ для кропкі $x(F) = y(0)$. Гэта ёсць *папярэдні этап.* Для дастаткова малых $t > 0$ атрыманая кропка $\tilde{x}$ будзе дастаткова добрым прыбліжэннем для $x(t)$ і таму з яе можа пачаць працаваць асноўны варыянт метада бар'ераў (*галоўны этап*).

Апішам больш дэталёва папярэдні этап. Няхай $r \in (0, 1/2)$, $\rho \overset{\text{def}}{=} \frac{r}{1-2r}$, $t^{(0)} = 1$, $x^{(0)} \in \mathrm{dom}\ F$, $c = -F'(x^{(0)})$, $\delta > \frac{\rho r}{1-2\rho r}$. Метад будуе наступную ітэрацыйную паслядоўнасць:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} t^{(i)} & = & \overline{\alpha}(K,r)t^{(i-1)}\,, \\ x^{(i)} & = & x^{(i-1)} - F''(x^{(i-1)})^{-1}\left(t^{(i)}c + F'(x^{(i-1)})\right)\,, \end{array}} \tag{4.1.14}$$

дзе

$$\boxed{\overline{\alpha}(K,r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - \frac{(1-\rho)(1-\rho r)r}{K(1+(1-\rho)(1-\rho r)r)}\,.} \tag{4.1.15}$$

Метад спыняецца, калі $\Psi(F, x^{(i)}) \leq \delta/(1+\delta)$.

Хуткасць з'бягаемасці папярэдняга этапа метада бар'ераў вышэй, калі мноства $\mathrm{dom}\ F$ з'яўляецца сіметрычным вакол пачатковай кропкі $x^{(0)} \in \mathrm{dom}\ F$.

Сіметрыя абмежаванага выпуклага мноства $S \subset \mathbf{R}^n$ вакол кропкі $x \in \mathrm{int}\ S$ вымяраецца велічынёй

$$\mathrm{sym}(x,S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{t \in \mathbf{R}_+ \,:\, x + t(x-S) \subseteq S\}\,.$$

Геаметрычна, велічыню $\mathrm{sym}(x,S)$ можна ўявіць наступным чынам. Разгледзім лінію $\mathcal{L}$ праз кропку x; кропка x разбівае інтэрвал $S \cap \mathcal{L}$ на два інтэрвалы; дзелім даўжыню меншага інтэрвала на даўжыню большага; знаходзім мінімум гэтых дзеляў па ўсіх лініях $\mathcal{L}$, якія праходзяць праз кропку x; гэты мінімум і ёсць $\mathrm{sym}(x,S)$. Калі $\mathrm{sym}(x,S) = 1$, то мноства S *дасканала сіметрычнае* вакол x, а калі значэнне $\mathrm{sym}(x,S)$ блізкае да 0, то x знаходзіцца *адносна блізка* да граніцы мноства S. Відавочна, што $\mathrm{sym}(x,S) \leq 1 - \pi_y(x)$ для ўсіх $y \in S$, дзе π_y — функцыя Мінкоўскага мноства S з полюсам у кропцы y.

Для прастаты абазначым $\mathrm{sym}(x, \mathrm{dom}\ F)$ праз $\mathrm{sym}(x,F)$.

Лема 4.1.4 *Няхай $v, w \in \mathrm{dom}\ F$, $f(x) = -F'(v)^T x$, і $\|x(t) - w\|_{F''(w)} \leq r$. Тады*

$$\Psi(F,w) \leq \frac{r}{1-r} + \frac{tK^2}{\mathrm{sym}(v,F)}$$

Доказ. Па азначэнню $h(x,t) = -tF'(v)^T x + F(x)$; таму $F'(w) = h_x(w,t) + tF'(v)$ і $F''(w) = h_{xx}(w,t)$. Згодна выніку 3.2.1 і тэарэме 3.3.6 (няроўнасць (3.3.36)), мы маем

$$\begin{array}{rcl} \Psi(F,w) & = & \|F'(w)\|_{F''(w)^{-1}} \leq \|h_x(w,t)\|_{h_xx(w,t)^{-1}} + t\|F'(v)\|_{F''(w)^{-1}} \\ & \leq & \dfrac{r}{1-r} + \dfrac{tK^2}{1-\pi_w(v)} \leq \dfrac{r}{1-r} + \dfrac{tK^2}{\mathrm{sym}(v,F))}\,. \end{array}$$

□

Тэарэма 4.1.5 *Дапусцім, што $F \in \mathbf{SSC}(K)$, мноства $\mathrm{dom}\ F$ абмежавана, $r \in (0, \frac{1}{4})$, $\delta > \frac{\rho r}{1-2\rho r}$. Для кропкі $x^{(0)} \in \mathrm{dom}\ F$ папярэдні этап метада бар'ераў за $O(K\log(K/\mathrm{sym}(x^{(0)},F)))$ ітэрацый вылічвае кропку $\tilde{x} \in \mathrm{dom}\ F$, такую, што $\|x(F) - \tilde{x}\|_{F''(\tilde{x})} \leq \delta$.*

Доказ. Па індукцыі, выкарыстоўваючы вынік 3.2.2 і тэарэму 4.1.3, няцяжка даказаць, што для ўсіх $i > 0$ выконваюцца ўмовы:

$$\begin{aligned}&x^{(i)} \in \mathrm{dom}\, F\,,\\ &\|x(t^{(i)}) - x^{(i-1)}\|_{F''(x^{(i-1)})} \le r\,,\\ &\|x(t^{(i)}) - x^{(i)}\|_{F''(x^{(i)})} \le \rho r\,.\end{aligned}$$

Засталося ацаніць складанасць алгарытма. Няхай $\gamma = \delta/(1+\delta)$. Няхай $v = x^{(0)}$, $w = x^{(i)}$,

$$t^{(i)} \le \hat{t} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\left(\gamma - \dfrac{\rho r}{1-\rho r}\right)\mathrm{sym}(x^{(0)}, F)}{K^2}\,.$$

Па леме 4.1.4, так як

$$\|x(t^{(i)}) - w\|_{F''(w)} \le \rho r\,,$$

атрымліваем, што $\Psi(F, x^{(i)}) \le \gamma$. Згодна выніку 3.2.1, мы заключаем, што, калі $t^{(i)} \le \hat{t}$, то

$$\|x(F) - x^{(i)}\|_{F''(x^{(i)}} \le \frac{\gamma}{1-\gamma} = \delta.$$

Цяпер ацэнку $O\left(K \log(K/\,\mathrm{sym}(x^{(0)}, F))\right)$ на колькасць ітэрацый метада можна атрымаць з няроўнасці

$$t^{(i)} = (\overline{\alpha}(K,r))^i = (1 - O(1/K))^i \le \hat{t} = O\left(\mathrm{sym}(x^{(0)}, F)/K^2\right).$$

$\square$

Заўвага 4.1.1 *Папярэдні этап метада бар'ераў можна разглядаць як самастойны алгарытм для мінімізацыі самаўзгодненых бар'ераў. Такі варыянт метада Ньютана называюць гаматопным.*

4.1.5 Метад бар'ераў пры афінных абмежаваннях

Разгледзім наступную задачу

$$\begin{array}{rcl} c^T x & \to & \max \\ x & \in & \mathcal{L} + \S', \\ x & \in & \mathrm{dom}\ F, \end{array} \tag{4.1.16}$$

дзе $c \in \mathbf{R}^n$, $\mathcal{L}$ — лінейная падпрастора ў $\mathbf{R}^n$, $F \in \mathbf{SSC}(K)$ і $x^0 \in \mathrm{dom}\ F$.

Будзем лічыць, што $\mathcal{L} = \mathcal{R}(\mathcal{A}) + \S'$, дзе $m = \mathrm{rank}\,\mathcal{L} = \mathrm{rank}\,\mathcal{A}$. Цяпер мы можам запісаць задачу (4.1.16) у наступным выглядзе:

$$\begin{array}{rcl} \overline{c}^T y & \to & \max \\ y & \in & \mathrm{dom}\ \overline{F}, \end{array} \tag{4.1.17}$$

дзе $\overline{c} = A^T c$, $\overline{F}(y) = F(T(y))$, $T(y) = Ay + x^0$. Зразумела, што $y^0 = 0 \in \operatorname{dom} \overline{F}$. Так як па тэарэме 3.3.2 (пункт а)) $\overline{F} \in \mathbf{SSC}(K)$ і

$$\overline{F}'(y) = A^T F'(T(y)), \quad \overline{F}''(y) = A^T F''(T(y))A,$$

то ітэрацыйны працэс (4.1.10) метада бар'ераў у прымяненні да задачы (4.1.17) мы можам запісаць наступным чынам:

$$\begin{aligned} t^{(i)} &= \alpha(K,r)t^{(i-1)}, \\ y^{(i)} &= y^{(i-1)} - \overline{F}''(y^{(i-1)})^{-1}\left(t^{(i)}\overline{c} + \overline{F}'(y^{(i-1)})\right) \\ &= y^{(i-1)} - \left(A^T F''(T(y^{(i-1)}))A\right)^{-1} A^T \left(t^{(i)}c + F'(T(y^{(i-1)}))\right), \end{aligned}$$

дзе параметр $\alpha(K,r)$ азначаецца па формуле (4.1.11). Вяртаючыся да зменных x ($x^{(i)} = Ay^{(i)} + x^{(0)}$), атрымаем наступную ітэрацыйную паслядоўнасць:

$$\boxed{\begin{aligned} t^{(i)} &= \alpha(K,r)t^{(i-1)}, \\ h^{(i)} &= t^{(i)}c + F'(x^{(i-1)}), \\ x^{(i)} &= x^{(i-1)} - A\left(A^T F''(x^{(i-1)})A\right)^{-1} A^T h^{(i)}. \end{aligned}} \tag{4.1.18}$$

Так як для $u, v \in \mathbf{R}^m$ і $y \in \operatorname{dom} F$ справядліва роўнасць

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2_{\overline{F}(y)} &= (u-v)^T \overline{F}(y)(u-v) \\ &= (u-v)^T A^T F(T(y))A(u-v) \\ &= (T(u)-T(v))F(T(y))(T(u)-T(v)) \\ &= \|T(u)-T(v)\|^2_{F(T(y))}, \end{aligned}$$

то ітэрацыйны працэс (4.1.18) можна пачынаць з кропкі $x^{(0)} \in \operatorname{dom} F \cap (\mathcal{L} + \S')$ і параметра $t^{(0)} > 0$, якія задавальняюць умове (4.1.9). Двухэтапны метад бар'ераў можа пачаць працаваць з кропкі x^0. Папярэдні этап ў прымяненні да задачы (4.1.16) азначаецца паслядоўнасцю:

$$\boxed{\begin{aligned} t^{(i)} &= \overline{\alpha}(K,r)t^{(i-1)}, \\ h^{(i)} &= t^{(i)}c + F'(x^{(i-1)}), \\ x^{(i)} &= x^{(i-1)} - A\left(A^T F''(x^{(i-1)})A\right)^{-1} A^T h^{(i)}. \end{aligned}} \tag{4.1.19}$$

дзе $t^{(0)} = 1$, $x^{(0)} = x^0$, $\hat{c} = -F'(x^0)$, а параметр $\overline{\alpha}(K,r)$ азначаецца па формуле (4.1.15).

4.1.6 Метад бар'ераў для задачы выпуклага праграмавання

Будзем разглядаць задачу выпуклага праграмавання

$$\min\{f_0(x) \,:\, f_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,m;\ x \in D\}, \tag{4.1.20}$$

дзе f_i — выпуклыя функцыі ($i = 0,\dots,m$), а $D \subset \mathbf{R}^n$ ёсць "простае"выпуклае абмежаванае мноства (напрыклад, шар). Дапусцім, што задача (4.1.20) сумесна і вядомы

a) K-самаўзгоднены бар'ер F для D, кропка $x^0 \in \operatorname{int} D$, $\operatorname{sym}(x^0, D) \geq \delta > 0$;

b) канстанта U, такая, што

$$\begin{array}{rcl} f_i(x) & \leq & U \text{ для ўсіх } x \in D, \quad i = 1, \ldots, m, \\ |f_0(x)| & \leq & U \text{ для ўсіх } x \in D; \end{array}$$

c) K_i-самаўзгоднены бар'ер $F_i : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ для epi f, $i = 0, \ldots, m$.

Для $\epsilon > 0$ кропка $x \in D$ ёсць *ϵ-аптымальнае рашэнне* задачы (4.1.20), калі

$$f_0(x) - f^* \leq \epsilon \quad \text{i} \quad f_i(x) \leq \epsilon, \quad i = 1, \ldots, m,$$

дзе f^* — аптымальнае значэнне функцыі мэты ў задачы (4.1.20).

Дадзена $\epsilon \in (0, U)$. Пакладзем $\gamma(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon}{3U}$,

$$f_\epsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\gamma(\epsilon)(f_0(x) + U), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}.$$

Лема 4.1.5 *Кропка $x \in D$, якая задавальняе няроўнасці*

$$f_\epsilon(x) - \min_{y \in D} f_\epsilon(y) \leq \frac{\epsilon^2}{3U}, \tag{4.1.21}$$

з'яўляецца ϵ-аптымальным рашэннем задачы (4.1.20).

Доказ. Няхай x^* — аптымальнае рашэнне задачы (4.1.20). Тады, згодна b), мы маем

$$\min_{y \in D} f_\epsilon(y) \leq f_\epsilon(x^*) = \gamma(\epsilon)(f^* + U).$$

Такім чынам, калі кропка $x \in D$ задавальняе (4.1.21), то

$$f_i(x) \leq \gamma(\epsilon)(f^* + U) + \frac{\epsilon^2}{3U} \leq \frac{2\epsilon U}{3U} + \frac{\epsilon^2}{3U} \leq \epsilon, \quad i = 1, \ldots, m,$$

і

$$\gamma(\epsilon)(f_0(x) + U) \leq \gamma(\epsilon)(f^* + U) + \frac{\epsilon^2}{3U}.$$

Адкуль $f_0(x) \leq f^* + \epsilon$. □

Кропку x, якая задавальняе няроўнасці (4.1.21), мы можам знайсці, вырашыўшы з дакладнасцю ϵ наступную задачу

$$\min_{(x,t) \in D_\epsilon} t, \tag{4.1.22}$$

дзе

$$D_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : \ x \in D, \ f_\epsilon(x) \leq t \leq 2U\}.$$

Функцыя

$$F_\epsilon(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_0(x, t/\gamma(\epsilon) - U) + \sum_{i=1}^{m} F_i(x,t) + F(x) - \ln(2U - t)$$

ёсць самаўзгоднены бар'ер для мноства D_ϵ з параметрам $K_\epsilon \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=0}^{m} K_i^2 + K^2 + 1}$. Гэты факт вынікае з тэарэмы 3.3.2.

Нам засталося ўказаць унутраную кропку мноства D_ϵ. Паколькі $x^0 \in \mathrm{int}\ D$ і $f_\epsilon(x^0) \leq U$, то кропка $z = (x^0, 3/2U)$ належыць int D_ϵ. Пакажам, што $\mathrm{sym}(z, D_\epsilon) \geq \min\{\frac{1}{3}, \delta\}$. Сапраўды, калі $(x,t) \in D_\epsilon$, то $t \geq f_\epsilon(x) \geq 0$ і $t \leq 2U$; таму кропка $(x(s), t(s)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} z + s(z - (x,t))$ для ўсіх $s \in [0, \frac{1}{3}]$ задавальняе няроўнасці $U \leq t(s) \leq 2U$. Для $0 \leq s \leq \delta$ мы таксама маем $x(s) \in D$ (гл. a)). Таму для $0 \leq s \leq \min\{\frac{1}{3}, \delta\}$ маем $x(s) \in D$ і $f_\epsilon(x(s)) \leq U \leq t(s) \leq 2U$. Значыць, для $s = \min\{\frac{1}{3}, \delta\}$ кропка $z + s(z - (x,t))$ належыць D_ϵ для ўсіх $(x,t) \in D_\epsilon$.

Такім чынам, па тэарэмах 4.1.4 і 4.1.5, пачынаючы з кропкі $(x^0, \frac{3}{2}U)$, мы можам вырашыць задачу (4.1.22) з дакладнасцю $\epsilon^2/(3U)$ двухстадыйным метадам бар'ераў, выканаўшы ў суме

$$N(\epsilon) \stackrel{\mathrm{def}}{=} O\left(K_\epsilon \ln \frac{UK_\epsilon}{\epsilon\delta}\right)$$

ітэрацый на папярэднім і асноўным этапах. Падсумоўваючы сказанае, мы фармулюем

Тэарэма 4.1.6 *Пры дапушчэннях a), b) і c) метад бар'ераў знаходзіць ϵ-аптымальнае рашэнне задачы выпуклага праграмавання (4.1.20) за час*

$$O\left(n^3 T_f K_\epsilon \ln \frac{UK_\epsilon}{\epsilon\delta}\right),$$

дзе T_f — складанасць вылічэння градыента і матрыцы Гессе функцыі $F_\epsilon(x,t)$.

Задача выпуклага квадратычнага праграмавання

Разгледзім задачу *выпуклага квадратычнага праграмавання* ў наступнай пастаноўцы:

$$\begin{array}{rcl} f_0(x) & \to & \min \\ f_i(x) & \leq & 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \|x\| & \leq & R, \end{array} \tag{4.1.23}$$

дзе $R > 0$; $f_i(x) = \frac{1}{2}x^T Q_i x + c_i^T x + d_i$, $Q_i \in SM_n^+$, $c_i \in \mathbf{R}^n$, $d_i \in \mathbf{R}$ $(0 = 1, \ldots, m)$.

Задача (4.1.23) з'ўляецца прыватным выпадкам задачы выпуклага праграмавання (4.1.20). Канкрэтызум схему, распрацаваную вышэй для рашэння задачы (4.1.20), у дачыненні да задачы (4.1.23).

Так як цяпер $D = B(0, R)$, то (гл. параграф 3.3.1, прыклад 3)

$$F(x) = -\ln(R^2 - x^T x),\ K = 1; \quad x^0 = 0,\ \delta = 1.$$

Для $i = 0, \ldots, m$ бар'еры F_i азначаюцца па правілу:

$$F_i(x, t) = -\ln(t - f_i(x)),\ K_i = 1$$

(гл. параграф 3.3.1, прыклад 3). Таму

$$\begin{aligned} F_\epsilon(x, t) &= -\ln\left(t/\gamma(\epsilon) - U - f_0(x)\right) - \sum_{i=1}^m \ln(t - f_i(x)) \\ &\quad - \ln(R^2 - x^T x) - \ln(2U - t) \end{aligned}$$

і $K_\epsilon = \sqrt{m+3}$. Градыент і матрыца Гессэ функцыі F_ϵ азначаюцца па формулах:

$$(F_\epsilon(x, t))' = \left(\begin{array}{c} -\dfrac{1}{t - \gamma(\epsilon)(U + f_0(x))} - \displaystyle\sum_{i=1}^m \dfrac{1}{t - f_i(x)} + \dfrac{1}{2U - t} \\ \dfrac{f_0'(x)}{t/\gamma(\epsilon) - U - f_0(x)} - \displaystyle\sum_{i=1}^m \dfrac{f_i'(x)}{t - f_i(x)} + \dfrac{x}{R^2 - x^T x} \end{array} \right)$$

і

$$\begin{aligned} (F_\epsilon(x, t)_{tt} &= \frac{1}{\left(t - \gamma(\epsilon)(U + f_0(x))\right)^2} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{(t - f_i(x))^2} + \frac{1}{(2U - t)^2}\,, \\ (F_\epsilon(x, t)_{tx} &= -\frac{f_0'(x)}{\left(t/\gamma(\epsilon) - U - f_0(x)\right)^2} - \sum_{i=1}^m \frac{f_i'(x)}{(t - f_i(x))^2}\,, \\ (F_\epsilon(x, t)_{xx} &= \frac{f_0''(x)}{t/\gamma(\epsilon) - U - f_0(x)} + \frac{f_0'(x)(f_0'(x))^T}{\left(t/\gamma(\epsilon) - U - f_0(x)\right)^2} + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \left(\frac{f_i''(x)}{t - f_i(x)} + \frac{f_i'(x)(f_i'(x))^T}{(t - f_i(x))^2} \right) + \\ &\quad \frac{1}{R^2 - x^T x} I + \frac{x x^T}{(R^2 - x^T x)^2}\,, \end{aligned}$$

дзе

$$\begin{aligned} (F_\epsilon(x, t)_{tt} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_\epsilon(x, t)\,, \\ (F_\epsilon(x, t)_{tx} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial x_1} F_\epsilon(x, t), \ldots, \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial x_n} F_\epsilon(x, t) \right)\,, \\ (F_\epsilon(x, t)_{xx} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} F_\epsilon(x, t) \right]_{i,j=1,\ldots,n}. \end{aligned}$$

З улікам таго, што градыент і матрыца Гессэ функцыі F_ϵ могуць быць вылічаны за час $O(mn^2)$ ($f_i'(x) = Q_i x + c_i$, $f_i''(x) = Q_i$), то з тэарэмы 4.1.6 адразу вынікае наступны рэзультат.

Тэарэма 4.1.7 *Метад бар'ераў знаходзіць ϵ-аптымальнае рашэнне задачы квадратычнага праграмавання (4.1.23) за час*

$$O\left(\sqrt{m}(mn^2+n^3)\ln\frac{mU}{\epsilon}\right).$$

4.1.7 Метад бар'ераў для задачы паўазначанага праграмавання

Будзем разглядаць задачу паўазначанага праграмавання ў нармальнай форме:

$$\begin{array}{rcl} c^T x & \to & \max \\ \sum_{j=1}^{n} A^j x_j & \leq_{SM_+^m} & B\,, \end{array} \tag{4.1.24}$$

дзе $c \in \mathbf{R}^n$, $B \in SM^m$, $A^j \in SM^m$ ($j = 1, \ldots, n$). У якасці бар'ера для дапушчальнага абсягу задачы (4.1.24) возьмем функцыянал (гл. параграф 3.3.1)

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\ln\det\left(B - \sum_{j=1}^{n} A^j x_j\right).$$

Апішам паслядоўнасць крокаў, якія трэба выканаць на i-й ітэрацыі метада бар'ераў (4.1.10):

1) вылічыць матрыцу $Y = B - \sum_{j=1}^n A^j x_j^{(i)}$ ($O(nm^2)$ арыфметычных аперацый);

2) вылічыць матрыцу Y^{-1} ($O(m^3)$ арыфметычных аперацый);

3) па формуле (3.3.20) вылічыць n кампанент вектара $F'(x^{(i)})$ (па $O(m^2)$ аперацый на кампаненту, усяго $O(nm^2)$ аперацый);

4) па формуле (3.3.21) вылічыць n^2 элементаў матрыцы $F''(x^{(i)})$ ($O(n^2m^2)$ аперацый);

5) вылічыць $x^{(i+1)}$, вырашаючы СЛУ

$$F''(x^{(i)})x^{(i+1)} = F''(x^{(i)})x^{(i)} + t^{(i+1)}c - F'(x^{(i)})$$

($O(n^3)$ аперацый).

Такім чынам, агульная складанаць адной ітэрацыі метада бар'ераў у дачыненні да задачы паўазначанага праграмавання (4.1.24) складзе $O(m^3 + n^2m^2 + n^3)$ арыфметычных аперацый. Зразумела, што гэту ацэнку можна панізіць, калі матрыцы A^i разрэджаныя (маюць многа нулявых элементаў). З улікам таго, што $F \in \mathbf{SSC}(\sqrt{m})$, падсумоўваючы вышэйсказанае, мы дэталізуем тэарэму 4.1.4 наступным чынам.

Тэарэма 4.1.8 *Няхай $r \in (0, \frac{1}{2})$, $\rho = \frac{r}{1-2r}$, $\epsilon > 0$, і $t^{(0)} > 0$, $x^{(0)} \in \mathrm{dom}\, F$ задавальняюць (4.1.9). Тады метад бар'ераў, азначаны па (4.1.10), вылічвае ϵ-аптымальнае рашэнне задачы (4.1.6) за час $O\left((m^3 + n^2m^2 + n^3)\sqrt{m}\log(m/(t^{(0)}\epsilon))\right)$.*

M-метад

Разгледзім наступную мадыфікацыю задачы (4.1.24):

$$\begin{array}{rcl} c^T x - M x_{n+1} & \to & \max \\ \sum_{j=1}^{n} A^j x_j - I x_{n+1} & \leq_{SM_+^m} & B\,, \end{array} \tag{4.1.25}$$

дзе M — дастаткова вялікі лік. Няхай

$$q \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1,\, i \neq j}^{m} |b_{ij}| - b_{ii} + 1$$

і $B' \stackrel{\text{def}}{=} B + qI$. Так як

$$b'_{ii} \geq b_{ii} + \sum_{j=1,\, i\neq j} |b_{ij}| - b_{ii} + 1 > \sum_{j=1,\, i \neq j} |b'_{ij}|\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

то B' ёсць матрыца са строгай дыяганальнай перавагай; таму яна дадатна азначана. Адсюль вынікае, што кропка ($x^0 = 0, x^0_{n+1} = q$) належыць $\mathrm{dom}\, F$, дзе

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\ln\det\left(B - \sum_{j=1}^{n} A^j x_j + I x_{n+1}\right)\,,$$

і з яе можна пачынаць рашаць задачу (4.1.25) двухэтапным метадам бар'ераў.

4.2 Метад бар'ераў для задачы ЛП

У гэтым параграфе мы разгледзім шэраг аспектаў, звязаных з прымяненнем метада бар'ераў для рашэння задачы ЛП. Больш канкрэтна, мы

1) разгледзім стандартную тэхніку, прапанаваную Н. Кармаркарам, якая дазваляе ў $O(\sqrt{m})$ разоў паменшыць ацэнку складанасці алгарытма;

2) пакажам як знайсці стартавыя значэнні $(t^{(0)}, x^{(0)})$;

3) ацэнім складанасць метада як функцыю ад памеру задачы.

Будзем разглядаць задачу ЛП у нармальнай форме

$$\max\{c^T x \,:\, Ax \leq b\}, \tag{4.2.26}$$

дзе $c \in \mathbf{Z}^n$, $A \in M_{m,n}(\mathbf{Z})$ ($\operatorname{rank} A = n$), $b \in \mathbf{Z}^m$. Як звычайна, няхай Δ абазначае максімальны мінор матрыцы каэфіцыентаў задачы, h — вышыню задачы (максімальны па модулю каэфіцыент), а L — памер задачы.

У якасці бар'ера для паліэдра $P_{\le}(A, b)$ абмежаванняў задачы возьмем стандартны лагарыфмічны бар'ер

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - A_i x)\,.$$

Як мы ведаем, яго параметр $K = \sqrt{m}$, а градыент і матрыца другіх вытворных вылічваюцца па формулах:

$$F'(x) = A^T D(x)^{-1}\,\mathrm{e}\,, \quad F''(x) = A^T D(x)^{-2} A\,, \tag{4.2.27}$$

дзе $D(x) = \operatorname{diag}(b - Ax)$. Зазначым, што ўмова $\operatorname{rank} A = n$ гарантуе, што ва ўсіх унутраных кропках паліэдра $P_{\le}(A, b)$ матрыца $F''(x)$ дадатна азначана. У прымяненні да задачы (4.2.26) адлюстраванне $h(x, t)$ азначаецца па формуле:

$$h(x, t) = -tc^T x + F(x).$$

Таму

$$h_x(x, t) = A^T D(x)^{-1}\,\mathrm{e} - tc\,, \quad h_{xx}(x, t) = A^T D(x)^{-2} A\,.$$

Цяпер ітэрацыйны працэс (4.1.10) метада бар'ераў можна перапісаць наступным чынам:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} t^{(i)} & = & \alpha(\sqrt{m}, r)t^{(i-1)}\,, \\ F''(x^{(i-1)}) & = & A^T D(x^{(i-1)})^{-2} A, \\ h_x(x^{(i-1)}, t^{(i)}) & = & A^T D(x^{(i-1)})^{-1}\,\mathrm{e} - t^{(i)} c\,, \\ x^{(i)} & = & x^{(i-1)} - F''(x^{(i-1)})^{-1} h_x(x^{(i-1)}, t^{(i)})\,. \end{array}} \tag{4.2.28}$$

Як і ў базавай версіі метада стартавыя значэнні $(t^{(0)}, x^{(0)})$ павінны задавальняць умове (4.1.9), а для $r \in (0, \frac{1}{2})$, $\rho = \frac{r}{1-2r}$, і $K = \sqrt{m}$ параметр $\alpha(K, r)$ азначаецца па формуле (4.1.11).

4.2.1 Мадыфікаваны метад бар'ераў

Складанасць метада бар'ераў можна паменшыць, калі на кожнай ітэрацыі вылічваць адваротную матрыцу $F''(x^{(i-1)})^{-1}$ прыблізна.

Няхай параметры $\theta \in [0, 1)$, $\beta \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{1-\theta}$, $r > 0$ задавальняюць наступным умовам:

$$\begin{array}{lcl} r & < & \dfrac{\beta^4}{1+\beta^2} = \dfrac{(1-\theta)^2}{2-\theta}\,, \\ \rho & \overset{\mathrm{def}}{=} & \dfrac{r+1-\beta^2}{\beta^4-(1+\beta^2)r} = \dfrac{r+\theta}{(1-\theta)^2-(2-\theta)r} \in (0,1)\,. \end{array} \tag{4.2.29}$$

Азначым

$$\tilde{\alpha}(\theta, r) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{(1-\rho)(1-\rho r)r}{\sqrt{m}(1+(1-\rho)(1-\rho r)r)} \,. \tag{4.2.30}$$

Дапусцім, што $t^{(0)} > 0$ і $x^{(0)} \in \operatorname{dom} F$ задавальняюць ўмове (4.1.9). Разгледзім наступную мадыфікацыю ітэрацыйнага працэса метада бар'ераў:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} t^{(i)} & = & \tilde{\alpha}(\theta, r) t^{(i-1)} \,, \\ x^{(i)} & = & x^{(i-1)} - (G^{(i)})^{-1} \left(A^T D(x^{(i-1)})^{-1} \,\mathrm{e} - t^{(i)} c \right) \,, \end{array}} \tag{4.2.31}$$

дзе $G^{(i)} = A^T (D^{(i)})^{-2} A$, $D^{(0)} = D(x^{(0)})$, а $D^{(i)} \in M_{m,m}(\mathbf{R})$ — дыяганальная матрыца з j-м дыяганальным элементам

$$\delta_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \delta_j^{(i-1)}, \text{ калі} \left| 1 - \left(\dfrac{\delta_j^{(i-1)}}{b_j - A_j x^{(i-1)}} \right)^2 \right| \le \theta \,, \\ b_j - A_j x^{(i-1)} \,, \text{ інакш.} \end{cases} \tag{4.2.32}$$

Тэарэма 4.2.1 *Няхай $\epsilon > 0$, параметры $\theta \in [0,1)$ і $r > 0$ задавальняюць умове (4.2.29), а стартавыя значэнні $(t^{(0)}, x^{(0)})$ — умове (4.1.9). Тады мадыфікаваны метад бар'ераў, які азначаецца ітэрацыйным працэсам (4.2.31), знаходзіць ϵ-аптымальнае рашэнне задачы (4.2.26) за час $O\left(n^2 m \ln\left(m/(t^{(0)}\epsilon)\right)\right)$.*

Перш чым прыступіць да доказу тэарэмы 4.2.1, дакажам некалькі дапаможных рэзультатаў.

Лема 4.2.1 *Няхай $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $\operatorname{rank} A = n$, $D = \operatorname{diag}(\delta)$, $\tilde{D} = \operatorname{diag}(\tilde{\delta})$, дзе $\delta, \tilde{\delta} \in \mathbf{R}^m_{++}$. Калі для $\theta \in (0,1)$*

$$\left| 1 - \frac{\tilde{\delta}_i^2}{\delta_i^2} \right| \le \theta \,, \quad i = 1, \ldots, m \,,$$

то матрыца $\tilde{B} = A^T \tilde{D}^{-2} A$ з'яўляецца $\sqrt{1-\theta}$-ўзгодненай з матрыцай $B = A^T D^{-2} A$.

Доказ. Для $v \in \mathbf{R}^n$ маем

$$\begin{array}{rcl} |v^T B v - v^T \tilde{B} v| & = & \left| v^T A^T \tilde{D}^{-1} \left(D^{-2} \tilde{D}^2 - I \right) \tilde{D}^{-1} A v \right| \\ & \le & \|\tilde{D}^{-1} A v\|^2 \cdot \|D^{-2} \tilde{D}^2 - I\| \\ & \le & \theta v^T \tilde{B} v \,, \end{array}$$

ці

$$(1-\theta) v^T \tilde{B} v \le v^T B v \le (1+\theta) v^T \tilde{B} v \le \frac{1}{1-\theta} v^T \tilde{B} v \,.$$

Адкуль

$$\sqrt{1-\theta} \|v\|_{\tilde{B}} \le \|v\|_B \le \frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \|v\|_{\tilde{B}} \,.$$

□

Лема 4.2.2 *Для любога $v \in \mathbf{R}^m$, такога, што $\|v\| < 1$, выконваецца няроўнасць*

$$\sum_{j=1}^{m} |\ln(1 - v_j)| \leq \sqrt{m}\frac{\|v\|}{1 - \|v\|} \,. \tag{4.2.33}$$

Доказ пакідаем чытачу ў якасці нескладанага практыкавання з аналіза.
□

Лема 4.2.3 *Пры выкананні ўмоў тэарэмы 4.2.1, паслядоўнасці $\{t^{(i)}\}$ і $\{x^{(i)}\}$, будуемыя мадыфікаваным метадам бар'ераў, задавальняюць наступным умовам:*

$$\begin{array}{lcl} x^{(i)} \in \operatorname{dom} F \,, & & \\ \|x(t^{(i)}) - x^{(i-1)}\|_{F''(x^{(i-1)})} & \leq & r \,, \\ \|x(t^{(i)}) - x^{(i)}\|_{F''(x^{(i)})} & \leq & \rho r \,, \end{array} \tag{4.2.34}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left| \ln\left(\frac{b_j - A_j x^{(i)}}{b_j - A_j x^{(i-1)}}\right) \right| \leq \nu(\theta, r)\sqrt{m} \,, \tag{4.2.35}$$

дзе $\nu(\theta, r)$ ёсць канстанта, якая залежыць толькі ад θ і r.

Доказ. Згодна (4.2.32) і леме 4.2.1, на кожнай ітэрацыі i матрыца $G^{(i)}$ з'яўляецца $\sqrt{1-\theta}$-ўзгодненай з матрыцай $F''(x^{(i-1)}) = A^T D(x^{(i-1)})^{-2} A$. Па індукцыі, выкарыстоўваючы тэарэму 3.2.2 (пункт b)) і тэарэму 4.1.3 (пункт a)), правяраецца, што для ўсіх $i \geq 0$ выконваюцца ўмовы (4.2.34).

Дакажам няроўнасць (4.2.35). Па леме 4.2.2, з улікам (4.2.27), маем

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left| \ln\left(\frac{b_j - A_j x^{(i)}}{b_j - A_j x^{(i-1)}}\right) \right| & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left| \ln\left(1 - \frac{A_j(x^{(i)} - x^{(i-1)})}{b_j - A_j x^{(i-1)}}\right) \right| \\ & \leq & \displaystyle\sqrt{m}\frac{\|A^T D(x^{(i-1)})^{-1}(x^{(i)} - x^{(i-1)})\|}{1 - \|A^T D(x)^{-1}(x^{(i)} - x^{(i-1)})\|} \\ & \leq & \displaystyle\sqrt{m}\frac{\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|_{F''(x^{(i-1)})}}{1 - \|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|_{F''(x^{(i-1)})}} \,. \end{array}$$

Так як

$$\begin{array}{rcl} r' & = & \|x(t^{(i)}) - x^{(i-1)}\|_{G^{(i)}} \\ & \leq & \displaystyle\frac{1}{\beta}\|x(t^{(i)}) - x^{(i-1)}\|_{F''(x^{(i-1)})} \\ & \leq & \displaystyle\frac{1}{\beta} r \leq \frac{1}{\beta}\frac{\beta^4}{1+\beta^2} < \beta \,, \end{array}$$

то па тэарэме 3.2.1 маем

$$\begin{aligned}\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|_{F''(x^{(i-1)})} &\le \frac{1}{\beta}\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|_{G^{(i)}} \\ &= \frac{1}{\beta}\|h_x(x^{(i-1)}, t^{(i)})\|_{G^{(i)}} \\ &\le \frac{r'}{\beta^2(\beta - r')} \le \frac{r}{\beta^2(\beta^2 - r)}\,.\end{aligned}$$

Цяпер (4.2.35) вынікае з няроўнасці

$$\begin{aligned}\frac{\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|_{F''(x^{(i-1)})}}{1 - \|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|_{F''(x^{(i-1)})}} &\le \frac{\dfrac{r}{\beta^2(\beta^2 - r)}}{1 - \dfrac{r}{\beta^2(\beta^2 - r)}} \\ &= \frac{r}{(1-\theta)(1-\theta-r) - r} \stackrel{\text{def}}{=} \nu(\theta, r)\,.\end{aligned}$$

□

Доказ тэарэмы 4.2.1. Карэктнасць алгарытма вынікае з лемы 4.2.3. Ацэнім складанасць. Поўнасцю аналагічна, як і ў доказе тэарэмы 4.1.4, даказваецца, што за $N(\epsilon) = O(\sqrt{m}\log(m/(t^{(0)}\epsilon)))$ ітэрацый метад будуе ϵ-аптымальнае рашэнне задачы (4.2.26). Калі $N^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} |j \in N_m : \delta_j^{(i)} \neq \delta_j^{(i-1)}|$, то, пачынаючы з матрыцы $(G^{(i-1)})^{-1}$, матрыцу $(G^{(i)})^{-1}$ можна вылічыць за час $O(n^2 N^{(i)})$. Таму у суме алгарытм выконвае $O\left(n^2 \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} N^{(i)}\right)$ арыфметычных аперацый. Ацэнім велічыню $\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} N^{(i)}$. Калі $\delta_j^{(i)} \neq \delta_j^{(i-1)}$, то па (4.2.32) справядліва няроўнасць

$$2|\ln(\delta_j^{(i)}/\delta_j^{(i-1)})| \ge \ln(1+\theta).$$

Адкуль

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} N^{(i)} &\le \frac{2}{\ln(1+\theta)} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \left|\ln\left(\frac{\delta_j^{(i)}}{\delta_j^{(i-1)}}\right)\right| \\ &= \frac{2}{\ln(1+\theta)} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)}\sum_{j=1}^{m} \left|\ln\left(\frac{\delta_j^{(i)}}{\delta_j^{(i-1)}}\right)\right| \\ &\le \frac{2\nu(\theta, r)}{\ln(1+\theta)} N(\epsilon)\sqrt{m} \\ &= O(N(\epsilon)\sqrt{m}) = O(m\log(m/(t^{(0)}\epsilon)))\,.\end{aligned}$$

□

4.2.2 M-метад

Для прымянення метада бар'ераў трэба каб задача (4.2.26) мела *строга дапушчальнае рашэнне* $x^{(0)}$, г. зн. такое, што $Ax^{(0)} < b$. Як гэта вынікае з тэарэмы двойнасці, знайсці такую кропку ў агульным выпадку не лягчэй чым вырашыць задачу ЛП. Адзінае выйсце з гэтай сітуацыі ў тым, каб пабудаваць новую задачу ЛП, якая

- эквівалентна зыходнай задачы ў тым сэнсе, што па яе аптымальнаму рашэнню лёгка знайсці рашэнне зыходнай задачы;
- мае строга дапушчальнае рашэнне, якое проста знайсці.

Няхай $M > 0$ вялікі лік. Разгледзім наступную мадыфікацыю задачы (4.2.26):

$$\begin{array}{rcrcl} c^T x & - & \overline{M} x_{n+1} & \to & \max \\ Ax & + & (\frac{1}{M} b - \mathrm{e}) x_{n+1} & \leq & b, \\ (\frac{1}{M} c - A^T \mathrm{e})^T x & & & \leq & M, \\ & & -x_{n+1} & \leq & 0. \end{array} \tag{4.2.36}$$

Няхай $\overline{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x, x_{n+1})$. Як заўсёды, дапушчальны абсяг задачы (4.2.36) задаем лагарыфмічным бар'ерам

$$\begin{aligned} F(\overline{x}) \quad = \quad & -\sum_{i=1}^{m} \ln \left(b_i - A_i x - \left(\frac{1}{M} b - \mathrm{e} \right) x_{n+1} \right) \\ & - \ln \left(M - \left(\frac{1}{M} c - A^T \mathrm{e} \right)^T x \right). \end{aligned}$$

Зазначым таксама, што адлюстраванне h у гэтым выпадку азначаецца па формуле:

$$h(\overline{x}, t) = t \left(\overline{M} x_{n+1} - c^T x \right) + F(\overline{x}).$$

Лема 4.2.4 *Калі* $\overline{M} = M(m+1) - b^T \mathrm{e}$, *то кропка*

$$\overline{x}^{(0)} = \left(x^{(0)} = 0, x_{n+1}^{(0)} = M \right)$$

ёсць строга дапушчальнае рашэнне мадыфікаванай задачы (4.2.36) і $h_{\overline{x}}(\overline{x}^{(0)}, t^{(0)}) = 0$ *для* $t^{(0)} = \frac{1}{M^2}$.

Доказ пакідаем чытачу ў якасці нескладанага практыкавання. □

З лемы 4.2.4 вынікае, што $\overline{x}^{(0)} = \overline{x}(t^{(0)})$ і метад бар'ераў можа пачынаць рашэнне задачы (4.2.36) з пары $(t^{(0)}, \overline{x}^{(0)})$.

Запішам двойную да задачы (4.2.36):

$$\begin{array}{rcrcl} b^T y & + & M y_{m+1} & \to & \min \\ A^T y & + & (\frac{1}{M} c - A^T \mathrm{e}) y_{m+1} & = & c, \\ (\frac{1}{M} b - \mathrm{e})^T y & & & \geq & -\overline{M}, \\ y \geq 0, & & y_{m+1} & \geq & 0. \end{array} \tag{4.2.37}$$

Лема 4.2.5 *Калі $M \geq n(m+1)(h+1)\Delta$ і $\overline{M} \geq m\Delta + 1$, то (x^0, x^0_{n+1}) — аптымальнае рашэнне задачы (4.2.36) тады і толькі тады, калі $x^0_{n+1} = 0$ і x^0 — аптымальнае рашэнне задачы (4.2.26).*

Доказ. Няхай x^*, y^* — аптымальныя рашэнні задачы (4.2.26) і яе двойнай. Так як, згодна тэарэме 1.5.44, $|x^*_j| \leq \Delta$ і $|y^*_i| \leq \Delta$, то справядлівы няроўнасці

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{M}c^T x^* - e^T A x^* & \leq & \frac{1}{M}nh\Delta + nmh\Delta < M\,, \\ \frac{1}{M}b^T y^* - e^T y^* & \geq & -\frac{1}{M}mh\Delta - m\Delta > -\overline{M}\,. \end{array} \tag{4.2.38}$$

Таму $(x^*, 0)$ і $(y^*, 0)$ ёсць, адпаведна, дапушчальныя рашэнні задач (4.2.36) і (4.2.37). Больш таго, так як $c^T x^* = b^T y^*$, то, згодна выніку 1.3.1, $(x^*, 0)$, $(y^*, 0)$ з'яўляюцца аптымальнымі рашэннямі задач (4.2.36) і (4.2.37).

Калі існуе аптымальнае рашэнне (x^0, x^0_{n+1}) задачы (4.2.36), такое, што $x^0_{n+1} > 0$, то па ўмове дапаўняючай няжорсткасці (вынік 1.3.1) атрымліваем $x^0_{n+1}\left(\left(\frac{1}{M}b - e\right)^T y^* + \overline{M}\right) = 0$, ці $\left(\frac{1}{M}b - e\right)^T y^* = -\overline{M}$, што супярэчыць (4.2.38). □

Лема 4.2.6 *Няхай $M \geq n(m+1)(h+1)\Delta$. Калі $(\tilde{x}, \tilde{x}_{n+1})$ ёсць дапушчальнае ϵ-аптымальнае рашэнне задачы (4.2.36) для $\overline{M} = \tilde{M} \geq m\Delta + 3$, то $\tilde{x}$ — ϵ-аптымальнае рашэнне задачы (4.2.26).*

Доказ. Няхай x^* — аптымальнае рашэнне задачы (4.2.26). Па леме 4.2.5 заключаем, што $(x^*, 0)$ — аптымальнае рашэнне задачы (4.2.36) для ўсіх $\overline{M} \geq m\Delta + 1$. Таму маюць месца няроўнасці

$$\begin{array}{rll} c^T\tilde{x} - (m\Delta + 1)\tilde{x}_{n+1} & \leq & c^T x^*\,, \\ c^T\tilde{x} - \tilde{M}\tilde{x}_{n+1} & \geq & c^T x^* - \epsilon\,. \end{array}$$

Зазначым, што апошняя з гэтых няроўнасцей вынікае з ϵ-аптымальнасці кропкі $(\tilde{x}, \tilde{x}_{n+1})$. Калі адняць другую няроўнасць ад першай, пасля перагрупоўкі атрымаем

$$\tilde{x}_{n+1} \leq \frac{\epsilon}{\tilde{M} - m\Delta - 1} \leq \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Цяпер для $i = 1, \ldots, m$ маем

$$A_i\tilde{x} \leq b_i - \left(\frac{1}{M}b_i - 1\right)\tilde{x}_{n+1} \leq b_i + 2\tilde{x}_{n+1} \leq b_i + \epsilon\,.$$

□

Цяпер дакажам наступны важны рэзультат.

Тэарэма 4.2.2 *Метад бар'ераў з'яўляецца $O(n^2 mL)$-алгарытмам лінейнага праграмавання.*

Доказ. Будзем разглядаць задачу (4.2.26). Няхай $\epsilon = \frac{1}{2n\Delta^3}$. Метадам бар'ераў, пачынаючы з $t^{(0)} = \frac{1}{M^2}$ і $(x^{(0)} = 0, x^{(0)}_{n+1} = M)$, дзе $M = n(m+1)(h+1)\Delta$, $\overline{M} = M(m+1) - b^T\mathrm{e}$ (зазначым, што $\overline{M} \geq m\Delta + 3$), знойдзем дапушчальнае ϵ-аптымальнае рашэнне $(\tilde{x}, \tilde{x}_{n+1})$ задачы (4.2.36). Для гэтага па тэарэме 4.2.1 мадыфікаванаму метаду бар'ераў спатрэбіцца выканаць

$$\begin{aligned} O\left(n^2 m \ln\left(m/(t^{(0)}\epsilon)\right)\right) &= O\left(n^2 m \ln(2mn^3(m+1)^2(h+1)^2\Delta^5)\right) \\ &= O\left(n^2 m \ln(mnh\Delta)\right) = O(n^2 m L) \end{aligned}$$

арыфметычных аперацый. Па леме 4.2.6 кропка $\tilde{x}$ з'яўляецца $\frac{1}{2n\Delta^3}$-аптымальным рашэннем задачы (4.2.26). Таму, згодна тэарэме 1.5.4, выканаўшы яшчэ $O(n^2m)$ арыфметычных аперацый, працэдурай *refine* можна пераўтварыць ϵ-аптымальнае рашэнне $\tilde{x}$ у дакладнае рашэнне задачы (4.2.26). □

Так як матрыца абмежаванняў задачы (4.2.36) залежыць ад M і лік M можа быць дастаткова вялікім, то пры рэалізацыі метада бар'ераў могуць узнікнуць сур'ёзныя праблемы, звязаныя з дрэннай абумоўленасцю матрыцы другіх вытворных. У якасці альтэрнатывы можна выкарыстоўваць наступны падыход, які накіраваны на выкарыстанне двухэтапнага метада бар'ераў.

Няхай $M > 0$ вялікі лік. Разгледзім наступную мадыфікацыю задачы (4.2.26):

$$\begin{array}{rcrcl} c^T x & - & M x_{n+1} & \to & \max \\ Ax & + & (b - \mathrm{e}) x_{n+1} & \leq & b, \\ & & -x_{n+1} & \leq & 0. \end{array} \tag{4.2.39}$$

Задача (4.2.39) мае строга дапушчальнае рашэнне $\overline{x}^0 = (x^0 = 0, x^0_{n+1} = 1)$.

Цалкам аналагічна, як і ў доказе тэарэмы 4.2.5, можна паказаць, што, калі $M \geq m(h+1)\Delta$, то $x^*_{n+1} = 0$ для кожнага аптымальнага рашэння (x^*, x^*_{n+1}) задачы (4.2.39).

4.3 Метад Кармаркара

Першае знаёмства з метадам праектыўных пераўтварэнняў Кармаркара зручна пачаць з разгляду наступнай задачы. Дадзены вектары $c, a \in \mathbf{R}^n$, матрыца $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ ($\operatorname{rank} A = m$) і замкнёны выпуклы востры конус $C \subset \mathbf{R}^n$ з непустою ўнутранасцю. Трэба вырашыць наступную сістэму няроўнасцей

$$c^T x \leq 0,\ x \geq_C 0,\ Ax = 0\,,\ a^T x = 1\,, \tag{4.3.40}$$

якую ў далейшым будзем называць *праектыўнай задачай.* Дапусцім, што для конуса C вядомы K-нармальны бар'ер F, г. зн. $\operatorname{dom} F = \operatorname{int} C$. Зробім таксама настуныя дапушчэнні наконт задачы (4.3.40):

(K1) дапушчальны абсяг $D \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in C \,:\, Ax = 0,\ a^T x = 1\}$ абмежаваны;

(K2) вядома кропка $x^{(0)} \in \mathrm{rint}\ D = \mathrm{dom}\ F \cap D$;

Зразумела, што, гаворачы пра рашэнне нелінейнай задачы, (а так як конус C не абавязкова паліэдральны, то задача (4.3.40) у агульным выпадку нелінейная) мы маем на ўвазе прыблізнае яе рашэнне з патрэбнай дакладнасцю. Для $\epsilon > 0$ кропку $x \in D$ назавем ***ϵ-прыблізным рашэннем*** задачы (4.3.40), калі $c^T x \leq \epsilon$.

4.3.1 Патэнцыяльная функцыя

Разгледзім *патэнцыяльную функцыю*

$$V_c(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} K^2 \ln(c^T x) + F(x), \tag{4.3.41}$$

якая азначана на $\mathrm{dom}\ F \cap \{x \in \mathbf{R}^n\ :\ c^T x > 0\}$. Калі не будзе ўзнікаць двухсэнсоўнасці, мы будзем апускаць індэкс "c"і пісаць $V(x)$ замест $V_c(x)$. Так як F з'яўляецца K^2-лагарыфмічна аднароднай, то

$$\begin{aligned} V(tx) &= K^2 \ln(tc^T x) + F(tx) \\ &= K^2 \ln t + K^2 \ln(c^T x) + F(x) - K^2 \ln t \\ &= V(x), \end{aligned}$$

г. зн. патэнцыяльная функцыя пастаянна на любым прамені $\{tx\ :\ t > 0\}$.

Наступная тэарэма паказвае, што дакладнасць *строга допушчальнага рашэння* $x \in \mathrm{rint}\ D$ можна ацэньваць праз велічыню $(V(x^{(0)}) - V(x))$.

Тэарэма 4.3.1 *Для любой кропкі $x \in \mathrm{rint}\ D$ справядліва наступная няроўнасць*

$$\frac{c^T x}{c^T x^{(0)}} \leq R(x^{(0)}) \exp\left(-\frac{V(x^{(0)}) - V(x)}{K^2}\right),$$

дзе $R(x^{(0)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exp\left(F(x^{(0)}) - \min_{y \in D} F(y)\right)$.

Доказ. Так як функцыя F непарыўна на $\mathrm{dom}\ F$ і $F(x^i) \to \infty$, калі $x^i \to \overline{x} \in \mathrm{bd}\, D$, то функцыя F абмежавана знізу на мностве D і таму велічыня $R(x^{(0)})$ концая. Цяпер ацэнка, прыведзеная ў тэарэме, вынікае з няроўнасці

$$\begin{aligned} V(x^{(0)}) - V(x) &= F(x^{(0)}) - F(x) + K^2 \ln \frac{c^T x^{(0)}}{c^T x} \\ &\leq \ln\left(R(x^{(0)})\right) + K^2 \ln \frac{c^T x^{(0)}}{c^T x}\,. \end{aligned}$$

$\square$

Тэарэма 4.3.1 падказвае, што любое правіла, якое па дапушчальнаму рашэнню задачы будуе новае дапушчальнае рашэнне з меншым на абсалютную канстанту значэннем патэнцыяльнай функцыі, параджае ітэрацыйную паслядоўнасць, якая збягаецца да рашэння задачы (4.3.40) з хуткасцю геаметрычнай прагрэсіі з асновай $1 - O(1/K^2)$.

Тэарэма 4.3.2 *Няхай* $x \in \mathrm{rint}\ D$, $r \in (0,1)$, *і* $y = x + rh(c,x)$, *дзе*

$$h(c,x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \arg\min\{c^T h : F'(x)^T h = 0,\ Ah = 0,\ \|h\|_{F''(x)} \le 1\}. \qquad (4.3.42)$$

Калі задача (4.3.40) мае рашэнне і $c^T x > 0$, *то або кропка* y *з'яўляецца рашэннем задачы (4.3.40), або выконваюцца наступныя няроўнасці:*

$$\lambda(c,x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{c^T h(c,x)}{c^T x} \ge \frac{1}{1+3K^2} \qquad (4.3.43)$$

і

$$V(x) - V(y) \ge \kappa(r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{4}{3}r - \frac{r^2}{18} + \ln(1-r). \qquad (4.3.44)$$

Доказ. Абазначым праз $M(x)$ афінную падпрастору $\{z \in \mathbf{R}^n : Az = 0,\ F'(x)^T(z-x) = 0\}$. Няхай x^* — рашэнне задачы (4.3.40), а $\hat{x}$ ёсць кропка перасячэння гіперплоскасці $H(F'(x), F'(x)^T x)\}$ з праменем $\{tx^* : t > 0\}$. Зразумела, што $\hat{x} \in M(x)$ і $c^T\hat{x} \le 0$. Паколькі x ёсць мінімум F на $\mathrm{dom}\ F \cap M(x)$, то па тэарэмах 3.3.2 (пункт а)) і 3.3.6 (умова (3.3.37)) маем, што $\delta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|\hat{x} - x\|_{F''(x)} \le 1 + 3K^2$. Калі $\delta \le r$, то $c^T y \le c^T \hat{x} \le 0$ і таму y з'яўляецца рашэннем задачы (4.3.40). Інакш, няхай $\overline{x} = (1 - r/\delta)x + (r/\delta)\hat{x}$ ёсць кропка на інтэрвале $[x, \hat{x}]$, такая, што $\|\overline{x} - x\|_{F''(x)} = r$ (гл. мал. 4.3). Тады

$$\begin{aligned} c^T y &\le c^T \overline{x} = \left(1 - \frac{r}{\delta}\right) c^T x + \frac{r}{\delta} c^T \hat{x} \\ &\le \left(1 - \frac{r}{\delta}\right) c^T x \le \left(1 - \frac{r}{1+3K^2}\right) c^T x\,, \end{aligned}$$

ці, пасля перагрупоўкі,

$$\frac{c^T(x-y)}{c^T x} \ge \frac{r}{1+3K^2}\,. \qquad (4.3.45)$$

Калі $r = 1$, з няроўнасці (4.3.45) вынікае няроўнасць (4.3.43).

Нам засталося даказаць (4.3.44). Спачатку зазначым, што

$$\frac{c^T x}{c^T y} \ge 1 + \frac{r}{1 - r + 3K^2} \ge 1 + \frac{r}{3K^2}\,.$$

Па тэарэме 3.1.3 (няроўнасць (3.1.6)),

$$F(y) \le F(x) - \ln(1-r) - r$$

і таму

$$\begin{aligned} V(x) - V(y) &= K^2 \ln\left(\frac{c^T x}{c^T y}\right) + (F(x) - F(y)) \\ &\ge K^2 \ln\left(1 + \frac{r}{3K^2}\right) + \ln(1-r) + r \\ &\ge \frac{r}{3} - \frac{r^2}{18K^2} + \ln(1-r) + r \\ &\ge \frac{4}{3}r - \frac{r^2}{18} + \ln(1-r)\,. \end{aligned}$$

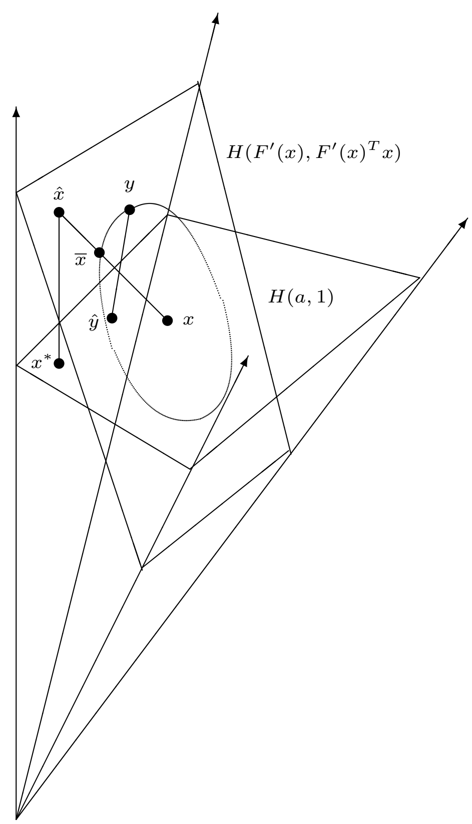


Рис. 4.3: Ілюстрацыя да доказу тэарэмы 4.3.2

Тут мы выкарысталі няроўнасць $\ln(1+\tau) \geq \tau - \tau^2/2$, якая справядліва для $\tau \geq 0$. $\square$

Функцыя $\kappa(r)$ дасягае максімума пры $r = \bar{r} \approx 0.235$. Абазначым $\kappa(\bar{r}) > 0.042$ праз κ.

4.3.2 Апісанне алгарытма

Фіксуем лік $r \in (0,1)$, такі, што $\kappa(r) > 0$. Пачынаючы з кропкі $x^{(0)} \in \operatorname{rint} D$, алгарытм Кармаркара будуе наступную ітэрацыйную паслядоўнасць:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y^{(i)} &=& x^{(i-1)} + rh(c, x^{(i-1)})\,, \\ x^{(i)} &=& \dfrac{y^{(i)}}{a^T y^{(i)}}\,. \end{array}} \tag{4.3.46}$$

Метад спыняецца, калі

- $V(x^{(i-1)}) - V(x^{(i)}) < \kappa(r)$ (тады па тэарэме 4.3.2 задача (4.3.40) не мае рашэння),

ці калі

- $c^T x^{(i)} \leq \epsilon$ (дасягнута патрэбная дакладнасць (гл. тэарэму 4.3.3 ніжэй)).

Наступная тэарэма непасрэдна вынікае з тэарэм 4.3.1 і 4.3.2.

Тэарэма 4.3.3 *Справядліва наступная ацэнка хуткасці збягаемасці для ітэрацыйнай паслядоўнасці метада Кармаркара:*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{c^T x^{(i)}}{c^T x^{(0)}} &\leq& R(x^{(0)}) \exp\left(-\frac{1}{K^2}(V(x^{(0)}) - V(x^{(i)}))\right) \\ &\leq& R(x^{(0)}) \exp\left(-\dfrac{\kappa(r) i}{K^2}\right)\,. \end{array} \tag{4.3.47}$$

Вынік 4.3.1 *Для $\epsilon > 0$ метад Кармаркара, пачынаючы з кропкі $x^{(0)} \in \operatorname{rint} D$, знаходзіць ϵ-прыблізнае рашэнне задачы (4.3.40) за*

$$N(\epsilon) = O\left(K^2 \ln\left(\frac{c^T x^{(0)}\, R(x^{(0)})}{\epsilon}\right)\right)$$

ітэрацый.

Доказ. Зразумела, можна лічыць, што $c^T x^{(0)} > \epsilon$. Ацэнку на колькасць ітэрацый $N(\epsilon)$ атрымаем з няроўнасці

$$\frac{c^T x^{(N(\epsilon))}}{c^T x^{(0)}} \leq R(x^{(0)}) \exp\left(-\frac{\kappa(r) N(\epsilon)}{K^2}\right) \leq \frac{\epsilon}{c^T x^{(0)}}\,.$$

Адкуль

$$N(\epsilon) = \left\lceil \frac{K^2}{\kappa(r)} \ln\left(\frac{c^T x^{(0)}\, R(x^{(0)})}{\epsilon}\right)\right\rceil = O\left(K^2 \ln\left(\frac{c^T x^{(0)}\, R(x^{(0)})}{\epsilon}\right)\right).$$

□

Як вынікае з ацэнкі (4.3.47), велічыню $R(x^{(0)})$ можна разглядаць як меру якасці стартавай кропкі $x^{(0)}$. Найлепшы выбар для $x^{(0)}$ — гэта кропка мінімума бар’ера F на мностве D. У гэтым выпадку $R(x^{(0)}) = 1$.

Мы толькі што разгледзелі *базавую* версію алгарытма Кармаркара. Прасцейшы варыянт *метада вялікіх крокаў* можна запісаць наступным чынам:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} r^{(i)} & = & \arg\min\{V(x^{(i-1)} + rh(c, x^{(i-1)})) \,:\, r \geq 0\}\,, \\ y^{(i)} & = & x^{(i-1)} + r^{(i)} h(c, x^{(i-1)})\,, \\ x^{(i)} & = & \dfrac{y^{(i)}}{a^T y^{(i)}}\,. \end{array}} \tag{4.3.48}$$

Крытэрыі спынення тыя ж, што і для базавай версіі, толькі ў першым з іх $\kappa(r)$ трэба замяніць на κ.

Зразумела, што хуткасць збягаемасці метада вялікіх крокаў не хужэйшая, чым для базавай версіі.

4.3.3 Максімізацыя лінейнай функцыі на гіпэрэліпсоідзе

Каб завяршыць наша апісанне метада Кармаркара, пакажам як можна вылічыць велічыню $h(c, x)$, азначаную па формуле (4.3.43), г. зн. нам трэба навучыцца рашаць задачу мінімізацыі лінейнай функцыі на *гіпэрэліпсоідзе* (перасячэнні лінейнай падпрасторы і эліпсоіда).

Разгледзім задачу

$$\max\{c^T x \,:\, Bx = 0,\ \|x\|_D \leq 1\}, \tag{4.3.49}$$

дзе $c \in \mathbf{R}^n$; $B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $\operatorname{rank} B = m$; $D \in SM^n_+$. Ідэя метада рашэння задачы (4.3.49) заключаецца ў наступным.

1. Пасля замены зменных $x = D^{-\frac{1}{2}} y$ маем
$$\begin{aligned} &\max\{c^T x \,:\, Bx = 0,\ \|x\|_D \leq 1\} = \\ &\max\{(D^{-\frac{1}{2}} c)^T y \,:\, BD^{-\frac{1}{2}} y = 0,\ \|y\| \leq 1\}\,. \end{aligned}$$

2. Праектуем вектар $D^{-\frac{1}{2}} c$ на падпрастору $\mathcal{N}(\mathcal{BD}^{-\frac{\infty}{\in}})$
$$\overline{y} = \left(I - D^{-\frac{1}{2}} B^T \left(BD^{-1}B^T\right)^{-1} BD^{-\frac{1}{2}}\right) D^{-\frac{1}{2}} c\,.$$

3. Вяртаючыся да зыходных зменных x, атрымліваем
$$\overline{x} = D^{-\frac{1}{2}} \overline{y} = \left(D^{-1} - D^{-1} B^T \left(BD^{-1}B^T\right)^{-1} BD^{-1}\right) c\,. \tag{4.3.50}$$

4. Нармалізуем $\overline{x}$:

$$x^* = \frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|_D}\,. \tag{4.3.51}$$

Тэарэма 4.3.4 *Кропка x^*, вылічаная па правілах (4.3.50) і (4.3.51), з'яўляецца рашэннем задачы (4.3.49).*

Доказ. Няхай z ёсць дапушчальнае рашэнне задачы (4.3.49), г. зн. $Bz = 0$, $\|z\|_D \le 1$. Так як

$$\begin{aligned} B(x^* - z) &= 0, \\ (c - D\overline{x})^T &= c^T D^{-1} B^T \left(BD^{-1}B^T\right)^{-1} B\,, \end{aligned}$$

то мы маем

$$(c - D\overline{x})^T (x^* - z) = 0,$$

ці

$$c^T (x^* - z) = \overline{x}^T D(x^* - z)\,. \tag{4.3.52}$$

Паколькі

$$(x^*)^T Dz = (x^*)^T D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} z \le \|x^*\|_D \|z\|_D \le 1$$

і

$$\begin{aligned} \overline{x}^T D(x^* - z) &= \|\overline{x}\|_D (x^*)^T D(x^* - z) \\ &= \|\overline{x}\|_D \left((x^*)^T Dx^* - (x^*)^T Dz\right) \\ &= \|\overline{x}\|_D \left(1 - (x^*)^T Dz\right) \ge 0\,, \end{aligned}$$

згодна (4.3.52), атрымліваем $c^T (x^* - z) \ge 0$. Гэта завяршае доказ. □

4.3.4 Адначасовае рашэнне пары двойных задач ЛП

Маецца два падыходы па прымяненню алгарытма Кармаркара для рашэння аналітычнай задачы ЛП. Мы будзем разглядаць іх у гэтым і наступным параграфах.

Першы падыход заключаецца ў тым каб адначасова рашаць пару (П) і (Д) двойных аналітычных задач ЛП. Згодна выніку 1.3.2, для гэтага дастаткова вырашыць сістэму няроўнасцей (1.3.2). Калі ўвесці штучныя зменныя $\overline{y} \in \mathbf{R}^m$, $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$ і наступныя абазначэнні

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \overline{y} \\ \overline{x} \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} -c \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix},\ B = \begin{bmatrix} A & 0 & I_m & 0 \\ 0 & A^T & 0 & -I_n \end{bmatrix},$$

$C = C_X \times C_Y^D \times C_Y \times C_X^D$, то можна запісаць (1.3.2) у наступнай форме:

$$u^T z \le 0,\ Bz = d,\ z \ge_C 0. \tag{4.3.53}$$

Сістэма (4.3.53) мае $\overline{n} = 2n + 2m$ невядомых і $\overline{m} = n + m$ ураўненняў. Без страты агульнасці, мы можам дапусціць, што $d \neq 0$; інакш (4.3.53) мае трывіяльнае рашэнне $z = 0$. Акрамя таго, мы можам дапусціць, што $d = \mathrm{e}_i$ для нейкага $1 \leq i \leq \overline{m}$; інакш выбіраем i, што $d_i \neq 0$, дзелім i-е ўраўненне $B_i z = d_i$ на d_i і затым па чарзе для $j = 1, \ldots, \overline{m}$, $j \neq i$, адымаем i-е ўраўненне памножаннае на d_j ад j-га ураўненнння $B_j z = d_j$.

Задача (4.3.53) адрозніваецца ад задачы (4.3.40) толькі ў абазначэннях. Нам засталося забяспечыць выкананне ўмовы (К2). Няхай $z^0 \in \mathrm{int}\, C$. Разгледзім наступную задачу

$$\begin{array}{rcrcl} u^T z & + & z_{n+1} & \leq & 0\,, \\ Bz & + & (\mathrm{e}_i - Bz^0) z_{n+1} & = & \mathrm{e}_i\,, \\ & & \multicolumn{3}{l}{z \geq_C 0,\ z_{n+1} \geq 0\,.} \end{array} \tag{4.3.54}$$

Відавочна, што кропка $(z^0, z^0_{n+1} = 1)$ задавальняе ўсім ураўненням задачы (4.3.54). Акрамя таго, гэта кропка з'яўляецца унутранай для конуса $\overline{C} = C \times \mathbf{R}_+$. Так як па тэарэме двойнасці 1.3.2 для ўсіх z, такіх, што $Bz = d$, $z \geq_C 0$, справядліва няроўнасць $u^T z \geq 0$, то задача (4.3.53) мае рашэнне тады і толькі тады, калі задача (4.3.54) мае рашэнне наступнага выгляду $(\overline{z}, \overline{z}_{n+1} = 0)$; тады $\overline{z}$ рашэнне сістэмы (4.3.53).

Паліэдральная задача ЛП

Пакажам, што алгарытм Кармаркара з'яўляецца палінаміяльным метадам ЛП. Разгледзім пару двойных задач ЛП

$$\begin{array}{l} \max\{c^T x \,:\, Ax \leq b,\ x \geq 0\}\,, \\ \min\{b^T y \,:\, A^T y \geq c,\ y \geq 0\}\,, \end{array} \tag{4.3.55}$$

дзе $c \in \mathbf{Z}^n$, $A \in M_{m,n}(\mathbf{Z})$, $b \in \mathbf{Z}^m$. У далейшым задачу на максімум будзем называць прамой, а задачу на мінімум — двойнай. Як звычайна, няхай Δ абазначае максімальны мінор матрыцы каэфіцыентаў задачы, h — вышыню задачы, а L — памер задачы.

Так як у задачах (4.3.55)

$$C_X = \mathbf{R}^n_+,\ C^D_X = \mathbf{R}^n_+,\ C_Y = \mathbf{R}^m_+,\ C^D_Y = \mathbf{R}^m_+,$$

то параметр K стандартнага лагарыфмічнага бар'ера F для конуса

$$\overline{C} = \mathbf{R}^n_+ \times \mathbf{R}^m_+ \times \mathbf{R}^m_+ \times \mathbf{R}^n_+ \times \mathbf{R}_+$$

абмежаванняў задачы (4.3.54) роўны

$$\sqrt{2n + 2m + 1} = O\left(\sqrt{\max(n, m)}\right).$$

Няцяжка таксама пераканацца, што кропка $(z^0, z^0_{n+1}) = (\mathrm{e}, 1)$ ёсць кропка мінімума бар'ера F на допушчальным мностве задачы (4.3.54); таму $R((z^0, z^0_{n+1})) = 1$. Акрамя таго, у гэтым выпадку таксама відавочна ацэнка

$$u^T z^0 + z^0_{n+1} \leq (n + m)h + 1 = O(\max(n, m)h) = O(\max(n, m)\Delta)\,.$$

Калі $\tilde{z}, \tilde{z}_{n+1}$ — ϵ-прыблізнае рашэнне задачы (4.3.54) і $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{x}})$, то $\tilde{x}$ і $\tilde{y}$ — дапушчальныя ϵ-аптымальныя рашэнні адпаведна прамой і двойнай задач (дакажыце гэта). Па тэарэме 1.5.5, каб знайсці аптымальнае рашэнне любой з пары задач (4.3.55), дастаткова знайсці яе дапушчальнае $\epsilon = \frac{1}{2\Delta^2(A)}$-аптымальнае рашэнне. Згодна выніку 4.3.1, для гэтага метаду Кармаркара пры рашэнні задачы (4.3.54) спатрэбіцца выканаць

$$O(\max(n,m)\ln(\max(n,m)\Delta)) = O(\max(n,m)L)$$

ітэрацый. Дамінуючай аперацыяй на кожнай ітэрацыі метада Кармаркара з'яўляецца вылічэнне напрамку $h(c,x)$, што можна зрабіць па формулах (4.3.50) і (4.3.51) за час $O(\max^3(n,m))$. З выкарыстаннем тэхнікі, аналагічнай той, якую мы выкарыстоўвалі для паскарэння метада бар'ераў, складанасць адной ітэрацыі метада Кармаркара можна панізіць да велічыні $O(\max^{2.5}(n,m))$, калі вылічваць матрыцу праектавання прыблізна.

Падсумоўваючы выкладзенае вышэй, атрымліваем наступны рэзультат.

Тэарэма 4.3.5 *Алгарытм Кармаркара з'яўляецца палінаміяльным метадам ЛП. Для вырашэння адвольнай задачы ЛП метаду дастаткова выканаць $O(\max^{3.5}(m,n)L)$ арыфметычных аперацыі.*

Вылічальныя эксперыменты сведчаць, што колькасць ітэрацый метада Кармаркара на рэальных задачах значна меншая за прадпісваемую тэорыяй. Калі тэарэтычная ацэнка прапарцыянальна велічыні $k = \max(n,m)$, то колькасць ітэрацый на практыцы прапарцыянальна $\ln k$. Галоўная прычына разыходжання ў тым, што тыпічная ітэрацыя метада Кармаркара памяншае патэнцыяльную функцыю на велічыню $\Omega(k/\ln k)$, замест $O(1)$, якая справядліва ў найхужэйшым выпадку. Такім чынам, на практыцы метад Кармаркара выконвае $O(L\ln k)$ ітэрацый, замест $O(kL)$, што прадпісваецца аналізам найхужэйшага выпадку.

4.3.5 Метад слізгаючай функцыі мэты

У гэтым параграфе мы апішам тэхніку, якая дазваляе прымяніць алгарытм Кармаркара да рашэння наступнай аналітычнай задачы ЛП:

$$\min\{c^T x \,:\, x \geq_C 0,\ Ax = 0\,,\ a^T x = 1\}\,, \tag{4.3.56}$$

дзе $c, a \in \mathbf{R}^n$, $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ $(\operatorname{rank} A = m)$ і $C \subset \mathbf{R}^n$ — замкнёны выпуклы востры конус з непустою ўнутранасцю. Зазначым, што прыватным выпадкам задачы (4.3.56) з'яўляецца задача (1.9), да якой мы звялі задачу выпуклага праграмавання. Па ранейшаму, патрабуем выканання дапушчэнняў (K1), (K2) і ў дадатак лічым, што справядліва наступнае трэцяе дапушчэнне:

(K3) вядома ацэнку знізу α для аптымальнага значэння функцыі мэты.

Без страты агульнасці можна таксама лічыць, што функцыя мэты не з'яўляецца пастаяннай на дапушчальным мностве D задачы (4.3.56). Пры гэтых дапушчэннях, мы можам мадыфікаваць метад наступным чынам.

Чарговая i-я ітэрацыя метада пачынаецца з вылічэння параметра $t^{(i)} \geq 0$, такога, што аптымальнае значэнне ***бягучай функцыі мэты*** $(c^{(i)})^T x$, дзе $c^{(i)} = c^{(i-1)} - t^{(i)} a$, на дапушчальным мностве D задачы (4.3.56) з'яўляецца неадмоўным. Спачатку, $t^{(0)} = \alpha$ і $c^{(0)} = c - \alpha a$. Апішам правіла, па якім мы вылічваем $t^{(i)}$.

1. У выпадку, калі

$$\lambda(c^{(i-1)}, x^{(i-1)}) \geq \frac{1}{1+3K^2}\,,$$

$t^{(i)} = 0$.

2. У адваротным выпадку,

$$\lambda(c^{(i-1)}, x^{(i-1)}) < \frac{1}{1+3K^2}\,,$$

$$t^{(i)} \quad = \quad \max\{t \,:\, \lambda(c^{(i-1)} - ta, x^{(i-1)}) = \tfrac{1}{1+3K^2}\}\,. \tag{4.3.57}$$

Пакажам, што $(c^{(i)})^T x^{(i-1)} > 0$. Сапраўды, няхай t_i^* абазначае мінімальнае значэнне функцыі мэты $(c^{(i-1)})^T x$ на дапушчальным мностве D задачы (4.3.56). Зазначым, што $t_i^* \geq 0$ з-за нашага дапушчэння наконт $c^{(i-1)}$. Паколькі мінімальнае значэнне функцыі $c^{(i-1)} - t_i^* a$ на D роўна нулю і гэта функцыя не з'яўляецца пастаяннай на D, то

$$(c^{(i-1)} - t_i^* a)^T x^{(i-1)} > 0, \quad \text{і} \quad \lambda(c^{(i-1)} - t_i^* a, x^{(i-1)}) \geq \frac{1}{1+3K^2}\,.$$

Таму $t^{(i)} \leq t_i^*$ і $(c^{(i)})^T x^{(i-1)} = (c^{(i)} - t^{(i)} a)^T x^{(i-1)} > 0$.

Пасля таго, як значэнне $t^{(i)}$ вылічана, мы працягваем ітэрацыю тым жа самым чынам, як мы рабілі гэта ў метадзе доўгіх крокаў для задачы (4.3.40):

$$\boxed{\begin{array}{rcl} c^{(i)} & = & c^{(i-1)} - t^{(i)} a\,, \\ r^{(i)} & = & \arg\min\{V_i(x^{(i-1)} + r h(c^{(i)}, x^{(i-1)})) \,:\, r \geq 0\}\,, \\ y^{(i)} & = & x^{(i-1)} + r^{(i)} h(c^{(i)}, x^{(i-1)})\,, \\ x^{(i)} & = & \dfrac{y^{(i)}}{(c^{(i)})^T y^{(i)}}\,. \end{array}} \tag{4.3.58}$$

Тут $V_i(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} V_{c^{(i)}}(x)$ ёсць патэнцыяльная функцыя на i-м кроку.

Дэталёвае апісанне мадыфікаванага метада Кармаркара прадстаўлена на мал. 4.4. Для мадыфікаванага метада справядліва ацэнка дакладнасці, аналагічная той, што і ў тэарэме 4.3.3.

```
projective(c,a,A,x,α,K,ε)
{
  c := c − αa;
  for (; c^T x > ε;) {
    if (λ(c,x) < 1/(1+3K^2)) {
      t := arg {τ : λ(c − τa, x) = 1/(1+3K^2)};
      c := c − ta;
    }
    r̄ := arg min{V_c(x + rh(c,x)) : r ≥ 0};
    y := x + r̄h(c,x);
    x := y/(c^T y);
  }
}
```

Рис. 4.4: Алгарытм Кармаркара

Тэарэма 4.3.6 *Для паслядоўнасці $\{x^{(i)}\}$, пабудаванай мадыфікаваным метадам Кармаркара, справядліва наступная ацэнка:*

$$\begin{aligned} \frac{(c^{(i)})^T x^{(i)} - c^*}{c^T x^{(0)} - \alpha} &\le R(x^{(0)}) \exp\left(-\frac{V_0(x^{(0)}) - V_i(x^{(i)})}{K^2}\right) \\ &\le R(x^{(0)}) \exp\left(-\frac{\kappa i}{K^2}\right) , \end{aligned} \tag{4.3.59}$$

дзе c^* ёсць аптымальнае значэнне функцыі мэты ў задачы (4.3.56).

Доказ. Спачатку праверым, што

$$V_i(x^{(i)}) \le V_{i-1}(x^{(i-1)}) - \kappa\,. \tag{4.3.60}$$

Па тэарэме 4.3.2 (няроўнасць (4.3.44))

$$V_i(x^{(i)}) \le V_i(x^{(i-1)}) - \kappa\,, \tag{4.3.61}$$

паколькі адзінае свойства (у дадатак да дапушчэння аб існаванні рашэння задачы), якое выкарыстоўвалася ў доказе тэарэмы 4.3.2, была няроўнасць, якая у цяперашніх абазначэннях ёсць $\lambda(c^{(i)}, x^{(i-1)}) \ge 1/(1+3K^2)$, і мадыфікаваны метад падтрымлівае яе. Далей, або $V_i(\cdot) = V_{i-1}(\cdot)$ і тады (4.3.60) эквівалентна (4.3.61), або $c^{(i)} = c^{(i-1)} - t^{(i)}a$ для дадатнага $t^{(i)}$. У апошнім выпадку, так як $a^T x^{(i-1)} = 1$ і

$$\begin{aligned} V_i(x^{(i-1)}) &= F(x^{(i-1)}) + K^2 \ln((c^{(i-1)} - t^{(i)}a)^T x^{(i-1)}) \\ &< F(x^{(i-1)}) + K^2 \ln((c^{(i-1)})^T x^{(i-1)}) = V_{i-1}(x^{(i-1)})\,, \end{aligned}$$

няроўнасць (4.3.60) таксама вынікае з (4.3.61).

Па індукцыі, з (4.3.60) вынікае, што

$$V_0(x^{(0)}) - V_i(x^{(i)}) \;=\; F(x^{(0)}) - F(x^{(i)}) + K^2 \ln\left(\frac{(c^{(0)})^T x^{(0)}}{(c^{(i)})^T x^{(i)}}\right) \geq i\kappa\,. \qquad (4.3.62)$$

Гэтае дачыненне разам з

$$(c^{(i)})^T x^{(i)} = c^T x^{(i)} - \tau_i\,,$$

дзе $\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{i} t^{(i)}$, дае

$$\begin{aligned} \frac{(c^{(i)})^T x^{(i)} - \tau_i}{c^T x^{(0)} - \alpha} \;&\leq\; R(x^{(0)}) \exp\left(-\frac{V_0(x^{(0)}) - V_i(x^{(i)})}{K^2}\right) \\ &\leq\; R(x^{(0)}) \exp\left(-\frac{\kappa i}{K^2}\right)\,. \end{aligned} \qquad (4.3.63)$$

Так як функцыя $(c^{(i)})^T x$ неадмоўна на D і $(c^{(i)})^T x = c^T x - \tau_i$ для ўсіх $x \in \operatorname{rint} D$, то мы заключае, што $\tau_i \leq c^*$. Цяпер першая з няроўнасцей з (4.3.59) адразу вынікае з (4.3.63). Другая няроўнасць з (4.3.59) вынікае з (4.3.62). Гэта завяршае доказ. □

4.4 Прама-двойны метад патэнцыяльнай функцыі

Тэарэтычная ацэнка складанасці метада Кармаркара хужэйшая, чым, скажам, у метада бар'ераў. У гэтым параграфе мы разгледзім прама-двойны метад патэнцыяльнай функцыі, які, як і метад Кармаркара, належыць да класу праектыўных метадаў і мае такую ж тэарэтычную эфектыўнасць, як і метад бар'ераў. Ідэя гэтага метада належыць М.Тоду і Й.Йе.[4]

Будзем разглядаць пару прама-двойных аналітычных задач ЛП

$$\min\{c^T x \,:\, Ax = b,\; x \geq_C 0\}\,, \qquad (4.4.64)$$

і

$$\max\{b^T y \,:\, A^T y \leq_{C^D} c\}\,, \qquad (4.4.65)$$

дзе $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ ($\operatorname{rank} A = m$), $c \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$, C — замкнёны выпуклы востры конус у $\mathbf{R}^n$ з непустой унутранасцю. Як звычайна, конусы C і C^D будзем прадстаўляць K-нармальнымі бар'ерамі F і F^D, адпаведна. Зазначым, што базавая версія прама-двойнага метада патэнцыяльнай функцыі, на самай справе, не патрабуе ведання бар'ера F^D для двойнага конуса C^D; для яе рэалізацыі патрэбна толькі задаваць бар'ер F, а бар'ер F^D мы будзем выкарыстоўваць толькі ў доказах.

[4] M.J. Tood, Y. Ye. A centered projective algorithm for linear programming. – Math. Oper. Res., 1990, V. 15, pp. 175–202.

Для $y \in \mathbf{R}^m$ абазначым праз $s(y)$ *двойны вектар невязак* $c - A^T y$. Надварот, калі $s \in \mathbf{R}^n$, то $y(s)$ абазначае рашэнне, калі яно існуе, СЛУ $A^T y = c - s$. Так як A — матрыца поўнага радковага рангу, то $y(s)$ вызначаецца адназначна. Зазначым таксама, што:

- калі s — *дапушчальны* двойны вектар невязак, г. зн. $s \in C^D \cap c - \mathcal{R}(\mathcal{A}^T)$, тады $y(s)$ — дапушчальнае рашэнне задачы (4.4.65);
- для кожнай пары (x, y) дапушчальных прамога і двойнага рашэнняў *парыў двойнасці* роўны
$$c^T x - b^T y = c^T x - y^T A x = s(y)^T x \,. \tag{4.4.66}$$

Дапушчальнае рашэнне x прамой задачы называецца *строга дапушчальным*, калі $x >_C 0$. Аналагічна, дапушчальны двойны вектар невязак s называецца *строга дапушчальным*, калі $s >_{C^D} 0$. Мы называем пару (x, s) *строга дапушчальнай прама-двойнай парай*, калі x — строга дапушчальнае рашэнне прамой задачы, а s — строга дапушчальны вектар двойных невязак.

4.4.1 Прама-двойная патэнцыяльная функцыя

Патэнцыяльная функцыя $V : \operatorname{dom} F \times \operatorname{dom} F^D \to \mathbf{R}$ залежыць ад параметра $\gamma > 0$ (які будзе выбраны як абсалютная канстанта пазней) і для строга дапушчальнай прама-двойнай пары (x, s) азначаецца па формуле

$$V(x, s) \stackrel{\text{def}}{=} F(x) + F^D(s) + (K^2 + \gamma K) \ln s^T x.$$

Няхай таксама
$$U(x, s) \stackrel{\text{def}}{=} F(x) + F^D(s) + K^2 \ln s^T x \,;$$
тады
$$V(x, s) = U(x, s) + \gamma K \ln s^T x \,.$$

Лема 4.4.1 *Няхай (x, s) — строга дапушчальная двойная пара. Маюць месца наступныя ўмовы:*

$$U(\tau x, t s) = U(x, s) \quad \text{для ўсіх } \tau, t > 0 \,, \tag{4.4.67}$$
$$U(x, s) \geq 2K^2 \ln K. \tag{4.4.68}$$

Доказ. Паколькі F і F^D з'яўляюцца K^2-лагарыфмічна аднароднымі, то роўнасць (4.4.67) відавочна. Няхай $p = s^T x$. Функцыя

$$g(\hat{s}) \stackrel{\text{def}}{=} F(x) + F^D(\hat{s}) + K^2 \ln p \,,$$

азначаная на $\operatorname{int} C^D$, з'яўляецца строга выпуклай. Няхай $\tilde{s} = -(p/K^2) F'(x)$. З улікам (3.3.23) і (3.3.31), атрымліваем

$$\begin{aligned} g'(\tilde{s}) &= (F^D)'(-(p/K^2) F'(x)) \\ &= (F^D)'(-F'((K^2/p) x)) = -(K^2/p) x \,. \end{aligned} \tag{4.4.69}$$

Па (3.3.25) справядліва $\tilde{s}^T x = p$. Гэта і роўнасць (4.4.69) азначаюць, што $\tilde{s}$ ёсць адзіная (паколькі g строга выпуклая) кропка мінімума функцыі $g(\hat{s})$ на мностве $D \stackrel{\text{def}}{=} \{\hat{s} \in \text{int } C^D : x^T \hat{s} \geq p\}$. Паколькі $s \in D$, то

$$\begin{aligned} U(x, s) &= g(s) \geq g(\tilde{s}) \\ &= F(x) + F^D\left(-\frac{p}{K^2} F'(x)\right) + K^2 \ln p \\ &= F(x) + F^D(-F'(x)) - K^2 \ln \frac{p}{K^2} + K^2 \ln p \\ &= 2K^2 \ln K\,. \end{aligned}$$

□

Зусім не дзіўна цяпер (успомнім тэарэму 4.3.1), што адносную велічыню парыву двойнасці можна ацаніць праз патэнцыяльную функцыю.

Тэарэма 4.4.1 *Няхай* (x, s) *and* $(x^{(0)}, s^{(0)})$ *— строга дапушчальныя прама-двойныя пары. Тады*

$$\frac{s^T x}{(s^{(0)})^T x^{(0)}} \leq R(x^{(0)}, s^{(0)}) \exp\left(-\frac{V(x^{(0)}, s^{(0)}) - V(x, s)}{\gamma K}\right), \tag{4.4.70}$$

дзе

$$R(x, s) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(\frac{U(x, s) - 2K^2 \ln K}{\gamma K}\right). \tag{4.4.71}$$

Доказ. Па азначэнню V з улікам (4.4.66), маем

$$V(x, s) - V(x^{(0)}, s^{(0)}) = \gamma K \ln\left(\frac{s^T x}{(s^{(0)})^T x^{(0)}}\right) + U(x, s) - U(x^{(0)}, s^{(0)})\,.$$

З гэтай няроўнасці вынікае сцвярджэнне тэарэмы, так як па леме 4.4.1

$$U(x, s) - U(x^{(0)}, s^{(0)}) \geq 2K^2 \ln K - U(x^{(0)}, s^{(0)})\,.$$

□

4.4.2 Апісанне алгарытма

У гэтым параграфе мы разгледзім прама-двойны метад патэнцыяльнай функцыі (гл. мал. 4.5). Ядром гэтага алгарытма з'яўляецца працэдура $PD_{\gamma,\delta}$, якая па дадзенай строга дапушчальнай прама-двойнай пары (x, s) будуе іншую строга дапушчальную прама-двойную пару $(\overline{x}, \overline{y})$ (пара (x, y) на выхадзе працэдуры), такую, што $V(\overline{x}, \overline{s}) \leq V(x, s) - \alpha(\gamma, \delta)$, дзе $\alpha(\gamma, \delta)$ — канстанта, якая залежыць толькі ад параметраў γ, δ метада і не залежыць ад зыходных дадзеных задачы.

```
PD_{γ,δ}(x, s)
{
  ξ := arg min{Φ_x(p) : Ap = 0};
  λ := ||ξ||_{F''(x)};
  if (λ > δ) x := x + ξ/(1+λ);
  else s := −(c^T x)/(K^2 + γK) (F'(x) + F''(x)ξ);
}

PDalg(F,K,A,ε,γ,δ,x,s)
{
  for (;s^T x > ε;) PD_{γ,δ}(x, s);
}
```

Рис. 4.5: Прама-двойны метад патэнцыяльнай функцыі

Пры апісанні працэдуры $PD_{\gamma,\delta}$ і ў далейшым мы выкарыстоўваем наступныя абазначэнні:

$$
\begin{aligned}
g_x(z) &\stackrel{\text{def}}{=} F(z) + \frac{K^2+\gamma K}{s^T x}\, s^T(z-x) \\
\Phi_x(p) &\stackrel{\text{def}}{=} g'_x(x)^T p + \frac{1}{2} p^T g''_x(x) p\,.
\end{aligned}
$$

Функцыя g_x азначана на $\operatorname{dom} F$ і $g''_x(x) = F''(x)$. Зазначым таксама, што вектар ξ, які вылічваецца ў працэдуры $PD_{\gamma,\delta}$, ёсць ньютанаўскі напрамак функцыі g_x з кропкі x у нуль-прасторы матрыцы A, а λ — даўжыня ньютанаўскага кроку.

Тэарэма 4.4.2 *Для $\gamma > 0$ і $\delta \in (0,1)$, такіх, што*

$$\beta(\gamma,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma(\gamma(1-\delta)-\delta)}{1+\gamma} - \frac{\delta^2}{2(1-\delta)^2} > 0\,, \tag{4.4.72}$$

пара $(\overline{x}, \overline{s})$ строга дапушчальная і

$$V(\overline{x},\overline{s}) \le V(x,s) - \alpha(\gamma,\delta)\,, \tag{4.4.73}$$

дзе

$$\alpha(\gamma,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\delta - \ln(1+\delta), \beta(\gamma,\delta)\}\,. \tag{4.4.74}$$

Доказ. 1. Спачатку разгледзім выпадак, калі $\lambda > \delta$. Так як ξ ёсць кропка мінімума функцыі $\Phi_x(p)$, то вектар $\Phi'_x(\xi)$ артаганальны да $\mathcal{N}(\mathcal{A})$, г. зн. $\Phi'_x(\xi) \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^T)$. Так як $\xi \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$, то мы маем $\Phi'_x(\xi)^T\xi = 0$, з чаго вынікае

$$g'_x(x)^T\xi = -\xi^T g''_x(x)\xi = -\lambda^2.$$

Паколькі функцыя g_x строга самаўзгодненая і $g''_x(x) = F''(x)$, то

$$\|\overline{x} - x\|_{g''_x(x)} = \|\overline{x} - x\|_{g''_x(x)} = \frac{\lambda}{1+\lambda} < 1;$$

таму, згодна пункту а) тэарэмы 3.1.2, $\overline{x} \in \operatorname{dom} F$, г. зн. $\overline{x}$ — строга дапушчальнае рашэнне прамой задачы. Па тэарэме 3.1.3 (няроўнасць (3.1.6)),

$$\begin{aligned} g_x(\overline{x}) &\le g_x(x) + g'_x(x)^T(\overline{x} - x) - \frac{\lambda}{1+\lambda} - \ln\left(1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) \\ &= g_x(x) - \lambda^2 - \frac{\lambda}{1+\lambda} + \ln(1+\lambda) \qquad (4.4.75) \\ &< g_x(x) - (\lambda - \ln(1+\lambda)) \,. \end{aligned}$$

Так як лагарыфмічная функцыя ўвагнутая, то

$$\ln(s^T\overline{x}) - \ln(s^T x) \le \frac{1}{s^T x}(\overline{x} - x)\,.$$

Таму па (4.4.75)

$$\begin{aligned} V(\overline{x}, \overline{s}) - V(x, s) &= V(s, \overline{x}) - V(s, x) \\ &= (K^2 + \gamma K)\left(\ln(s^T\overline{x}) - \ln(s^T x)\right) + F(\overline{x}) - F(x) \\ &\le (K^2 + \gamma K)\frac{1}{s^T x}(\overline{x} - x) + F(\overline{x}) - F(x) \\ &= g_x(\overline{x}) - g_x(x) \le -(\lambda - \ln(1+\lambda)) \,. \end{aligned}$$

2. Цяпер разгледзім выпадак, калі $\lambda \le \delta$. Спачатку мы дакажам, што $\overline{s}$ — строга дапушчальны вектар двойных невязак. Пры абазначэннях

$$\rho \overset{\text{def}}{=} \gamma K, \quad \theta \overset{\text{def}}{=} \frac{s^T x}{K^2 + \rho} \quad \tilde{s} \overset{\text{def}}{=} -F'(x) - F''(x)\xi\,,$$

маем $\overline{s} = \theta\tilde{s}$. Па тэарэме 3.3.5, $-F'(x) \in \operatorname{dom} F^D$. Так як, згодна (3.3.32), $(F^D)''(-F'(x)) = F''(x)^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \|\tilde{s} - (-F'(x))\|^2_{(F^D)''(-F'(x))} &= (\tilde{s} + F'(x))^T F''(x)^{-1}(\tilde{s} + F'(x)) \\ &= \xi^T F''(x) F''(x)^{-1} F''(x)\xi \qquad (4.4.76) \\ &= \xi^T F''(x)\xi = \lambda^2 < \delta^2 < 1. \end{aligned}$$

Таму, згодна пункту а) тэарэмы 3.1.2, $\tilde{s} \in \operatorname{dom} F^D$ і, так як $\operatorname{dom} F$ — конус, $\overline{s} \in \operatorname{dom} F^D$.

Далей мы дакажам, што $\overline{s} \in c - \mathcal{R}(\mathcal{A}^T)$. Так як

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}(\overline{s} - s) &= \tilde{s} - \frac{K^2 + \gamma K}{s^T x}\, s \\ &= -F'(x) - F''(x)\xi - \frac{K^2 + \gamma K}{s^T x}\, s = -\Phi'(\xi)\,, \end{aligned}$$

то $\overline{s} = s - \theta\Phi'(\xi)$. Як мы ўжо адзначалі вышэй, $\Phi'(\xi) \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^{\mathcal{T}})$ і, паколькі $s \in c - \mathcal{R}(\mathcal{A}^{\mathcal{T}})$, то мы заключаем, што $\overline{s} \in c - \mathcal{R}(\mathcal{A}^{\mathcal{T}})$. Паколькі мы ўжо даказалі раней, што $\overline{s} \in \mathrm{dom}\, F^D$, то $\overline{s}$ ёсць строга дапушчальны вектар двойных невязак.

Цяпер давайце ацэнім велічыню

$$\begin{aligned}
\Delta &\stackrel{\mathrm{def}}{=} V(\overline{x},\overline{s}) - V(x,s)\\
&= (K^2+\rho)\left(\ln(\overline{s}^T x) - \ln(s^T x)\right) + F^D(\overline{s}) - F^D(s)\\
&= (K^2+\rho)\left(\ln(\theta\tilde{s}^T x) - \ln(s^T x)\right) + F^D(\theta\tilde{s}) - F^D(s)\\
&= K^2\left(\ln(\tilde{s}^T x) - \ln(s^T x)\right) + F^D(\tilde{s}) - F^D(s) + \rho\ln\left(\frac{\theta\tilde{s}^T x}{s^T x}\right).
\end{aligned}$$

Так як па (3.3.25) справядліва роўнасць $-F'(x)^T x = K^2$, то

$$\tilde{s}^T x = (-F'(x) - F''(x)\xi)^T x = K^2 - \eta\,,$$

дзе $\eta = \xi^T F''(x)x$. Калі ўспомнім, што $\theta = s^T x/(K^2+\rho)$, то

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\theta\tilde{s}^T x}{s^T x}\right) &= \ln\left(\frac{K^2-\eta}{K^2+\rho}\right) = \ln\left(1-\frac{\eta}{K^2}\right) - \ln\left(1+\frac{\rho}{K^2}\right),\\
\ln(\tilde{s}^T x) &= \ln(K^2-\eta) = 2\ln K - \ln\left(1-\frac{\eta}{K^2}\right)
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
\Delta &= K^2\left(2\ln K + \ln\left(1-\frac{\eta}{K^2}\right) - \ln s^T x\right)\\
&\quad + \rho\ln\left(1-\frac{\eta}{K^2}\right) - \rho\ln\left(1+\frac{\rho}{K^2}\right)\\
&\quad + F^D(\tilde{s}) - F^D(s)\,.
\end{aligned} \tag{4.4.77}$$

Няхай $\phi(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F^D(-F'(x) - tF''(x)\xi)$; тады $F^D(-F'(x) = \phi(0)$, $F^D(\tilde{s}) = \phi(1)$. Па (4.4.76), згодна пункту b) тэарэмы 3.1.2 (прымененай да F^D), для $t \in [0,1]$ маем

$$(1-t\delta)^2\phi''(0) \le \phi''(0) \le \frac{\phi''(0)}{(1-t\delta)^2}\,.$$

Такім чынам, з улікам роўнасцей (3.3.30) (3.3.31) і (3.3.32),

$$\begin{aligned}
F^D(\tilde{s}) &= \phi(1) \le \phi(0) + \phi'(0) + \frac{\phi''(0)}{(1-t\delta)^2}\\
&= F^D(-F'(x)) - \xi^T F''(x)((F^D)'(-F'(x))) +\\
&\quad \frac{1}{2(1-\delta)^2}\xi^T F''(x)(F^D)''(-F'(x))F''(x)\xi\\
&\le -F(x) + \eta + \frac{\delta^2}{2(1-\delta)^2}\,.
\end{aligned} \tag{4.4.78}$$

Так як па (4.4.68)

$$2K^2 \ln K - F(x) - F^D(s) - K^2 \ln(s^T x)) \leq 0\,,$$

то з (4.4.77) і (4.4.78) вынікае

$$\begin{aligned}
\Delta &\leq K^2 \left(2 \ln K + \ln\left(1 - \frac{\eta}{K^2}\right) - \ln s^T x\right) + \\
&\quad \rho \ln\left(1 - \frac{\eta}{K^2}\right) - \rho \ln\left(1 + \frac{\rho}{K^2}\right) \\
&\quad -K^2 - F(x) + \eta + \frac{\delta^2}{2(1-\delta)^2} - F^D(s) \\
&= (2K^2 \ln K - F(x) - F^D(s) - K^2 \ln(s^T x)) + \\
&\quad K^2 \ln\left(1 - \frac{\eta}{K^2}\right) + \rho \ln\left(1 - \frac{\eta}{K^2}\right) - \rho \ln\left(1 + \frac{\rho}{K^2}\right) + \\
&\quad \eta + \frac{\delta^2}{2(1-\delta)^2} \\
&\leq K^2 \ln\left(1 - \frac{\eta}{K^2}\right) + \rho \ln\left(1 - \frac{\eta}{K^2}\right) - \rho \ln\left(1 + \frac{\rho}{K^2}\right) + \\
&\quad \eta + \frac{\delta^2}{2(1-\delta)^2}\,.
\end{aligned}$$

Паколькі $x^T F''(x) x = K^2$ (гл. (3.3.26)) і $\xi^T F''(x)\xi = \lambda^2 \leq \delta^2$, то

$$\eta = \xi^T F''(x) x \leq \|\xi\|_{F''(x)} \|x\|_{F''(x)} \leq \delta K\,.$$

Далей, так як $\ln(1 - \eta/K^2) \leq -\eta/K^2$, $\rho = \gamma K$, і $K \geq 1$, то мы маем

$$\begin{aligned}
\Delta &\leq \rho \ln\left(1 - \frac{\eta}{K^2}\right) - \rho \ln\left(1 + \frac{\rho}{K^2}\right) + \frac{\delta^2}{2(1-\delta)^2} \\
&\leq \gamma\delta - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} + \frac{\delta^2}{2(1-\delta)^2} = -\beta(\gamma, \delta)\,.
\end{aligned}$$

□

Тэарэма 4.4.3 *Няхай параметры γ, δ прама-двойнага метада патэнцыяльнай функцыі задавальняюць умовам тэарэмы 4.4.2. Для $\epsilon > 0$, пачынаючы з прама-двойнай дапушчальнай пары $(x^{(0)}, s^{(0)})$, метад вылічвае дапушчальнае ϵ-аптымальнае рашэнне задачы (4.4.64) за*

$$N(\epsilon) = O\left(K \ln\left(\frac{(s^{(0)})^T x^{(0)} R(x^{(0)}, s^{(0)})}{\epsilon}\right)\right)$$

ітэрацый.

Доказ. Абазначым праз $(x^{(i)}, s^{(i)})$ прама-двойную дапушчальную пару, якую метад вылічвае на i-й ітэрацыі. Па тэарэмах 4.4.1 і 4.4.2, маем

$$\begin{aligned}\frac{(s^{(i)})^T x^{(i)}}{(s^{(0)})^T x^{(0)}} &\leq R(x^{(0)}, s^{(0)}) \exp\left(-\frac{V(x^{(0)}, s^{(0)}) - V(x^{(i)}, s^{(i)})}{\gamma K}\right) \\ &\leq R(x^{(0)}, s^{(0)}) \exp\left(-\frac{\alpha(\gamma, \delta)}{\gamma K}\, i\right), \end{aligned} \tag{4.4.79}$$

дзе $R(x, s)$ і $\alpha(\gamma, \delta)$ азначаюцца па (4.4.71) і (4.4.74). Лагарыфмуючы абедзве часткі няроўнасці (4.4.79), атрымліваем

$$\ln\left(\frac{(s^{(i)})^T x^{(i)}}{(s^{(0)})^T x^{(0)}}\right) \leq -\ln\Big(R(x^{(0)}, s^{(0)})\Big) - \frac{\alpha(\gamma, \delta)}{\gamma K}\, i\,. \tag{4.4.80}$$

Згодна правілу спынення алгарытма, мы маем $(s^{(N(\epsilon))})^T x^{(N(\epsilon))} \leq \epsilon$. Таму, выкарыстоўваючы (4.4.80), атрымліваем наступную ацэнку

$$N(\epsilon) \leq \left\lceil \frac{\gamma}{\alpha(\gamma, \delta)} K \ln\left(\frac{(s^{(0)})^T x^{(0)} R(x^{(0)}, s^{(0)})}{\epsilon}\right)\right\rceil\,.$$

□

У заключэнне зазначым, што велічыня $\frac{\gamma}{\alpha(\gamma,\delta)}$ прымае мінімальнае значэнне ≈ 22.2, калі $\gamma \approx 1.05$, $\delta \approx 0.34$.

4.4.3 Як знайсці стартавыя значэнні

Каб завяршыць апісанне прама-двойнага метада патэнцыяльнай функцыі, пакажам, як можна знайсці пачатковую прама-двойную дапушчальную пару $(x^{(0)}, y^{(0)})$. Мы разгледзім толькі выпадак паліэдральнай задачы ЛП. Таму дапусцім, што $C = \mathbf{R}^n_+$.

Няхай $M > 0$ дастаткова вялікі лік. Разгледзім наступныя мадыфікацыі прамой задачы (4.4.64)

$$\begin{array}{rcccccl} c^T x & + & M x_{n+1} & & & \rightarrow & \min \\ A x & + & \left(\frac{1}{M} b - A\,\mathrm{e}\right) x_{n+1} & & & = & b\,, \\ -\left(\mathrm{e} - \frac{1}{M} c\right)^T x & & & - & x_{n+2} & = & -\overline{M}\,, \\ & & x \geq 0, \quad x_{n+1} \geq 0, & & x_{n+2} \geq 0 & & \end{array}$$

і яе двойнай задачы (4.4.65)

$$\begin{array}{rccccl} b^T y & - & \overline{M} y_{m+1} & \rightarrow & \max \\ A^T y & - & \left(\mathrm{e} - \frac{1}{M} c\right) y_{m+1} & \leq & c\,, \\ \left(\frac{1}{M} b - A\,\mathrm{e}\right)^T y & & & \leq & M\,, \\ & & y_{m+1} & \geq & 0\,, \end{array}$$

дзе $\overline{M} = (n+1)M + \mathrm{e}^T c$. Нацяжка пераканацца, што для мадыфікаваных задач $x^{(0)} = M\,\mathrm{e}$, $x^{(0)}_{n+1} = x^{(0)}_{n+2} = M$ ёсць строга дапушчальнае прамое рашэнне, а $y^{(0)} = 0$, $y^{(0)}_{m+1} = M$ — строга дапушчальнае двойнае рашэнне.

4.5 Практыкаванні

1. Канкрэтызуйце метад бар'ераў у прымяненні да задачы выпуклага квадратычнага праграмавання (4.1.23).

2. Пакажыце, як можна рэалізаваць стратэгію "вялікіх крокаў"для прама-двойнага метада патэнцыяльнай функцыі. Ці можна гэта зрабіць без задання бар'ера F^D?

3. Ацаніце складанасць прама-двойнага метада патэнцыяльнай функцыі ў дачыненні да паліэдральнай задачы ЛП.

4. *Метад цэнтраў* пры рашэнні задачы (4.1.6) адслежвае кропкі *цэнтральнай траекторыі*

   $$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\min H(x,t),$$

   дзе
   $$H(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} -\psi \ln(t - f(x)) + F(x),$$
   $\psi \geq 1$, $t \in (t^*, \infty)$, $t^* = \inf_{x \in \text{dom } F} f(x)$.

   Па аналогіі з метадам бар'ераў запішыце ітэрацыйны працэс метада цэнтраў, абгрунтуйце яго карэктнасць і ацаніце хуткасць збягаемасці.

   Указанне: $H \in \mathbf{SSC}(\sqrt{K^2+1})$ пры фіксаваным t.

Глава 5

Цэлалікавае лінейнае праграмаванне

Задачай *цэлалікавага лінейнага праграмавання (ЦЛП)* называюць наступную задачу аптымізацыі

$$\max\{c^T x \,:\, Ax \le b\,,\, x \in \mathbf{Z}^n\},$$

дзе $c \in \mathbf{Z}^n$, $b \in \mathbf{Z}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbf{Z})$. Па аналогіі з лінейным праграмаваннем можна запісаць шэраг іншых фармулёвак задачы ЦЛП і даказаць іх эквівалентнасць.

На практыцы задачы ЦЛП узнікаюць не толькі ў тых выпадках, калі пры фармулёўцы задачы ЛП патрабуецца каб зменныя былі цэлымі. Важны клас задач ЦЛП складаюць задачы камбінаторнай аптымізацыі, у якіх з концага мноства альтэрнатыў трэба выбраць аптымальную. Таксама існуе шэраг нелінейных абмежаванняў, якія можна запісаць як лінейныя з цэлалікавымі зменнымі.

Цэлалікавае лінейнае праграмаваненне — гэта самастойны раздзел матэматычнага праграмавання. У гэтай главе мы спынімся толькі на тых метадах ЦЛП, у аснове якіх ляжыць сімплекс-метад. Мы таксама разгледзім некалькі прыкладаў прымянення паўазначанага праграмавання для рашэння задач камбінаторнай аптымізацыі. Але перш чым прыступіць да разгляду метадаў, мы засяродзім сваю ўвагу на нейкіх агульных прыёмах, якія выкарыстоўваюцца для запісу практычных задач як задач ЦЛП.

5.1 Цэлалікавасць і нелінейнасць

Праз абмежаванне "x цэлалікавае"можна выразіць многія нелінейныя абмежаванні. Разгледзім некалькі асобных выпадкаў.

1. **Функцыя кошту з фіксаванымі даплатамі** мае выгляд

$$c(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} ax+b, \text{ калі } 0 < L \le x \le U \\ 0, \text{ калі } x = 0 \end{cases}$$

Калі ўвесці цэлалікавую зменную $0 \le \delta \le 1$, і дабавіць абмежаванне $\delta L \le x \le U\delta$, то гэтую функцыю можна пераўтварыць у лінейную $\overline{c}(x,\delta) = ax+b\delta$. Функцыя кошту з фіксаванымі даплатамі ўзнікае заўсёды, калі неабходна пры інвестыцыях улічваць не толькі бягучыя выдаткі, але і пачатковыя аднаразавыя выдаткі, напрыклад, на закупку абсталявання, асваенне зямельнага ўчастка пад будаўніцтва, стварэнне новай фірмы.

2. **Дыхатамія**. Дапусцім, што ў нейкіх прымяненнях дапушчальныя рашэнні павінны задавальняць аднаму з двух абмежаванняў:

$$x \ge a \text{ або } y \ge b.$$

Калі ўвесці цэлалікавую зменную δ, $0 \le \delta \le 1$, то гэтую ўмову можна запісаць у выглядзе

$$x \ge \delta a\,,\; y \ge (1-\delta)b\,.$$

3. **Многаразовыя альтэрнатывы**. Часам умова задачы патрабуе выканання не ўсіх m абмежаванняў

$$A_i x \le b_i\,,\; i = 1,\ldots,m\,,$$

а толькі q з іх (няважна якіх). Увядзем зменную

$$y_i = \begin{cases} 1\,, \text{ калі абмежаванне } i \text{ выконваецца,} \\ 0\,, \text{ інакш.} \end{cases}$$

Цяпер перапішам абмежаванні так:

$$\begin{array}{rcl} A_i x & \le & b_i + y_i M\,,\; i = 1,\ldots,m\,, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_i & = & q\,, \\ 0 \le & y_i & \le 1\,. \end{array}$$

Тут M — дастаткова вялікі лік.

4. **Кавалкава-лінейная апраксімацыя нелінейнай сепарабельнай функцыі**

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\,.$$

Няхай

$$a_i = \delta_{i,0} < \delta_{i,1} \ldots < \delta_{i,r_i} = b_i$$

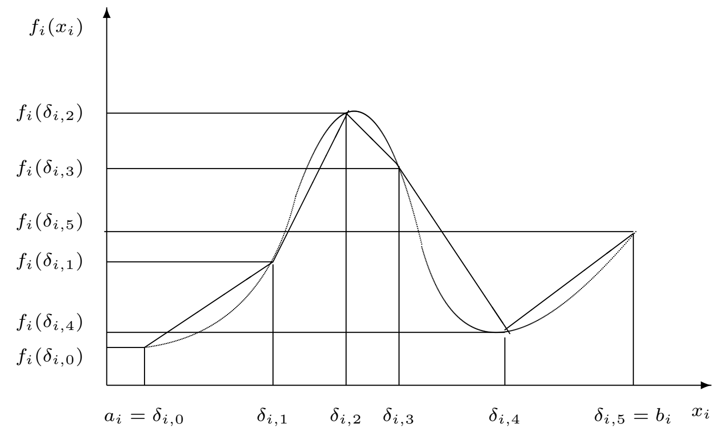


Рис. 5.1: Кавалкава-лінейная апраксімацыя нелінейнай сепарабельнай функцыі

ёсць разбіенне адрэзка $[a_i, b_i]$ вызначэння функцыі f_i. На адрэзку $[\delta_{i,k-1}, \delta_{i,k}]$ функцыю $f_i(x_i)$ апраксімуем кавалкава-лінейнай функцыяй (гл. мал. 5.1)

$$\tilde{f}_i(x) = \sum_{k=1}^{r_i} \left(f_i(\delta_{i,k-1}) + \frac{f_i(\delta_{i,k}) - f_i(\delta_{i,k-1})}{\delta_{i,k} - \delta_{i,k-1}} (x_i - \delta_{i,k-1}) \right) y_{ik}$$

пры абмежаваннях $\sum_{k=1}^{r_i} y_{ik} = 1$, $y_{ik} \in \mathbf{Z}_+$.

5. **Дыскрэтныя зменныя**. Няхай зменная x можа прымаць толькі значэнні $s_1 \dots, s_k$. Гэтую ўмову можна выразіць наступным чынам

$$\begin{aligned} x - s_1\delta_1 - s_2\delta_2 - \ldots - s_k\delta_k &= 0\,, \\ \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k &= 1\,, \\ \delta_i \in \mathbf{Z}_+\,,\ i = 1, \ldots, k\,. \end{aligned}$$

5.2 Прыклады камбінаторных задач

У гэтым параграфе мы разгледзім некалькі прыкладаў камбінаторных задач, якія можна вельмі проста сфармуляваць як задачы *булевага праграмавання*, г. зн. задачы ЦЛП, усе зменныя ў якіх прымаюць значэнні 0 ці 1.

Задачы аб упакоўцы, разбіенні і пакрыцці

Дадзена концае мноства S і сям'я яго падмностваў $\mathcal{E} = \{\mathcal{S}_\infty, \ldots, \mathcal{S}_\setminus\}$, $S_i \subseteq S$. Часта пару $H = (S, \mathcal{E})$ называюць *гіперграфам*. Па аналогіі з графамі, элементы мноства S называюць *вяршынямі*, а падмноствы з $\mathcal{E}$ — *гіперрэбрамі*.

Для прастаты, у далейшым будзем лічыць, што $S = N_m$. Матрыца $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ *інцыдэнцый тыпу вяршыні-рэбры* гіперграфа H мае элементы:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{калі } i \in S_j\,, \\ 0, & \text{калі } i \notin S_j\,. \end{cases}$$

Падмноства гіперрэбраў $\mathcal{J} \in \mathcal{E}$ называецца *упакоўкай*, калі кожная вяршыня S належыць не болей чым аднаму гіперрабру з $\mathcal{J}$. Калі кожны элемент з S належыць дакладна аднаму гіперрабру з $\mathcal{J}$, то $\mathcal{J}$ называецца *разбіеннем.* І, нарэшце, калі кожная вяршыня з S належыць не меней чым аднаму гіперрабру з $\mathcal{J}$, то $\mathcal{J}$ называецца *пакрыццём.*

Няхай кожнаму гіперрабру S_j прыпісаны *кошт* c_j. У *задачы аб упакоўцы* трэба сярод усіх упаковак знайсці тую, сумарны кошт гіперрэбраў якой максімальны. *Задачы аб пакрыцці і разбіенні* традыцыйна фармулюющца як задачы на мінімум, г. зн., што трэба, адпаведна, знайсці пакрыцё ці разбіенне з мінімальным сумарным коштам рэбраў.

Азначым вектар $x \in \mathbf{Z}^n$ па правілу:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{калі } S_j \text{ уключаецца ў пакрыццё,} \\ 0, & \text{інакш.} \end{cases}$$

Цяпер кожная з вышэй азначаных задач вельмі проста фармулюецца як задача ЦЛП:

- задача аб упакоўцы
$$\max\{c^T x \;:\; Ax \le \mathrm{e}\,,\; x \in \mathbf{Z}^n_+\}, \tag{5.2.1}$$
- задача аб разбіенні
$$\max\{c^T x \;:\; Ax = \mathrm{e}\,,\; x \in \mathbf{Z}^n_+\}, \tag{5.2.2}$$
- задача аб пакрыцці
$$\min\{c^T x \;:\; Ax \ge \mathrm{e}\,,\; 0 \le x \le \mathrm{e}\,,\; x \in \mathbf{Z}^n\}. \tag{5.2.3}$$

Калі кошты ўсіх гіперрэбраў роўны адзінцы, то тады прыватныя выпадкі задач аб упакоўцы пакрыцці і разбіенні называюцца, адпаведна, задачамі аб *максімальнай упакоўцы*, *мінімальных пакрыцці* і *разбіенні.*

Задача аб эфектыўнай экспедыцыі

Пры арганізацыі экспедыцыі імкнуцца мінімізаваць колькасць удзельнікаў, выбіраючы іх з n магчымых кандыдатаў. Экспедыцыі будзе патрэбна выконваць m відаў абавязковых работ. Таму для яе поспеху неабходна, каб для кожнай з гэтых работ у складзе ўдзельнікаў экспедыцыі была хаця б адна асоба, здольная яе выканаць. Няхай S_j будзе мноства работ, якія можа выконваць j-я асоба, $j = 1, \ldots, n$. Зразумела, што задачу аб эфектыўнай экспедыцыі можна сфармуляваць як задачу аб мінімальным пакрыцці ў гіперграфе $(N_m, \{S_j\}_{j=1}^n)$.

Задача аб дастаўцы

Нейкая фірма кожны дзень дастаўляе сваім кліентам тавары на аўтамабілях (або па чыгунцы, паветры, на баржах і г. д.). Маецца m кліентаў і n дапушчальных маршрутаў дастаўкі, j-ы маршрут дазваляе абслужыць падмноства кліентаў S_j і няхай c_j — выдаткі, звязаныя з яго эксплуатацыяй. Трэба выбраць такое мноства маршрутаў, каб было забяспечана абслугоўванне ўсіх кліентаў, і, пры гэтым, сумарныя выдаткі былі мінімальныя. Відавочна, што гэта задача з'яўляецца задачай аб пакрыцці ў гіперграфе $(N_m, \{S_j\}_{j=1}^n)$.

Задача аб дастаўцы можа ўтрымліваць таксама і абмежаванне $\sum_{j=1}^n x_j \le k$, што вызначае максімальна магчымую колькасць маршрутаў (напрыклад, фірма штодзённа мае магчымасць выпускаць на лінію не болей k аўтамабіляў).

Абагульненая задача аб прызначэннях

Маецца m тыпаў самалётаў, і n маршрутаў. Для кожнага маршруту j і для кожнага тыпу самалётаў i вядома частата f_{ij} палётаў па маршруце j (напрыклад, колькасць палётаў за тыдзень), якая дазваляе задаволіць камерцыйныя абмежаванні і якая дае максімальны прыбытак β_{ij} ад эксплуатацыі.

Задача аб аптымальным складзе паветранага флоту — гэта: надаць кожнаму маршруту j такі тып самалётаў i, каб кошт (выдаткі на эксплуатацыю мінус прыбытак) быў мінімальны, з поўным улікам абмежаванняў на колькасць наяўных самалётаў кожнага з тыпаў (абмежаванняў на памер паветранага флоту). Вызначым булевы зменныя x_{ij} наступным чынам:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{калі тып самалётаў } i \text{ прызначаны на маршрут } j, \\ 0, & \text{інакш.} \end{cases}$$

Абмежаванні на памер паветранага флоту можна выразіць наступным чынам. Няхай b_i ёсць поўная колькасць гадзін палётаў для самалётаў i-га тыпу, а h_{ij} абазначае колькасць гадзін, патрэбных самалёту тыпу i для ажыццяўлення палёту па маршруце j. Тады сума гадзін палётаў самалётаў тыпу i на маршруце j ёсць $a_{ij} = f_{ij}h_{ij}$. *Прызначэнне* x самалётаў на маршруты павінна задавальняць наступным m абмежаванням:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \le b_i\,, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Няхай F_i — пагадзінныя фінансавыя выдаткі для i-га тыпу самалётаў. Тады вартасць прызначэння тыпу самалётаў i на маршрут j ёсць $c_{ij} = F_{ij}a_{ij} - \beta_{ij}$.

Задача зводзіцца да вырашэння наступнай задачы ЦЛП:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} &\;\to\; \min \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} &\;\le\; b_i\,, \quad i=1,\dots,m, \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &\;=\; 1\,, \quad j=1,\dots,n, \\
x_{ij} &\;\in\; \mathbf{Z}_+\,, \quad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Задача (5.2.4) вядома як *абагульненая задача аб прызначэннях.* У прыватным выпадку, калі $m = n$ і

$$a_{ij} = 1,\ b_i = 1 \quad \text{для} \quad i,j = 1,\dots,n,$$

мы атрымліваем класічную *задачу аб прызначэннях.*

Задача каміваяжора

Каміваяжор, пачынаючы з горада 0 павінен аб'ехаць яшчэ n гарадоў $1,\dots,n$ і вярнуцца ў зыходны горад 0, пры ўмове, што ён павінен пабываць у кожным горадзе дакладна адзін раз. Адлегласці паміж гарадамі задаюцца матрыцай $C \in M_{n+1,n+1}(\mathbf{R}_+)$, дзе c_{ij} ёсць адлегласць ад горада i да горада j.

Пару (i,j) будзем называць *дарогай* з горада i у горад j. Супаставім пары (i,j) зменную x_{ij}, дзе $x_{ij} = 1$, калі дарога (i,j) належыць маршруту каміваяжора, і 0 у адваротным выпадку. Разгледзім наступную задачу ЦЛП:

$$\begin{array}{lll}
 & \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min & \\
(a) & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1, & j = 0,\dots,n\,, \\
(b) & \displaystyle\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1, & i = 0,\dots,n\,, \\
(c) & u_i - u_j + n x_{ij} \le n-1, & 1 \le i \ne j \le n, \\
(d) & x_{ij} \in \mathbf{Z}_+\,, & i,j = 0,\dots,n.
\end{array} \tag{5.2.5}$$

У задачы (5.2.5) частка зменных (x_{ij}, $i,j = 0,\dots,n$) павінна прымаць цэлыя значэнні, а другая частка (u_i, $i = 1,\dots,n$) можа прымаць любыя значэнні. Заўважым, аднак, што з доказу наступнай тэарэмы вынікае, што сярод аптымальных рашэнняў задачы (5.2.5) ёсць такое, усе кампаненты якога з'яўляюцца цэлымі.

Тэарэма 5.2.1 *Задача ЦЛП (5.2.5) эквівалентна задачы каміваяжора.*

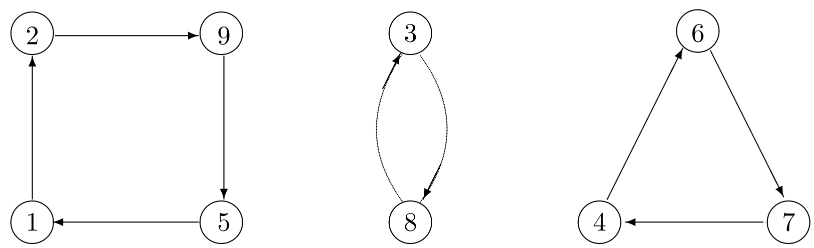


Рис. 5.2: Мноства неперасякальных цыклаў

Доказ. Роўнасці (a) адлюстроўваюць той факт, што ў кожны горад трэба ўехаць дакладна па адной дарозе, а роўнасці (b) азначаюць, што з кожнага горада трэба выехаць таксама роўна па адной дарозе. Цэлыя неадмоўныя рашэнні сістэмы ўраўненняў (a), (b) узаемна адназначна адпавядаюць мноствам *неперасякальных цыклаў* (гл. мал. 5.2), якія ў далейшым называем *кароткімі цыкламі.* Дапушчальнаму маршруту каміваяжора адпавядае адзін (доўгі) цыкл. Дакажам цяпер, што абмежаванні (c) выключаюць кароткія цыклы. Дапусцім адваротнае, што існуе дапушчальнае рашэнне (x, u) задачы (5.2.5), якому адпавядае не адзін цыкл даўжыні $n+1$, а некалькі цыклаў. Тады адзін з гэтых цыклаў, скажам $i_1, \ldots, i_k, i_1$ не праходзіць праз горад 0. Выпішам няроўнасці (b) для дарог на гэтым цыкле

$$\begin{aligned} u_{i_j} - u_{i_{j+1}} + n &\leq n-1\,, \quad j = 1, \ldots, k-1\,, \\ u_{i_k} - u_{i_1} + n &\leq n-1\,. \end{aligned}$$

Калі скласці гэтыя няроўнасці, то атрымаем супярэчнасць $kn \leq kn - k$.

Для завяршэння доказу пакажам, што для кожнага характарыстычнага вектара маршруту x існуе вектар u такі, што x і u задавальняюць абмежаванням (c). Сапраўды, няхай $u_i = t$, калі горад i наведваецца t-м па ліку, $t = 1, \ldots, n$. Калі $x_{ij} = 0$, то павінна быць $u_i - u_j \leq n-1$, $1 \leq i \neq j \leq n$, што заўсёды выконваецца па азначэнню вектара u. Калі $x_{ij} = 1$, то павінна выконвацца няроўнасць $u_i - u_j + n \leq n - 1$, што заўсёды так, бо $u_j = u_i + 1$. □

5.3 Метад галін і межаў

Метад галін і межаў — гэта адзін з агульных метадаў для вырашэння задач цэлалікавага праграмавання. Ён заснаваны на ідэі абмежаванага перабору дапушчальных рашэнняў. Для канкрэтнасці, будзем лічыць, што патрабуецца максімізаваць функцыю мэты. У працэсе перабору найлепшае (якое мае максімальнае значэнне функцыі мэты) са знойдзеных да дадзенага моманту рашэнняў называецца *рэкордным*, а значэнне функцыі мэты на ім — *рэкордам.* Метад галін і межаў незалежна ад прымянення ўлучае ў сябе:

- правіла вылічэння *(верхняй) мяжы* для функцыі мэты (калі трэба мінімізаваць функцыю мэты, то патрэбна ніжняя мяжа);
- спосаб разбіўкі задачы на падзадачы (*галінаванне*);
- *адсеў па мяжы* — калі мяжа для падзадачы не большая за рэкорд, то гэтая падзадача не мае лепшага рашэння, чым рэкорднае, і яе можна "адсеяць".

Будзем разглядаць задачу ЦЛП наступнага выгляду

$$\max\{c^T x \,:\, b^1 \le Ax \le b^2\,,\ d^1 \le x \le d^2\,,\ x \in \mathbf{Z}^n\}, \tag{5.3.6}$$

дзе $b^1, b^2 \in \mathbf{Z}^m$, $d^1, d^2 \in \mathbf{Z}^n$, $A \in M_{m,n}(\mathbf{Z})$. У якасці мяжы для гэтай задачы бярэцца аптымальнае значэнне функцыі мэты рэлаксацыйнай задачы ЛП

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x \,:\, b^1 \le Ax \le b^2\,,\ d^1 \le x \le d^2\,,\ x \in \mathbf{R}^n\}. \tag{5.3.7}$$

Калі аптымальнае рашэнне x^* задачы (5.3.7) з'яўляецца цэлалікавым, то яно, відавочна, будзе і аптымальным рашэннем задачы ЦЛП (5.3.6). У адваротным выпадку выбіраем нецэлалікавую каардынату x_i^* і дзелім (галінуем) задачу (5.3.6) на дзве падзадачы

$$\max\{c^T x \,:\, b^1 \le Ax \le b^2\,,\ d^1 \le x \le d^2(\lfloor x_i^* \rfloor, i)\,,\ x \in \mathbf{Z}^n\}\,, \tag{5.3.8}$$

$$\max\{c^T x \,:\, b^1 \le Ax \le b^2\,,\ d^1(\lceil x_i^* \rceil, i) \le x \le d^2\,,\ x \in \mathbf{Z}^n\}\,. \tag{5.3.9}$$

Тут вектар $d(\alpha, i)$ азначаецца наступным чынам:

$$d(\alpha, i) = \begin{cases} d_j\,, & \text{калі } j \ne i, \\ \alpha\,, & \text{калі } j = i. \end{cases}$$

Няхай x^1 і x^2 — аптымальныя рашэнні адпаведна задач (5.3.8) і (5.3.9). Тады адна з гэтых кропак з'яўляецца аптымальнай (менавіта тая, на якой значэнне функцыі мэты найбольшае) для зыходнай задачы (5.3.6).

Метад галін і межаў для задачы ЦЛП (5.3.6) прыведзены на мал. 5.3. На ўваход працэдуры *solve_ILP* падаюцца зыходныя дадзеныя аб задачы ЦЛП (вектары c, b^1, b^2, d^1, d^2 і матрыца A), а таксама дапушчальнае рашэнне x і $R = c^T x$. Калі знайсці дапушчальнае рашэнне задачы ЦЛП цяжка, то на ўваход працэдуры трэба падаваць $R = -\infty$. Калі і на выхадзе працэдуры *solve_ILP* $R = -\infty$, то задача ЦЛП не мае дапушчальных рашэнняў. Інакш, x ёсць аптымальнае рашэнне задачы.

У метадзе маецца неадназначнасць у выбары дробнай зменнай, калі іх некалькі. Адной з лепшых лічыцца стратэгія, пры якой выбіраецца тая зменная, якая прыводзіць да найменшага ўбывання ніжняй мяжы γ пасля выканання адной ітэрацыі двойнага сімплекс-метада з дабаўленым абмежаваннем (адным з двух магчымых). Абгрунтаваннем гэтага з'яўляецца жаданне хутчэй атрымаць як мага большы рэкорд, з дапамогай якога ў далейшым будзе адсеяна больш падзадач.

```
branch_and_bound(d^1, d^2)
{
  x^0 ∈ arg max{c^T x : b^1 ≤ Ax ≤ b^2 , d^1 ≤ x ≤ d^2};
  γ := ⌊c^T x^0⌋; // γ = −∞, калі задача ЛП не мае рашэння
  if (γ ≤ R) return;
  if (x^0 ∈ Z^n) { x := x^0; R = γ; }
  else {
    выбіраем x_i^0 ∉ Z;
    branch_and_bound(d^1, d^2(⌊x_i^0⌋, i));
    if (γ ≤ R) return;
    branch_and_bound(d^1(⌈x_i^0⌉, i), d^2);
  }
}
solve_ILP(c, b^1, b^2, A, d^1, d^2, x, R);
{
  branch_and_bound(d^1, d^2);
}
```

Рис. 5.3: Метад галін і межаў для задачы ЦЛП

Прыклад 5.3.1 *Разгледзім наступную задачу ЦЛП*

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \to & \max \\ -2x_1 & + & 3x_2 & \le & 4\,, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & \le & 11\,, \\ \multicolumn{5}{c}{1 \le x_1 \le 4\,,\ 1 \le x_2 \le 5\,,} \\ \multicolumn{5}{c}{x_1\,,\ x_2 \ - \textit{ цэлыя.}} \end{array}$$

Дрэва галінавання прадстаўлена на мал. 5.4. Усе падзадачы, якія ўзнікаюць ў працэсе рашэння задачы метадам галін і межаў, занумараваны лікамі ад 0 (зыходная задача) да 7. Рэлаксацыйныя задачы ЛП для вылічэння верхніх межаў вырашаюцца двойным сімплекс-метадам, пачынаючы з аптымальнага рашэння рэлаксацыйнай задачы ЛП для непасрэднага продка. Спачатку $R = -\infty$. Ніжэй прадстаўлены крокі рашэння задачы. Яны занумараваны двума лікамі $i.j$, дзе i ёсць нумар падзадачы, а j — нумар ітэрацыі двойнага сімплекс-метада.

0.0. $I = (3,4)$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = (4,5)^T$, $\pi = (1,2)^T$.

0.1. $s = 1$, $u = (-2,3)^T$, $\lambda = \frac{2}{3}$, $t = 2$, $I = (3,1)$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $x = (4,4)^T$, $\pi = (\frac{7}{3}, \frac{2}{3})^T$.

0.2. $s = 2$, $u = (\frac{10}{3}, \frac{2}{3})^T$, $\lambda = \frac{7}{10}$, $t = 1$, $I = (2,1)$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $x = (\frac{5}{2}, 3)^T$, $\pi = (\frac{7}{10}, \frac{1}{5})^T$, $\gamma^0 = 8$.

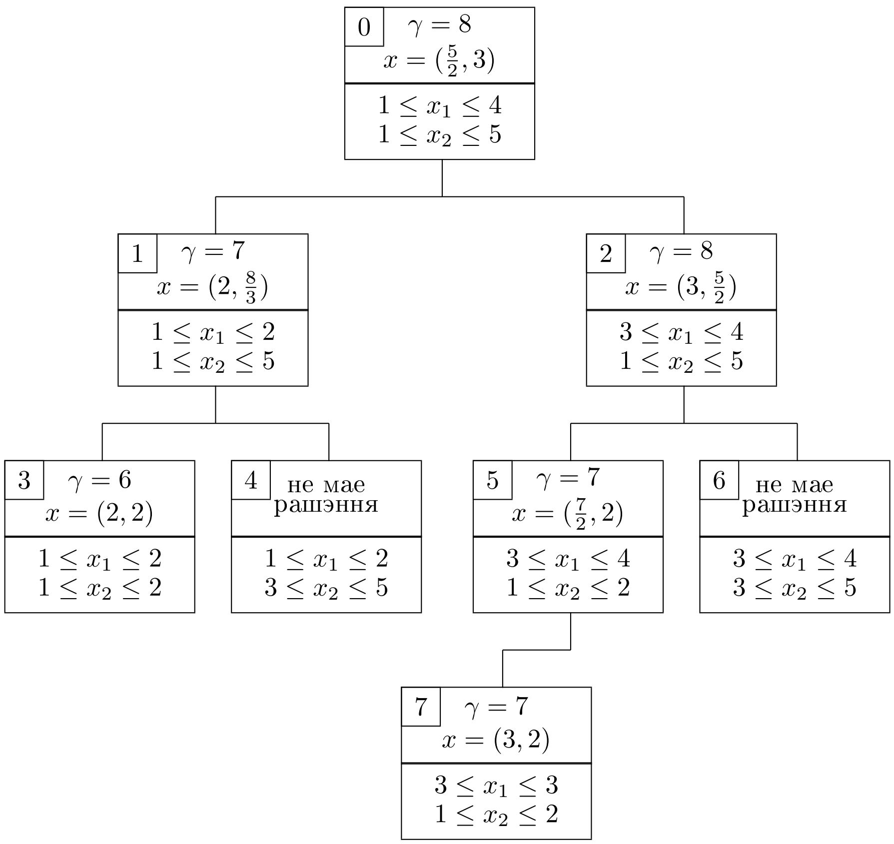


Рис. 5.4: Дрэва галінавання для прыклада 5.3.1

1.1. $s=3$, $u=(\frac{3}{10},-\frac{1}{5})^T$, $\lambda=\frac{7}{3}$, $t=1$, $I=(3,1)$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, $x=(2,\frac{8}{3})^T$, $\pi=(\frac{7}{3},\frac{2}{3})^T$, $\gamma^1=7$.

3.1. $s=4$, $u=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T$, $\lambda=2$, $t=2$, $I=(3,4)$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $x=(2,2)^T$, $\pi=(1,2)^T$, $\gamma^3=6$. Так як x цэлы і $\gamma^3>R$, то мяняем рэкорд і рэкорднае рашэнне: $R=6$, $x^R=(2,2)^T$.

4.1. $s=-4$, $u=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})^T$. Так як усе кампаненты вектара u недадатныя, то задача ЛП не мае дапушчальных рашэнняў.

2.1. $s=-3$, $u=(-\frac{3}{10},\frac{1}{5})^T$, $\lambda=1$, $t=2$, $I=(2,-3)$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1\\ \frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$, $x=(3,\frac{5}{2})^T$, $\pi=(1,1)^T$, $\gamma^2=8$

5.1. $s=4$, $u=(\frac{1}{2},1)^T$, $\lambda=1$, $t=2$, $I=(2,4)$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-1\\0&1\end{bmatrix}$, $x=(\frac{7}{2},2)^T$, $\pi=(\frac{1}{2},1)^T$, $\gamma^5=7$.

7.1. $s=3$, $u=(\frac{1}{2},-1)^T$, $\lambda=1$, $t=1$, $I=(3,4)$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $x=(3,2)^T$, $\pi=(1,2)^T$, $\gamma^7=7$. Так як x цэлы і $\gamma^7>R$, то мяняем рэкорд і рэкорднае рашэнне: $R=7$, $x^R=(3,2)^T$.

6.1. $s=-4$, $u=(-\frac{1}{2},-1)^T$. Так як усе кампаненты вектара u недадатныя, то задача ЛП не мае дапушчальных рашэнняў.

Паколькі больш няма нявырашаных падзадач, то рэкорднае рашэнне $x^R=(3,2)^T$ з'яўляецца аптымальным. □

У заключэнне прааналізуем ход рашэння прыклада 5.3.1 метадам галін і межаў, пры ўмове, што спачатку павінна рашацца тая падзадача, у якой пасля адной ітэрацыі двойнага сімплекс-метада убыванне функцыі мэты мінімальнае. Мы спачатку вырашылі б падзадачу 2 і атрымалі б рэкорд $R=7$. Так як $\gamma^1=7$, то падзадача 1 была б адсеяна адразу.

5.4 Метад адсячэнняў. Цэлалікавы алгарытм Гомары

Цэлалікавы алгарытм Гомары, які мы збіраемся разглядаць у гэтым параграфе можна лічыць абагульненнем двойнага сімплекс-метада ў прымяненні да задачы

$$\max\{c^Tx\,:\,Ax\le b\,,\;x\in\mathbf{Z}^n\},\tag{5.4.10}$$

дзе $c\in\mathbf{Z}^n$, $b\in\mathbf{Z}^m$, $A\in M_{m,n}(\mathbf{Z})$. Асноўныя адрозненні цэлалікавага метада Гомары ад двойнага сімплекс-метада ў наступным:

- адсячэнне бягучай кропкі $x^{(i)}$ можна выканаць не толькі гіперплоскасцю, якая ўваходзіць у абмежаванні задачы, а таксама любой іншай гіперплоскасцю $ax = \beta$, якая аддзяляе кропку $x^{(i)}$ і мноства дапушчальных рашэнняў задачы ЦЛП: $ax^{(i)} > \beta$, $ax \le \beta$ для ўсіх $x \in P_{\le}(A, b) \cap \mathbf{Z}^n$;

- усе базісныя матрыцы з'яўляюцца ўнімадулярнымі, г. зн. іх дэтэрмінанты роўны ± 1.

5.4.1 Апісанне алгарытма

Няхай $B \in M_{n,n}(\mathbf{Z})$, $\det B = \pm 1$, і вектар $\overline{x} \in \mathbf{Z}^n$, такія, што

(а) ўсе цэлалікавыя дапушчальныя рашэнні задачы (5.4.10) задавальняюць няроўнасцям $Bx \le B\overline{x}$;

(б) $\overline{x}$ з'яўляецца ддбр наступнай рэлаксацыйнай задачы ЛП

$$\max\{c^T x \,:\, Ax \le b\,,\; Bx \le B\overline{x}\}.$$

Калі $A\overline{x} \le b$, то $\overline{x}$ — аптымальнае рашэнне задачы ЦЛП (5.4.10). Інакш кропка $\overline{x}$ не задавальняе нейкай няроўнасці s, г. зн. $A_s\overline{x} > b_s$. Зробім замену зменных $y \stackrel{\text{def}}{=} B(x - \overline{x})$, ці $x = B^{-1}y + \overline{x}$. Так як $Bx \le B\overline{x}$, то $y \le 0$. У новых зменных няроўнасць $A_s x \le b_s$ прыме выгляд $A_s B^{-1} y \le b_s - A_s\overline{x}$. Увядзем абазначэнні $u^T = A_s B^{-1}$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} b_s - A_s\overline{x}$ і запішам гэтую няроўнасць у выглядзе $u^T y \le \beta$. Зазначым, што $\beta < 0$. Няхай $p > 0$. Тады

$$u_i = p\left\lceil \frac{u_i}{p} \right\rceil - r_i\,, \quad \text{дзе}\;\; 0 \le r_i < p\,,\; i = 1, \ldots, n\,.$$

Таксама β можна прадставіць у выглядзе

$$\beta = p\left\lfloor \frac{\beta}{p} \right\rfloor + q\,, \quad 0 \le q < p\,.$$

Цяпер няроўнасць $u^T y \le \beta$ можна перапісаць наступным чынам

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p\left\lceil \frac{u_i}{p} \right\rceil - r_i \right) y_i \le p\left\lfloor \frac{\beta}{p} \right\rfloor + q\,,$$

ці пасля перагрупоўкі

$$-\sum_{i=1}^{n} r_i y_i \le q + p\left(\left\lfloor \frac{\beta}{p} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{u_i}{p} \right\rceil y_i \right)\,. \tag{5.4.11}$$

Абазначым выраз, які стаіць у круглых скобках у правай частцы (5.4.11), праз γ. Дакажам, што $\gamma \ge 0$. Калі гэта не так, то з улікам таго, што γ —

цэлы лік, $\gamma \le -1$. Так як $y_i \le 0$ і $r_i \ge 0$ $(i = 1\dots,n)$, то злева ў (5.4.11) стаіць неадмоўны лік. Адкуль маем

$$0 \le q + p\gamma \le q - p < 0\,.$$

Атрыманая супярэчнасць даказвае, што $\gamma \ge 0$, ці

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{u_i}{p} \right\rceil y_i \le \left\lfloor \frac{\beta}{p} \right\rfloor\,. \tag{5.4.12}$$

Калі ўвядзем абазначэнні

$$v \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\left\lceil \frac{u_1}{p} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{u_n}{p} \right\rceil \right)^T\,, \quad \alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\lfloor \frac{\beta}{p} \right\rfloor\,,$$

то (5.4.12) запішам у вектарным выглядзе $v^T y \le \alpha$. Калі вернемся да зыходных зменных x, то атрымаем няроўнасць

$$v^T Bx \le \alpha + v^T B\overline{x}\,. \tag{5.4.13}$$

Так як $\alpha < 0$, то $\overline{x}$ не задавальняе няроўнасці (5.4.13). Значыць для любога $p > 0$ няроўнасць (5.4.13) задае адсячэнне для кропкі $\overline{x}$.

Выбарам p (гл. тэарэму 5.4.1 ніжэй) мы гарантуем, што

- *вядучы элемент* $v_t = 1$ і таму пасля выканання адной ітэрацыі двойнага сімплекс-метада базісная матрыца будзе заставацца ўнімадулярнай;
- $(A(B))^t \stackrel{\mathrm{lex}}{\preceq} (A(B))^j / v_j$ для ўсіх j, такіх, што $v_j > 0$.

Абазначым праз $\overline{B}$ матрыцу, якая атрымліваецца з матрыцы B заменай радка B_t на радок $v^T B$. Так як $\overline{B}B^{-1} = I(t,v)$, то яе дэтэрмінант роўны $v_t = 1$. Цяпер з роўнасці

$$1 = \det I(t,v) = \det \overline{B}B^{-1} = \det \overline{B} \cdot \det B^{-1}$$

маем, што $\det \overline{B} = \det B = \pm 1$. З роўнасці $\overline{B} = I(t,v)B$ вынікае, што $\overline{B}^{-1} = B^{-1} I(t,v)^{-1}$. А з роўнасці $\overline{B}(x - \overline{x}) = \alpha\, \mathrm{e}_t$ атрымліваем $x = \alpha(\overline{B}^{-1})^t + \overline{x}$ новае цэлалікавае ддбр.

Дэталёвае апісанне алгарытма прыведзена на мал. 5.5.

Прыклад 5.4.1 *Трэба вырашыць наступную задачу*

$$\begin{array}{rcccl}
x_1 & + & 2x_2 & \to & \max \\
3x_1 & + & 2x_2 & \le & 6\,, \\
-3x_1 & + & 2x_2 & \le & 0\,, \\
 & 0 \le & x_1 & \le 2 & \\
 & 0 \le & x_2 & \le 2 & \\
 & x_1\,, & x_2 & - \text{\it цэлыя} &
\end{array}$$

```
cutting(c, A, b, B^{-1}, x)
{
  π^T := c^T B^{-1};
  for (; s := separate(x)) ≠ 0; ) {
    u^T := A_s B^{-1}; // u^T ёсць A_s запісаны ў базісе B
    if (u ≤ 0) return; // няма дапушчальных рашэнняў
    t := arg lexmin{(A(B))^j : j ∈ N_n , u_j > 0}; λ := π_t;
    for (j ∈ {i ∈ N_n : u_j > 0})
      μ_j := max{μ : A(B)^t ⪯^{lex} A(B)^j/μ};
    p := max_{j: u_j>0} u_j/μ_j; v := ⌈u/p⌉; α := ⌊(b_s − A_s x)/p⌋;
    B^{-1} := B^{-1} I(t, v)^{-1};
    π := π − λv; π_t := λ;   // знаходзім π^T = c^T B^{-1}
    x := x + α(B^{-1})^t;
  }
}
```

Рис. 5.5: Цэлалікавы алгарытм Гомары

Пачынаем рашэнне з наступных ддбр і адваротнай базіснай матрыцы:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ніжэй мы прыводзім ітэрацыі метада (гл. таксама мал. 5.4.1).

1. $s = 1$, $u = (3, 2)^T$, $\beta = -4$, $t = 1$, $p = 3$; $v = (1, 1)^T$, $\alpha = \lfloor -4/3 \rfloor = -2$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $s = 2$, $u = (-3, 5)^T$, $\beta = -4$, $t = 2$, $p = 5$; $v = (0, 1)^T$, $\alpha = \lfloor -4/5 \rfloor = -1$,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так як кропка $x^{(2)}$ задавальняе ўсім абмежаванням задачы, то яна з'яўляецца яе аптымальным рашэннем. □

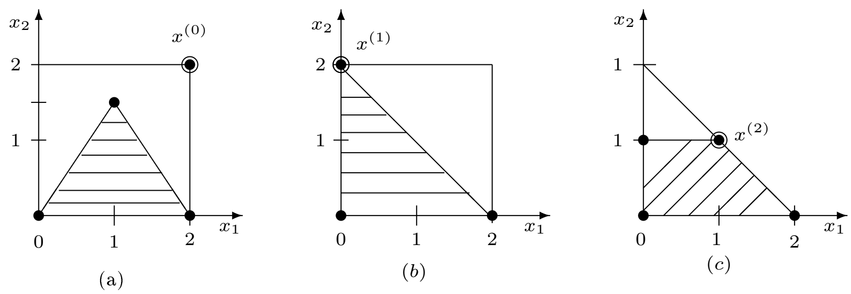


Рис. 5.6: Ілюстрацыя да прыклада 5.4.1

5.4.2 Концасць метада

Тэарэма 5.4.1 *Няхай у пачатку цэлалікавага алгарытма Гомары ўсе слупкі матрыцы*

$$A(B) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} c^T \\ A \end{bmatrix} B^{-1}$$

лексікаграфічна дадатныя. Тады метад спыняецца пасля концай колькасці ітэрацый, калі карыстацца наступнымі правіламі параджэння адсячэнняў і выканання замяшчэння радкоў базіса:

(a) $s = \min\{i \;:\; A_i x > b_i\}$.

(b) $t = \arg\operatorname{lexmin}\left\{(A(B))^j \;:\; j \in N_n\,,\; u_j > 0\right\}$.

(c) Для кожнага j, такога, што $u_j > 0$, няхай μ_j — найбольшы цэлы лік, такі, што $A(B)^t \overset{\text{lex}}{\preceq} A(B)^j/\mu_j$. Выбраць $p = \max_{j:\, u_j > 0} u_j/\mu_j$.

Доказ. Так як мы выкарыстоўваем лексікаграфічны варыянт двойнага сімплекс-метада, то па тэарэме 2.2.3 на працягу выкання алгарытма вектар невязак $r(x)$, дзе $r_0(x) = -c^T x$ і $r_i(x) = b_i - A_i x$ $(i = 1, \dots, m)$, строга лексікаграфічна ўзрастае. Па правілу (a), пакуль $r_1(x) < 0$, алгарытм будуе адсячэнні па першай няроўнасці ($s = 1$). Так як кожная з гэтых ітэрацый павялічвае $r_1(x)$ на цэлы лік, то колькасць такіх ітэрацый концая. Пасля таго як невязка $r_1(x)$ стане неадмоўнай, яна будзе заставацца неадмоўнай і на ўсіх наступных ітэрацыях (інакш на адной з ітэрацый вектар $r(x)$ павінен лексікаграфічна паменшыцца, што немагчыма). Аналагічныя разважанні можна правесці і для другой, трэцяй і г. д. кампанент вектара $r(x)$. Такім чынам, пасля концай колькасці ітэрацый вектар невязак стане неадмоўным і мы атрымаем дапушчальнае ддбр. $\square$

5.5 Паўазначанае праграмаванне ў камбінаторнай аптымізацыі

Да нядаўняга часу дапушчальны абсяг камбінаторнай аптымізацыйнай задачы задавалі выключна сістэмай лінейных няроўнасцей. Выкарыстанне квадратычных абмежаванняў (і абмежаванняў больш высокіх парадкаў) стрымлівалася тым, што дагэтуль амаль нічога невядома аб рашэнні сістэм квадратычных ураўненняў і няроўнасцей. Істотны прарыў у напрамку выкарыстання квадратычных абмежаванняў звязаны з тэорыяй паўазначанага праграмавання. Сістэматычныя даследаванні па прымяненню паўазначанага праграмавання ў камбінаторнай аптымізацыі толькі што пачаліся, але ўжо зараз праглядваюцца вялікія перспектывы дадзенага падыходу.

5.5.1 Устойлівыя мноствы графаў

Няхай $G = (V, E)$ ёсць граф[1] з мноствам вяршынь V. Кожнай вяршыні $i \in V$ прыпісаны кошт c_i. Падмноства S папарна не змежных вяршынь называецца *ўстойлівым*. У задачы *аб упакоўцы вяршынь графа* трэба знайсці ўстойлівае мноства з максімальным сумарным коштам яго вяршынь.

Да задачы аб ўпакоўцы вяршынь графа можна звесці агульную задачу аб упакоўцы

$$\max\{c^T x \,:\, Ax \le \mathrm{e},\ x \in \mathbf{Z}^n_+\}\,, \tag{5.5.14}$$

дзе $c \in \mathbf{R}^n$, $A \in M_{m,n}(\{0,1\})$. *Граф перасячэнняў* G_A матрыцы A азначаецца на мностве вяршынь $V = N_n$ і мае наступнае мноства рэбраў:

$$E_A \stackrel{\text{def}}{=} \{(i,j) \in N_n \,:\, (A^i)^T A^j \ne 0\}\,.$$

Няцяжка пераканацца, што дапушчальнымі рашэннямі задачы (5.5.14) з'яўляюцца характарыстычныя вектары ўстойлівых мностваў графа G_A. Таксама зразумела, што ўстойліваму мноству з максімальным коштам вяршынь адпавядае аптымальнае рашэнне задачы (5.5.14).

У далейшым для прастыты будзем лічыць, што $V = N_n$. Сфармулюем задачу аб ўпакоўцы вяршынь графа як задачу квадратычнага праграмавання:

$$\begin{array}{rcl} \omega(c,G) & \stackrel{\text{def}}{=} & \max c^T x \\ x_i^2 & = & x_i\,, \quad i = 1,\dots,n\,, \\ x_i x_j & = & 0\,, \quad (i,j) \in E\,. \end{array} \tag{5.5.15}$$

Няцяжка пераканацца, што дапушчальнымі рашэннямі задачы (5.5.15) з'яўляюцца толькі характарыстычныя вектары ўстойлівых мностваў. Канкрэтызуем задачу паўазначанага праграмавання (1.3.26) у дачыненні да задачы (5.5.15).

[1] Нагадаем, што пара $G = (V, E)$ называецца графам, калі V концае мноства, элементы якога называюцца *вяршынямі*, а E ёсць мноства неўпарадкаваных пар розных вяршынь з V. Элементы мноства E называюцца *рэбрамі*. Калі $(v, w) \in E$, то вяршыні v і w *змежныя*, а рабро $(v, w))$ *інцыдэнтна* вяршыням v і w.

Паколькі абмежаванню $x_i^2 - x_i = 0$ адпавядае матрыца

$$A^i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}_i^T \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}_i & \mathrm{e}_i\,\mathrm{e}_i^T \end{bmatrix},$$

дзе $\mathrm{e}_i \in \mathbf{R}^n$ ёсць i-ы адзінкавы орт, то

$$0 = \left(A^i, P\right) = p_{ii} - \frac{1}{2}p_{0i} - \frac{1}{2}p_{i0}$$

Абмежаванню $x_i x_j = 0$ адпавядае матрыца

$$A^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}_i\,\mathrm{e}_j^T + \mathrm{e}_j\,\mathrm{e}_i^T\right) \end{bmatrix},$$

таму

$$0 = \left(A^{ij}, P\right) = \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji})\,.$$

Цяпер мы можам запісаць задачу (1.3.26) наступным чынам:

$$\begin{array}{l} \gamma(c,G) \stackrel{\text{def}}{=} \max \sum_{i=1}^n c_i p_{0i} \\ p_{00} = 1, \\ p_{ii} = p_{0i}\,, \quad i = 1,\dots,n, \\ p_{ij} = 0, \quad (i,j) \in E, \\ P \in SM_+^{n+1}\,. \end{array} \tag{5.5.16}$$

Нагадаем, што, згодна тэарэме 1.2.1 і тэарэме двойнасці 1.3.2, лік $\gamma(c,G)$ з'яўляецца верхняй мяжой для аптымальнага значэння $\omega(c,G)$ задачы (5.5.15) аб упакоўцы вяршынь графа G.

Калі матрыца P ёсць дапушчальнае рашэнне задачы (5.5.16), то пры абазначэннях $x_i \stackrel{\text{def}}{=} p_{ii} = p_{0i} = p_{i0}$ яна мае выгляд:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_1 & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ x_2 & p_{21} & x_2 & \cdots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

У далейшым вектар $(p_{01},\dots,p_{0n})$ мы будзем абазначаць праз $x(P)$.

Падграфам графа G, народжаным падмноствам вяршынь $S \subseteq V$, называецца граф $G(S) = (S, E(S))$, дзе $E(S) = \{(i,j) \in E \ : \ i,j \in S\}$. Граф называецца *поўным*, калі ўсе яго вяршыні папарна змежныя. Падмноства вяршынь C графа G называецца *клікай*, калі $G(C)$ поўны граф. Шматграннік

$$P_C(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{R}_+^n \ : \ \textstyle\sum_{i \in C} x_i \le 1 \ \text{для любой клікі } C \text{ графа } G\}$$

называецца *клікавым шматграннікам* графа G. Няцяжка пераканацца, што характарыстычныя вектары ўстойлівых мностваў належаць $P_C(G)$. Нават больш таго, яны з'яўляюцца яго вяршынямі. Шкада, але шматграннік $P_C(G)$ можа мець і дробныя вяршыні. Напрыклад, калі G ёсць цыкл на 5-ці вяршынях (г. зн. $E = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\}$), кропка $x = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ з'яўляецца вяршыняй клікавага шматгранніка.

Азначым мноства

$$PD(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{x(P) : P \text{ — дапушчальнае рашэнне задачы (5.5.16)}\}$$

Няцяжка пераканацца, што $PD(G)$ — выпуклае мноства. Выпуклую абалонку характарыстычных вектараў устойлівых мностваў абазначым праз $P_{ST}(G)$.

Тэарэма 5.5.1 *Маюць месца ўлучэнні* $P_{ST}(G) \subseteq PD(G) \subseteq P_C(G)$.

Доказ. Першае ўлучэнне дакажам ад адваротнага. Дапусцім, што I — устойлівае мноства і $\chi^I \notin PD(G)$. Па тэарэме аб адасобленасці выпуклых мностваў У.3.4 існуе $\in \mathbf{R}^n$, што ${}^T\chi^I > c^T x$ для ўсіх $x \in PD(G)$. Але апошняе супярэчыць таму, што $\omega(c,G) \leq \gamma(c,G)$.

Другое ўлучэнне правяраецца яшчэ прасцей. Няхай $i \in V$, $C \subseteq V$ ёсць кліка ў графе G і няхай $P \in SM_+^{n+1}$ ёсць дапушчальнае рашэнне задачы (5.5.16). Паколькі матрыца P неадмоўна азначана, то мы маем

$$\begin{aligned} x_i &= (0, \mathrm{e}_i^T) P \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}_i \end{pmatrix} \geq 0, \\ 1 - \sum_{i \in C} x_i &= \left(1, -(\chi^C)^T\right) P \begin{pmatrix} 1 \\ -\chi^C) \end{pmatrix} \geq 0\,. \end{aligned}$$

□

Дасканалыя графы

У гэтым параграфе мы будзем разглядаць такія графы, для якіх усе ўлучэнні з лемы 5.5.1 выконваюцца як роўнасці. У гэтым выпадку мы зможам пабудаваць эфектыўны алгарытм для рашэння задачы аб упакоўцы вяршынь графа.

Храматычным лікам графа G (абазначаем праз $\nu(G)$) называецца мінімальная колькасць колераў, неабходных для афарбоўкі яго вяршынь, пры ўмове, што змежныя вяршыні павінны мець розныя колеры. Абазначым моц максімальнай (па колькасці вяршынь) клікі графа G праз $\alpha(G)$. Зразумела, што $\nu(G) \geq \alpha(G)$. Граф G называецца *дасканалым*, калі $\nu(G(S)) = \alpha(G(S))$ для любога падмноства S яго вяршынь.

Тэарэма 5.5.2 *Граф G дасканалы тады і толькі тады, калі шматграннік $P_C(G)$ цэлалікавы.*

```
StableSet(c, G)
{
  знаходзім аптымальнае рашэнне P* задачы (5.5.16);
  x* = x(P*); S = {i : x*_i = 1};
  if (x* ∈ Z^n) return S;
  else {
    выбіраем дробную кампаненту x*_i; S := S ∪ {i};
    J := S ∪ {j ∈ V : існуе i ∈ S, што (i, j) ∈ E};
    return S ∪ StableSet(c, G(V \ J));
  }
}
```

Рис. 5.7: Алгарытм для вырашэння задачы аб упакоўцы вяршынь дасканалага графа

Доказ тэарэмы зацікаўлены чытач можа знайсці ў [6]. □

Пакажам, як можна вырашыць задачу аб упакоўцы вяршынь для дасканалага графа G. З тэарэм 5.5.1 і 5.5.2 вынікае, што $P_{ST}(G) = PD(G)$. Таму па тэарэме 1.2.1 мае месца роўнасць $\omega(c, G) = \gamma(c, G)$. Няхай P^* — аптымальнае рашэнне задачы (5.5.16), а $x^* = x(P^*)$. Так як па леме 5.5.1 кропка x^* належыць $P_C(G)$, то існуе мноства вяршынь $x^1, \dots, x^k$ ($k \le n$) шматгранніка $P_C(G)$, што

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

для нейкіх дадатных лікаў λ_i, такіх, што $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Няцяжка пераканацца ў справядлівасці наступных уласцівасцей:

- x^i з'яўляецца характарыстычным вектарам аптымальнага ўстойлівага мноства ($i = 1, \dots, k$);

- калі $x^*_i > 0$, то існуе аптымальнае ўстойлівае мноства I, што $i \cup \{j \in N_n : x^*_j = 1\} \subseteq I$;

З гэтых уласцівасцей адразу вынікае алгарытм (гл. мал. 5.7) для вырашэння задачы аб упакоўцы вяршынь дасканалага графа.

5.5.2 Максімальныя разрэзы

Дадзен поўны граф G на мностве вяршынь $V = N_n$ і сіметрычная матрыца $W \in SM^n$, элемент $w_{ij} \ge 0$ якой ёсць *вага* рабра (i, j). *Разрэз* ёсць рабіенне $(S, \overline{S})$ мноства вяршынь V, а яго велічыня $w(S) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in S,\, j \in \overline{S}} w_{ij}$. *Задачу аб максімальным разрэзе*, у якой трэба знайсці разрэз максімальнай велічыні, можна сфармуляваць як наступную задачу цэлалікавага квадратычнага праграмавання:

$$
\begin{aligned}
Z_{MC} = \max\ & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} w_{ij}(1 - x_i x_j) \\
& x_i^2 = 1, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{5.5.17}
$$

Каб пераканацца ў гэтым, зазначым, што любы вектар x з кампанентамі $-1, 1$ азначае мноства $S \stackrel{\text{def}}{=} \{i : x_i = 1\}$, якому адпавядае разрэз велічыні

$$
w(S) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} w_{ij}(1 - x_i x_j)\,.
$$

Рэлаксацыйная задача

Задача аб максімальным разрэзе з'яўляецца **NP**-цяжкай[2]. Гэта значыць, што, хутчэй за ўсё, для яе рашэння не існуе палінаміяльнага алгарытма. Таму мэтазгодна паспрабаваць вырашыць яе прыблізна. Разгледзім наступную рэлаксацыю задачы (5.5.17). Мы можам інтэрпрэтаваць $x_i \in \{-1, 1\}$ як аднамерны вектар адзінкавай нормы. Заменім x_i вектарам $v^i \in \mathbf{R}^n$ адзінкавай нормы і атрымаем задачу:

$$
\begin{aligned}
Z_P = \max\ & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} w_{ij}\left(1 - (v^i)^T v^j\right) \\
& v^i \in S_n, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{5.5.18}
$$

дзе $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathbf{R}^n : \|v\| = 1\}$ ёсць *адзінкавая сфера* ў $\mathbf{R}^n$. Відавочна, што $Z_P \geq Z_{MC}$.

Пакажам як можна вырашыць задачу (5.5.18). Па мноству вектараў $v^1, \ldots, v^n \in \mathbf{R}^n$ мы можам азначыць *матрыцу Грама* $Y = [y_{ij}] \in SM_+^n$ па правілу: $y_{ij} = (v^i)^T v^j$. Зазначым, што $y_{ii} = \|v^i\|^2$. Наадварот, калі $Y \in SM_+^n$, то $Y = B^T B$ ёсць матрыца Грама для вектараў $v^1, \ldots, v^n$, якія з'яўляюцца слупкамі матрыцы $B \in M_{n,n}(\mathbf{R})$. Выкарыстоўваючы гэту эквівалентнасць, мы можам сфармуляваць задачу (5.5.18) як наступную задачу паўазначанага праграмавання:

$$
\begin{aligned}
Z_P = \max\ & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} w_{ij}(1 - y_{ij}) \\
& y_{ii} = 1, \quad i = 1, \ldots, n, \\
& Y \in SM_+^n\,.
\end{aligned} \tag{5.5.19}
$$

Задачу (5.5.19) можна вырашыць з дакладнасцю $\epsilon > 0$ за час палінаміяльны па n і $\log \frac{1}{\epsilon}$. Гэта можна зрабіць, напрыклад, метадам бар'ераў. Заўважым, што $I \in \operatorname{rint}\, D$, дзе D — дапушчальны абсяг задачы (5.5.19), і $\operatorname{sym}(I, D) = 1$.

[2] Інфармацыю аб **NP**-цяжкіх задачах чытач можа знайсці ў [3] і [6].

Прыблізны імаверны алгарытм

Цяпер мы можам апісаць вельмі просты імаверны алгарытм для прыблізнага вырашэння задачы аб максімальным разрэзе.

Алгарытм MAXCUT.

1. Для $\epsilon > 0$, знаходзім ϵ-аптымальнае рашэнне $\tilde{Y}$ задачы (5.5.19).

2. Выкарыстоўваючы няпоўную фактарызацыю Халескага, вылічваем расклад $\tilde{Y} = B^T B$ і атрымліваем вектары $v^1, \ldots, v^n$, для якіх выконваецца няроўнасць

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} w_{ij} \left(1 - (v^i)^T v^j\right) \geq Z_P - \epsilon \,. \tag{5.5.20}$$

3. Будуем вектар $a \in \mathbf{R}^n$, каардынаты $a_1, \ldots, a_n$ якога з'яўляюцца незалежнымі нармальнымі выпадковымі велічынямі. Будуем мноства $S = \{i \,:\, a^T v^i \geq 0\}$. Іншымі словамі, мы выбіраем выпадковую гіперплоскасць $H(a, 0)$, якая праходзіць праз пачатак каардынат, і да мноства S адносім нумары тых вектараў v^i, якія ляжаць вышэй гэтай гіперплоскасці.

Нам засталося ацаніць дакладнасць прадстаўленага алгарытма.

Лема 5.5.1 *Для $-1 \leq y \leq 1$ выконваецца няроўнасць*

$$\frac{1}{\pi} \arccos y \geq \alpha \cdot \frac{1}{2}(1 - y) \,, \tag{5.5.21}$$

дзе

$$\alpha = \min_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{2\theta}{\pi(1 - \cos\theta)} > 0.87856. \tag{5.5.22}$$

Доказ. Няроўнасць (5.5.21) відавочна, так як пасля замены $y = \cos\theta$ маем

$$\alpha \leq \frac{2\theta}{\pi(1 - cos\theta)} \,.$$

Няцяжка пераканацца, што значэнне α дасягаецца, калі θ ёсць ненулявы корань ураўнення $\cos\theta + \theta \sin\theta = 1$. Непасрэднымі вылічэннямі можна праверыць, што $\alpha > 0.87856$. □

Тэарэма 5.5.3 *Для $\epsilon > 0$ мае месца наступная ацэнка для матэматычнага чакання $E(W)$ велічыні $w(S)$ разрэза $(S, \overline{S})$, пабудаванага алгарытмам MAXCUT,*

$$E(W) \geq \alpha(Z_{MC} - \epsilon) \geq (\alpha - \epsilon) Z_{MC},$$

дзе α азначаецца па формуле (5.5.22).

Доказ. Імавернасць таго, што выпадковая гіперплоскасць $H(a,0)$ падзяляе два вектары v^i і v^j прама прапарцыянальна вуглу $\theta = \arccos((v^i)^T v^j)$ паміж імі. Па сіметрыі

$$\Pr(\mathrm{sign}\,(a^T v^i) \neq \mathrm{sign}\,(a^T v^j)) = 2\Pr(a^T v^i \geq 0,\, a^T v^j < 0).$$

Перасячэнне мноства $\{a : a^T v^i \geq 0,\, a^T v^j < 0\}$ са сферай утварае сферычны вугал велічыні θ. Таму дачыненне меры гэтага вугла да меры ўсёй сферы роўна $\frac{\theta}{2\pi}$. Іншымі словамі,

$$\Pr(a^T v^i \geq 0,\, a^T v^j < 0) = \frac{\theta}{2\pi},$$

ці

$$\Pr(\mathrm{sign}\,(a^T v^i) \neq \mathrm{sign}\,(a^T v^j)) = \frac{1}{\pi}\arccos((v^i)^T v^j).$$

Цяпер па (5.5.20) і (5.5.21) атрымліваем ацэнку

$$\begin{aligned}
E(W) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} w_{ij}\Pr(\mathrm{sign}\,(a^T v^i) \neq \mathrm{sign}\,(a^T v^j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} w_{ij}\,\frac{1}{\pi}\arccos((v^i)^T v^j) \\
&\geq \alpha\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} w_{ij}\left(1-(v^i)^T v^j\right) \\
&\geq \alpha(Z_P - \epsilon) \\
&\geq \alpha(Z_{MC} - \epsilon) \geq (\alpha-\epsilon)Z_{MC}\,.
\end{aligned}$$

□

У заключэнне зазначым, што, выкарыстоўваючы стандартную *тэхніку дэрандамізацыі*, можна пабудаваць дэтэрмінаваны алгарытм, які для любога $\epsilon > 0$ за палінаміяльны па n і $\log\frac{1}{\epsilon}$ час будуе разрэз $(S,\overline{S})$, для якога справядліва ацэнка

$$w(S) \geq (\alpha-\epsilon)Z_{MC}\,.$$

Але апісанне тэхнікі дэрандамізацыі выходзіць за рамкі дадзенай кнігі[3].

5.6 Практыкаванні

1. Няхай $A \in M_{m,n}(\mathbf{Z})$ і $\operatorname{rank} A = n$. Дакажыце, што для любога $b \in \mathbf{Z}^m$ ўсе вяршыні паліэдра $P_{\leq}(A,b)$ цэлалікавыя тады і толькі тады, калі ўсе міноры матрыцы парадку n роўны $0, \pm 1$.

[3] Чытач, зацікаўлены гэтай тэмай, можа звярнуцца да наступнай публікацыі: M.X.Goemans, D.P.Williamson. .878-Approximation algorithms for MAX CUT and MAX 2SAT. in: Proc 26th ACM Symposium on the Theory of Computing, 1994, pp. 422-431.

2. Вырашыце наступныя задачы цэлалікавым алгарытмам Гомары.

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & \to & \max \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & & \le & 10\,, \\
x_1 & + & 4x_2 & + & & \le & 11\,, \\
3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \le & 13\,, \\
\multicolumn{7}{c}{0 \le x_1 \le 4\,,} \\
\multicolumn{7}{c}{0 \le x_2 \le 3\,,} \\
\multicolumn{7}{c}{0 \le x_3 \le 5\,.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
10x_1 & + & 14x_2 & + & 21x_3 & \to & \min \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & \ge & 14\,, \\
8x_1 & + & 11x_2 & + & 9x_3 & \ge & 12\,, \\
9x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & \ge & 10\,, \\
\multicolumn{7}{c}{0 \le x_1 \le 2\,,} \\
\multicolumn{7}{c}{0 \le x_2 \le 2\,,} \\
\multicolumn{7}{c}{0 \le x_3 \le 3\,.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcl}
3x_1 & - & x_2 & \to & \max \\
3x_1 & - & 2x_2 & \le & 3\,, \\
-5x_1 & - & 4x_2 & \le & -10\,, \\
2x_1 & + & x_2 & \le & 5\,, \\
\multicolumn{5}{c}{0 \le x_1 \le 2\,,} \\
\multicolumn{5}{c}{0 \le x_2 \le 3\,.}
\end{array}
$$

3. *Шматмернай задачай аб ранцы* называецца задача ЦЛП, у якой усе параметры неадмоўныя цэлыя лікі. Разгледзім задачу аб ранцы ў *стандартнай* форме

$$
\max\{c^T x :\ Ax = b,\ x \in \mathbf{Z}_+^n\}\,, \tag{5.6.23}
$$

дзе $A \in M_{m,n}(\mathbf{Z}_+)$, $c \in \mathbf{Z}_+^n$, $b \in \mathbf{Z}_+^m$.

a) Для $0 \le y \le b$ увядзем абазначэнне

$$
f(y) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x :\ Ax = y,\ x \in \mathbf{Z}_+^n\}\,.
$$

Абгрунтуйце справядлівасць наступнай рэкурэнтнай формулы:

$$
\begin{array}{rcl}
f(0) & = & 0, \\
f(y) & = & \max\limits_{1 \le j \le n} \{c_j + f(y - A^j)\ :\ y - A^j \ge 0\}.
\end{array} \tag{5.6.24}
$$

b) Пакажыце, як, ведаючы значэнні $f(y)$ для ўсіх $0 \le y \le b$, можна знайсці рашэнне задачы (5.6.23).

c) Выкарыстоўваючы рэкурэнтную формулу (5.6.24), вырашыце наступную аднамерную задачу аб ранцы:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & \to & \max \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 7, \\ & & & & \multicolumn{5}{c}{x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4\,,\ x_5\ \in \mathbf{Z}_+} \end{array}$$

d) Выведзіце рэкурэнтную формулу для *булевай задачы аб ранцы*

$$\max\{c^T x :\ Ax = b,\ x \in \{0,1\}^n\}\,.$$

4. Разгледзім задачу ЦЛП

$$\begin{array}{l} c^T x \to \max \\ Ax \le b\,, \\ Dx \le h\,, \\ x \in \mathbf{Z}^n, \end{array} \tag{5.6.25}$$

дзе $A \in M_{m,n}(\mathbf{Z})$, $D \in M_{q,n}(\mathbf{Z})$, $c \in \mathbf{Z}^n$, $b \in \mathbf{Z}^m$, $h \in \mathbf{Z}^q$.

a) Дакажыце наступную няроўнасць

$$\max\{c^T x \ :\ Ax \le b\,,\ Dx \le h\,,\ x \in \mathbf{Z}^n\} \ \le \\ \min_{y \in \mathbf{R}^m_+} b^T y + \max\{(c - A^T y)^T x \ :\ Dx \le h\,,\ x \in \mathbf{Z}^n\}\,.$$

b) Пакажыце, што функцыя

$$L(y) \stackrel{\text{def}}{=} b^T y + \max\{(c - A^T y)^T x \ :\ Dx \le h\,,\ x \in \mathbf{Z}^n\}$$

выпуклая.

c) Выкарыстоўваючы рэзультаты пунктаў a) і b), прапануйце спосаб для вылічэння ніжняй мяжы для задачы каміваяжора (5.2.5).

5. Дэталізуйце мадыфікаваны алгарытм Кармаркара, прадстаўлены на мал. 4.4, ў прымяненні да задачы (5.5.16).

6. Вырашыце задачу (5.5.16), калі $n = 5$, $c = (1,1,1,1,1)$, а граф $G = (V, E)$ з'яўляецца цыклам, г. зн. $E = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\}$.

Приложение A

Сіметрычныя лінейныя формы

У гэтым дадатку мы дакажам, што ўмова (B3) з азначэння строга самаўзгодненай функцыі эквівалентна ўмове (B3').

Лема A.1 *Няхай* $Q \in SM^n$ *і*

$$\left|u^T Q v\right| = \max_{\|x\|=1,\ \|y\|=1} \left|x^T Q y\right| = \lambda\,.$$

Калі $u \neq \pm v$, *то*

$$\frac{|(u \pm v)^T Q (u \pm v)|}{\|u \pm v\|} = \lambda. \tag{A.1}$$

Доказ. Няхай

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^+ &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{R}^n : \, Qx = \lambda x\},\\
\mathcal{L}^- &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{R}^n : \, Qx = -\lambda x\},\\
\overline{\mathcal{L}} &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}^+ + \mathcal{L}^-)^{\perp};
\end{aligned}$$

тады хаця б адна з падпрастор $\mathcal{L}^+, \mathcal{L}^-$ ненулявая і для ўсіх $x \in \overline{\mathcal{L}}$, $\|Qx\| \leq \overline{\lambda}\|x\|$, дзе $\overline{\lambda} < \lambda$. Няхай $x = x^+ + x^- + \overline{x}$ ёсць расклад вектара $x \in \mathbf{R}^n$, які адпавядае дэкампазіцыі $\mathbf{R}^n = \mathcal{L}^+ + \mathcal{L}^- + \overline{\mathcal{L}}$. Тады, так як

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 + \|\overline{u}\|^2 = 1\,,\\
\|v\|^2 &= \|v^+\|^2 + \|v^-\|^2 + \|\overline{v}\|^2 = 1\,,
\end{aligned}$$

мы маем

$$\begin{aligned}
\lambda &= \left|(u^+ + u^- + \overline{u})^T Q (v^+ + v^- + \overline{v})\right| \\
&= \left|(u^+)^T Q v^+ + (u^-)^T Q v^- + \overline{u}^T Q \overline{v}\right| \\
&\le \left|\lambda (u^+)^T v^+ - \lambda (u^-)^T v^-\right| + \left|\overline{u}^T Q \overline{v}\right| \\
&\le \lambda \left(\|u^+\| \|v^+\| + \|u^-\| \|v^-\|\right) + \overline{\lambda} \|\overline{u}\| \|\overline{v}\| \\
&\le \lambda \left(\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\|v^+\|^2 + \|v^-\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \overline{\lambda} \|\overline{u}\| \|\overline{v}\| \\
&\le \lambda \, .
\end{aligned}$$

Значыць, усе няроўнасці ў вышэй прыведзеным ланцугу з'яўляюцца роўнасцямі. Таму мы заключаем

$$\overline{u} = \overline{v} = 0, \quad \|u^+\| = \|v^+\|, \quad \|u^-\| = \|v^-\|;$$

больш таго,

$$\left|(u^+)^T v^+\right| = \|u^+\| \|v^+\| \quad \text{i} \quad \left|(u^-)^T v^-\right| = \|u^-\| \|v^-\| \, ,$$

што можа быць толькі тады, калі $u^+ = \pm v^+$ і $u^- = \pm v^-$. Паколькі u і v лінейна незалежны, магчымы толькі два выпадкі:

1) $u^+ = v^+ \neq 0$, $u^- = -v^- \neq 0$ і таму $u + v = 2u^+$, $u - v = 2u^-$;

2) $u^+ = -v^+ \neq 0$, $u^- = v^- \neq 0$ і таму $u + v = 2u^-$, $u - v = 2u^+$.

Цяпер непасрэднай праверкай няцяжка пераканацца, што ў абодвух выпадках роўнасць (A.1) выконваецца. □

Тэарэма A.1 *Няхай $H(x, y, z)$ ёсць сіметрычная 3-х лінейная форма на $\mathbf{R}^n$, а $A \in SM^n_+$. Калі*

$$|H(x, x, x)| \le \|x\|^3_A \quad \text{для ўсіх } x \in \mathbf{R}^n, \tag{A.2}$$

то

$$|H(x, y, z)| \le \|x\|_A \cdot \|y\|_A \cdot \|z\|_A \quad \text{для ўсіх } x, y, z \in \mathbf{R}^n. \tag{A.3}$$

Доказ. Нам дастаткова даказаць тэарэму для выпадку дадатна азначанай матрыцы A; інакш, мы можам замяніць A матрыцай $A + \epsilon I$, а потым перайсці да прэдзелу пры $\epsilon \to +0$. Таму ў далейшым лічым, што A дадатна азначана. Далей, мы можам лічыць, што $A = I$; інакш, мы зробім замену $\overline{x} = A^{\frac{1}{2}} x$.

Так як абодва бакі ў (A.3) аднародны па x, y, z, то дастаткова паказаць, што

$$\begin{aligned}
\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} |H(u, w, v)| \\
&= \max\{|H(x, y, z)| \,:\, \|x\| \le 1, \ \|y\| \le 1, \ \|z\| \le 1\} \\
&\le 1.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Няхай $x^T D y \stackrel{\text{def}}{=} H(x, y, v)$ (v — фіксаваны); тады D ёсць сіметрычная матрыца. З лінейнай алгебры вядома, што

$$\max_{\|x\|\leq 1,\ \|y\|\leq 1} |x^T D y| = \max_{\|x\|=1} |x^T D x|\,.$$

Таму мы можам лічыць, што $u = w$ і $\|u\| = 1$. Няцяжка таксама пераканацца, што $\|v\| = 1$. Калі $v = \pm u$, то па (A.2) маем $\lambda = |H(u, u, u)| \leq 1$, і ў гэтым выпадку (A.4) выконваецца. Таму ў далейшым лічым, што $v \neq \pm u$.

Няхай $y^T Q z \stackrel{\text{def}}{=} H(u, y, z)$; тады Q — сіметрычная матрыца. Па (A.4) маем

$$\lambda = |u^T Q v| = \max_{\|y\|\leq 1,\ \|z\|\leq 1} |y^T Q z|.$$

Згодна леме A.1, для $\overline{u} = (u + v)/\|u + v\|$ і $\overline{v} = u$ заключаем, што

$$\lambda = |H(u, u + v, u + v)| = |H(\overline{v}, \overline{u}, \overline{u})| = |H(\overline{u}, \overline{u}, \overline{v})|$$

і $\|\overline{u}\| = 1$, $\|\overline{v}\| = 1$, $\alpha(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{1}{2}\alpha(u, v)$. Тут $\alpha(u, v)$ ёсць вугал паміж вектарамі u і v. Такім чынам, мы можам знайсці паслядоўнасць (u^i, u^i, v^i), такую, што $\lambda = |H(u^i, u^i, v^i)|$, $\|u^i\| = \|v^i\| = 1$ і $\alpha(u^i, v^i) \to 0$. Гэта паслядоўнасць утрымлівае падпаслядоўнасць, якая збягаецца да нейкай тройкі (u^*, u^*, u^*), такой, што $\|u^*\| = 1$ і $\lambda = |H(u^*, u^*, u^*)|$. $\square$

Приложение B

Матрычныя расклады

На кожнай ітэрацыі сімплекс-метада і яго варыянтаў трэба вырашаць дзве СЛУ

$$Bx = b_I \quad \text{i} \quad B^T\pi = c, \tag{B.1}$$

дзе $B = A_I \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ нявыраджаная матрыца. Пры рашэнні сістэм (B.1) трэба ўлічваць, што іх матрыцы абмежаванняў транспанаваныя адна да адной. У дадатак, на наступнай ітэрацыі трэба будзе вырашаць СЛУ, якія адрозніваюцца ад (B.1) толькі адным радком.

Ва ўсіх метадах унутранай кропкі трэба вырашаць СЛУ

$$Cx = u, \tag{B.2}$$

дзе $C = A^T DA$, $A \in M_{n,m}(\mathbf{R})$ — матрыца поўнага слупковага рангу, $D \in SM^m_{++}$. Для паліэдральнай задачы ЛП матрыца D дыяганальная і толькі яна мяняецца ад ітэрацыі да ітэрацыі.

У гэтым дадатку мы абмяркуем некалькі метадаў для рашэння СЛУ (B.1) і (B.2) з улікам вышэй азначаных асаблівасцей. Трэба аднак заўважыць, што мы зусім не будзем разглядаць варыянты гэтых метадаў для *разрэджаных* (з вялікай доляй нулявых элементаў) матрыц, паколькі для барацьбы з *запаўненнямі* (з'яўленнем номых ненулявых элементаў) яны выкарыстоўваюць алгарытмы тэорыі графаў, разгляд якіх выходзіць за рамкі дадзенай кнігі. Чытачам, зацікаўленым у практычнай рэалізацыі метадаў лінейнага праграмавання, мы рэкамендуем наступныя выданні [4], [4], [9].

B.1 Метад Гаўса і LU-фактарызацыя

Разгледзім сістэму лінейных ураўненняў

$$Ax = b. \tag{B.3}$$

Часцей за усё сістэму (B.3) рашаюць метадам Гаўса. Ён улучае два этапы: прамы ход і адваротную падстаноўку.

Першы крок прамога ходу пачынаецца з перастаноўкі 1-га і π_1-га ўраўненняў ($a_{\pi_1 1} \neq 0$). Няцяжка праверыць, што гэтая перастаноўка адпавядае пераходу да сістэмы
$$P^{(1)}Ax = P^{(1)}b, \tag{B.4}$$
дзе $P^{(1)} = P_{1,\pi_1}$, а матрыца
$$P_{1,\pi_1} = \begin{bmatrix} 0\,0 \cdots 1\,0 \cdots 0 \\ 0\,1 \cdots 0\,0 \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1\,0 \cdots 0\,0 \cdots 0 \\ 0\,0 \cdots 0\,1 \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\,0 \cdots 0\,0 \cdots 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \pi_1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$
атрымліваецца з адзінкавай перастаноўкай 1-га і π_1-га слупкоў. Яна называецца *матрыцай перастановак*. Калі памножым матрыцу A справа на $P^{(1)}$, то пераставім радкі 1 і π_1 матрыцы A. Калі $\pi_1 = 1$, то нічога перастаўляць не трэба. У гэтым выпадку $P^{(1)}$ ёсць адзінкавая матрыца.

Пасля гэтага выключаем невядомую x_1 з радкоў $2, \ldots, n$ сістэмы (B.4). У рэзультаце атрымаем сістэму
$$(L^{(1)}P^{(1)}A)x = L^{(1)}P^{(1)}b, \tag{B.5}$$
дзе
$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1\;0\;0 \cdots 0 \\ -l_{2,1}\;1\;0 \cdots 0 \\ -l_{3,1}\;0\;1 \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -l_{n,1}\;0\;0 \cdots 1 \end{bmatrix},$$
а $l_{i1} = a_{i1}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$, $i = 2, \ldots, n$ ($a_{ij}^{(0)}$ — элементы матрыцы $P^{(1)}A$). Матрыцы такога выгляду як $L^{(1)}$ называюцца *элементарнымі матрыцамі*: кожная з іх адрозніваецца ад адзінкавай ненулявымі элементамі, якія належаць аднаму слупку і ляжаць ніжэй галоўнай дыяганалі.

Другі крок прамога ходу метада Гаўса заключаецца ў пераходзе ад сістэмы (B.5) да сістэмы
$$L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}P^{(1)}x = L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}P^{(1)}b. \tag{B.6}$$
Калі на другім кроку перастаўляюцца радкі 2 і l_2 , то $P^{(2)} = P_{2,\pi_2}$. Элементарная матрыца $L^{(2)}$ мае выгляд
$$L^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0\;0 \cdots 0 \\ 0 & 1\;0 \cdots 0 \\ 0 & -l_{3,2}\;1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & -l_{n,2}\;0 \cdots 1 \end{bmatrix},$$

дзе $l_{i2} = a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, $i = 3, \dots, n$ ($a_{ij}^{(1)}$ — элементы матрыцы $P^{(2)}L^{(1)}P^{(1)}A$).

Наогул, пасля k-га кроку прамога ходу метада Гаўса атрымліваем сістэму

$$L^{(k)}P^{(k)}\dots L^{(1)}P^{(1)}Ax = L^{(k)}P^{(k)}\dots L^{(1)}P^{(1)}b\,, \tag{B.7}$$

дзе $P^{(k)}$ - матрыца перастановак P_{k,π_k},

$$L^{(k)} = \begin{bmatrix} 1\,0\cdots & & 0\,0\cdots\,0 \\ 0\,1\cdots & & 0\,0\cdots\,0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0\,0\cdots & & 1\,0\cdots\,0 \\ 0\,0\cdots & -l_{k+1,k} & 1\cdots\,0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0\,0\cdots & -l_{n,k} & 0\cdots\,1 \end{bmatrix},$$

$l_{ik} = a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}$, $i = k+1, \dots, n$ ($a_{ij}^{(k-1)}$ — элементы матрыцы $A^{(k-1)} = P^{(k)}L^{(k-1)}\dots L^{(1)}P^{(1)}A$).

Пасля $n-1$ кроку атрымаем верхнюю трохвугольную сістэму

$$L^{(n-1)}P^{(n-1)}\dots L^{(1)}P^{(1)}Ax = L^{(n-1)}P^{(n-1)}\dots L^{(1)}P^{(1)}b, \tag{B.8}$$

Такім чынам, мы бачым, што прамы ход метада Гаўса эквівалентны дамнажэнню матрыцы сістэмы A і правай часткі b на паслядоўнасць элементарных матрыц і матрыц перастановак. У лінейнай алгебры трохвугольную матрыцу наступанага выгляду

$$L = \begin{bmatrix} \times\ 0\ \ 0\dots 0 \\ \times\times\ 0\dots 0 \\ \times\times\times\dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ \times\times\times\dots\times \end{bmatrix},$$

называюць *ніжняй (lower) трохвугольнай*, і абазначаюць буквай L. Матрыцу, якая мае выгляд

$$U = \begin{bmatrix} \times\times\times\dots\times \\ 0\ \times\times\dots\times \\ 0\ \ 0\ \times\dots\times \\ \dots\dots\dots \\ 0\ \ 0\ \ 0\dots\times \end{bmatrix},$$

называюць *верхняй (upper) трохвугольнай*, і абазначаюць буквай U. У сувязі з гэтым, увядзем абазначэнне

$$U = L^{(n-1)}P^{(n-1)}\dots L^{(1)}P^{(1)}A. \tag{B.9}$$

З (B.9) маем

$$A = (P^{(1)})^{-1}(L^{(1)})^{-1}(P^{(2)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}\dots(P^{(n-1)})^{-1}(L^{(n-1)})^{-1}U. \tag{B.10}$$

Відавочна, што $(P^{(k)})^{-1} = P^{(k)}$. Асабліва цікавы выгляд роўнасць (B.10) прымае, калі ўсе матрыцы перастановак адзінкавыя, г. зн. што метад Гаўса выконваўся без перастановак радкоў. Тады

$$A = (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}\dots(L^{(n-1)})^{-1}U. \tag{B.11}$$

Няцяжка таксама ўпэўніцца, што матрыца

$$L = (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}\dots(L^{(n-1)})^{-1}$$

мае выгляд

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0\cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ l_{2,1} & 1\cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{k,1} & l_{k,2}\cdots & 1 & 0\cdots 0 \\ l_{k+1,1} & l_{k+1,2}\cdots & l_{k+1,k} & 1\cdots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n,1} & l_{n,2}\cdots & l_{n,k} & l_{n,k+1}\cdots 1 \end{bmatrix}, \tag{B.12}$$

г. зн. азначэнне L па матрыцы $(L^{(k)})^{-1}$ не патрабуе дадатковых вылічэнняў. Такім чынам, роўнасць (B.11) мае выгляд

$$A = LU. \tag{B.13}$$

Роўнасць (B.13) называецца *LU-раскладам* матрыцы A. Фактычна прамы ход метада Гаўса без перастановак можна разглядаць як працэс вылічэння LU-раскладу матрыцы A. У агульным выпадку, калі перастаноўкі выконваюцца, прамы ход па ранейшаму раўназначны LU-раскладу, але не самой матрыцы A, а матрыцы, якая атрымліваецца з A перастаноўкай радкоў: трэба пераставіць радкі 1 і π_1, затым 2 і π_2 і г. д. Вылічваючы LU-расклад, адначасова можна азначыць і парадак перастаноўкі радкоў $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{n-1})$.

Адваротны ход метада Гаўса заключаецца ў рашэнні сістэмы $Ux = y$, дзе $y = L^{(n-1)}P^{(n-1)}\dots L^{(1)}P^{(1)}b$. Аднак у сучасных праграмах метад Гаўса дзеліцца на этапы не ў адпаведнасці з традыцыйнай схемай: прамы ход і адваротная падстаноўка. Падзел праводзіцца ў межах самога прамога ходу: вылічэнне LU-раскладу матрыцы A і асабіста рашэнне сістэмы ўраўненняў. Калі LU-расклад матрыцы A выкананы, то для рашэння сістэмы (B.3) трэба:

1. Вылічыць вектар y. Спачатку перастаўляем кампаненты 1 і π_1 вектара b, потым 2 і π_2 , 3 і π_3 і г. д. $n-2$ і $n-1$. Атрыманы вектар абазначым праз $b(\pi)$. Рашыць трохвугольную сістэму $Ly = b(\pi)$. Відавочна гэта патрабуе $O(n^2)$ арыфметычных аперацый.

2. Рашыць трохвугольную сістэту $Ux = y$. Гэта зноў патрабуе $O(n^2)$ арыфметычных аперацый.

З выкладзенага вышэй вынікае, што пры вядомым LU-раскладзе матрыцы A, сістэму (B.3) можна рашыць за квадратычны час. Таму LU-расклад аказваецца вельмі карысным, калі трэба рашаць некалькі сістэм ураўненняў з адной і той жа матрыцай і рознымі правымі часткамі.

Маючы LU-расклад матрыцы A за квадратычны час можна рашыць сістэму ўраўненняў з транспанаванай матрыцай

$$A^T x = c. \tag{B.14}$$

Запішам (B.14) у выглядзе

$$U^T L^T x(\pi) = c. \tag{B.15}$$

Для рашэння сістэмы (B.15) трэба

1. Рашыць трохвугольную сістэму $U^T y = c$.

2. Рашыць трохвугольную сістэму $L^T x = y$. Пераставіць кампаненты $n-1$ і π_{n-1} вектара x, затым $n-2$ і π_{n-2}, і г. д., 1 і π_1.

B.1.1 Складанасць метада Гаўса

Лема B.1 *Няхай* $A \in M_{n\times n}(Q)$. *Тады* $\operatorname{size}(\det A) = 2 \operatorname{size} A$.

Доказ. Няхай $a_{ij} = p_{ij}/q_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, p_{ij} і q_{ij} — узаемна простыя цэлыя лікі, прычым $q_{ij} \geq 1$. Няхай таксама $\det A = p/q$, дзе p і q — узаемна простыя цэлыя і $q \geq 1$. Відавочна, што

$$q \leq \prod_{i,j=1}^{n} q_{ij} < 2^{\sigma-1}, \tag{B.16}$$

дзе $\sigma = \operatorname{size} A$. Непасрэдна з азначэння дэтэрміната вынікае, што

$$\left|\frac{p}{q}\right| = |\det A| < \prod_{i,j=1}^{n} (|p_{ij}| + 1)\,. \tag{B.17}$$

З (B.16) і (B.17) маем, што

$$|p| = |\det A| q \leq \prod_{i,j=1}^{n} (|p_{ij}| + 1) q_{ij} < 2^{\sigma-1}.$$

Цяпер атрымліваем

$$\begin{aligned} \operatorname{size}(\det A) &= 1 + \lceil \log(|p| + 1) \rceil + \lceil \log(|q| + 1) \rceil \\ &< 2\sigma = 2 \operatorname{size} A\,. \end{aligned}$$

□

Тэарэма B.1 *Для рацыянальных матрыцы* $A \in M_{n,n}(\mathbf{Q})$ *і вектара* $b \in \mathbf{Q}^n$ *метад выключэнняў Гаўса з'яўляецца палінаміяльным.*

Доказ. Без страты агульнасці можна лічыць, што метад працаваў без перастановак радкоў. Акрамя таго, няцяжка падлічыць, што метад выконвае $O(n^3)$ арыфметычных аперацыі. Таму для таго, каб даказаць паліноміяльнасць метада, засталося паказаць, што памеры лікаў, якія ўзнікаюць у працэсе вылічэнняў, абмежаваны паліномам ад size A. Па індукцыі можна праверыць, што

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{\det\left((A^{(k)})_{\{1,\ldots,k,k+j\}}^{\{1,\ldots,k,k+i\}}\right)}{\det\left((A^{(k)})_{\{1,\ldots,k\}}^{\{1,\ldots,k\}}\right)}\,. \tag{B.18}$$

Так як

$$A^{(k)} = L^{(k)} \cdot \ldots \cdot L^{(1)} A\,,$$

то міноры матрыц $A^{(k)}$ і A аднолькавыя. Таму

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{\det\left(A_{\{1,\ldots,k,k+j\}}^{\{1,\ldots,k,k+i\}}\right)}{\det\left(A_{\{1,\ldots,k\}}^{\{1,\ldots,k\}}\right)}\,. \tag{B.19}$$

Адкуль па леме B.1 памер $a_{ij}^{(k)}$ не пераўзыходзіць $4\,\mathrm{size}\,A$. Акрамя таго, так як $l_{ik} = l_{ik}^{(k)} = a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}$, то памеры элементаў матрыцы L не пераўзыходзяць 8 size A. □

B.2 QR-фактарызацыя

У гэтым параграфе мы разгледзім спосаб прывядзення матрыцы да трохвугольнага выгляду з дапамогай пераўтварэнняў Хаўсхолдэра. Нагадаем, што пераўтварэнне Хаўсхолдэра, задаваемае матрыцай

$$H = I - \frac{1}{\beta} uu^T\,,$$

дзе $u \in \mathbf{R}^n$, $\beta = \frac{1}{2}\|u\|^2$, пераводзіць вектар $a \in \mathbf{R}^n$ у вектар

$$Ha = a - u\left(\frac{u^T a}{\beta}\right) = b\,.$$

Заўважым, што так як пераўтварэнне Ha проста адымае ад вектара a вектар u з нейкім сумножнікам, то яно не змяняе тыя кампаненты вектара a, якім адпавядаюць нулявыя значэнні вектара u. Больш таго, пераўтварэнне Хаўсхолдэра зусім не зменіць вектар a, калі $u^T a = 0$.

Паколькі пераўтварэннем Хаўсхолдэра можна выканаць любы паварот, прычым вектары, артаганальныя да u, пры гэтым застаюцца нязменнымі, з дапамогай n такіх пераўтварэнняў любую $m \times n$ матрыцу A ранга n можна зрабіць верхняй трохвугольнай. Чарговае, i-е пераўтварэнне $H^{(i)}$ падбіраецца так, каб абнуліць у i-м слупку элементы з $i+1$-га па m-ы, захаваўшы першыя $i-1$ слупкоў некранутымі.

Больш дакладна, пераўтварэнне $H^{(1)}$ павінна перавесці слупок A^1 у вектар паралельны адзінкаваму. Паколькі норма пры гэтым застанецца нязменнай, то A^1 пяройдзе ў вектар

$$(r_{11}, 0, \ldots, 0)^T ,$$

дзе $|r_{11}| = \|A^1\|$. Адпаведна ў якасці u для $H^{(1)}$ можна ўзяць

$$(a_{11} - r_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})^T .$$

Каб пазбегнуць памылак кампенсацыі пры падліку першай кампаненты гэтага вектара, знак r_{11} бяруць адваротным знаку a_{11}.

Цяпер пераўтварэнне $H^{(2)}$ павінна перавесці другі слупок $A^{(2)}$ матрыцы $A^{(1)} = H^{(1)}A$ у вектар $(a_{12}^{(1)}, r_{22}, 0, \ldots, 0)$, дзе $r_{22} = \sqrt{\sum_{i=2}^{m} a_{i2}^{(1)}}$. У якасці u для $H^{(2)}$ бярэм вектар $(a_{12}^{(1)}, a_{22}^{(1)} - r_{22}, a_{32}^{(1)}, \ldots, a_{m2}^{(1)})^T$.

Пасля n пераўтварэнняў Хаўсхолдэра атрымаем

$$H^{(n)} \ldots H^{(2)} H^{(1)} A = QA = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} , \tag{B.20}$$

дзе R ёсць нявыраджаная верхняя трохвугольная $n \times n$-матрыца, а $Q \in M_{m,m}(\mathbf{R})$ — артанармальная матрыца, роўная здабытку $H^{(n)}, \ldots, H^{(1)}$. Прадстаўленне (B.20) называюць *QR-раскладам* матрыцы A.

Зазначым, што дапушчэнне аб поўным слупковым ранзе матрыцы A з'яўляецца істотным пры вывадзе (B.20), паколькі яно гарантуе, што пераўтвараемая частка чарговага слупка будзе ненулявой і, значыць, азначэнне ўсіх пераўтварэнняў $H^{(i)}$ будзе карэктным. Калі ж $\operatorname{rank}(A) = r < n$, то трэба пераставіць слупкі так, каб першыя r сталі лінейна незалежнымі (патрэбная перастаноўка слупкоў знаходзіцца ў працэсе QR-раскладу). Тады рэзультатам r пераўтварэнняў Хаўсхолдэра над першымі r слупкамі будзе прадстаўленне наступнага выгляду

$$QAP = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix},$$

дзе P — перастановачная, а $T \in M_{r \times n}(\mathbf{R})$ — верхняя трапецыявідная матрыца. Пасля гэтага дадатковымі r пераўтварэннямі Хаўсхолдэра над радкамі можна абнуліць апошнія $n - r$ слупкоў, захаваўшы трохвугольную структуру (але не самі элементы) левай верхняй часткі матрыцы. Канчаткова атрымаем

$$QA\overline{H}^{(n-r)} \cdot \ldots \cdot \overline{H}^{(1)} = QAV = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{B.21}$$

дзе $R \in M_{r \times r}(\mathbf{R})$ — гэта нявыраджаная верхняя трохвугольная матрыца, а $V \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ — артаганальная матрыца. Гэтае прадстаўленне называюць *поўным артаганальным раскладам* матрыцы A.

Каб атрымаць разлажэнне (B.21), калі $m \geq n \geq r$, патрэбна выканаць прыблізна $mn^2 + \frac{1}{3}n^3 + (n-r)r^2$ арыфметычных аперацыі.

Часцей за ўсё артаганальныя расклады выкарыстоўваюцца пры рашэнні *лінейнай задачы аб найменшых квадратах*:

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\| . \tag{B.22}$$

Паколькі артаганальнае пераўтварэнне захоўвае яўклідаву даўжыню вектара, то

$$\|Ax - b\| = \|Q(Ax - b)\| = \left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} x - Qb \right\| . \tag{B.23}$$

Адсюль маем, што норма ў правай частцы (B.23) мінімальна, калі першыя n кампанент вектароў Rx і Qb супадаюць. Значыць у якасці рашэння задачы (B.22) можна ўзяць любое рашэнне сістэмы лінейных ураўненняў $Rx = \bar{b}$, дзе $\bar{b}$ ёсць вектар утвораны з першых n кампанент вектара Qb.

Аналагічны расклад будуецца для матрыцы $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ поўнага радковага рангу m, калі для $b \in \mathbf{R}^m$ трэба знайсці рашэнне сістэмы лінейных ураўненняў $Ax = b$, якое мае мінімальную норму. Больш дакладна, трэба рашыць наступную задачу

$$\min\{\|x\| \,:\, x \in \mathbf{R}^n,\, Ax = b\} , \tag{B.24}$$

Толькі разлажэнне цяпер зручней будаваць у выглядзе

$$AQ = [L\, 0], \tag{B.25}$$

дзе $L \in M_{m,m}(\mathbf{R})$ — ніжняя трохвугольная, а $Q \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ - артаганальная матрыца. Расклад (B.25) вядомы пад назвай *LQ-расклад.*

B.2.1 Базіс афіннай падпрасторы

Як правіла, на практыцы афінныя абмежаванні задаюцца СЛУ $Ax = b$, дзе $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}$. Многія ж аптымізацыйныя алгарытмы патрабуюць, каб афінная падпрастора рашэнняў СЛУ $Ax = b$ была прадстаўлена ў выглядзе $\mathcal{R}(\mathcal{Z}) + \S'$, дзе $Z \in M_{n,r}(\mathbf{R})$ — яе базісная матрыца, $r = \operatorname{rank} \mathcal{N}(\mathcal{A})$, а x^0 любое рашэнне СЛУ $Ax = b$.

Без страты агульнасці будзем лічыць, што $\operatorname{rank} A = m$. Тады $r = n - m$. Знойдзем LQ-расклад матрыцы A:

$$AQ = [L, 0],$$

дзе $Q \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ — артаганальная матрыца, $L \in M_{m,m}(\mathbf{R})$ — нявыраджаная ніжняя трохвугольная матрыца. Прадставім матрыцу Q у выглядзе

$$Q = [Y, Z],$$

дзе матрыца $Y \in M_{n,m}(\mathbf{R})$ складзена з першых m слупкоў матрыцы Q, а матрыца $Z \in M_{n,n-m}(\mathbf{R})$ — з апошніх $n - m$ слупкоў. Пакажам, што

$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(\mathcal{Z})$, адкуль і будзе вынікаць, што Z ёсць базісная матрыца афіннай падпрасторы $\mathcal{N}(\mathcal{A}) + \S'$ рашэнняў СЛУ $Ax = b$. Няхай $x = Zu$, $u \in \mathbf{R}^{n-m}$. Тады

$$Ax = AQQ^T Zu = [L, 0] \begin{bmatrix} Y^T \\ Z^T \end{bmatrix} Zu = LY^T Zu = 0.$$

Заўважым, што апошняя роўнасць вынікае з артаганальнасці матрыцы Q ($Q^T Q = I$). Мы даказалі, што $\mathcal{R}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{A})$. А так як $n - m = \operatorname{rank} \mathcal{R}(\mathcal{Z}) = \operatorname{rank} \mathcal{N}(\mathcal{A})$, то мы павінны заключыць, што $\mathcal{R}(\mathcal{Z}) = \mathcal{N}(\mathcal{A})$.

B.2.2 Пераразлік QR-раскладу

Трэба атрымаць QR-расклад матрыца $\overline{A} = A + uv^T$, дзе $u, v \in \mathbf{R}^n$, а $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ — матрыца поўнага слупковага рангу, для якой QR-расклад $A = QR$ вядомы.

Ідэя алгарытма нескладаная. Для $w = Q^T u$ запішам

$$\overline{A} = QR + uv^T = Q(R + wv^T),$$

а затым атрымаем QR-расклад

$$R + wv^T = \tilde{Q}\tilde{R}. \tag{B.26}$$

Тады $\overline{A} = \overline{QR}$, дзе $\overline{Q} = Q\tilde{Q}$, $\overline{R} = \tilde{R}$.

Расклад (B.26) атрымліваюць з дапамогай *плоскіх кручэнняў*, якія выкарыстоўваюцца для абнулення якой-небудзь адной кампаненты вектара. Плоскі паварот задаецца матрыцай Якобі $J(i, j, \alpha, \beta) \in M_{n,n}(\mathbf{R})$, якая адрозніваецца ад адзінкавай толькі элементамі (i, i), (i, j), (j, i) і (j, i). Падматрыца $J(i, j, \alpha, \beta)^{\{i,j\}}_{\{i,j\}}$ мае выгляд:

$$J(i, j, \alpha, \beta)^{\{i,j\}}_{\{i,j\}} = \begin{bmatrix} \alpha\, \beta \\ -\beta\, \alpha \end{bmatrix},$$

дзе $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (ці $\alpha = \cos(\theta)$ і $\beta = \sin(\theta)$ для нейкага θ). Зазначым, што ў вектараў $a \in \mathbf{R}^n$ і $J(i, j, \alpha, \beta)a$ адрозніваюцца толькі i-я і j-я кампаненты. Звычайна параметры α і β падбіраюць так, каб у j-й пазіцыі атрымаць нуль:

$$\alpha = \pm\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \ \beta = \pm\frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}.$$

З двух магчымых знакаў звычайна бяруць першы. Кампактнае апісанне матрыцы Якобі задаецца чацвёркай лікаў: (i, j, α, β).

Пакажам цяпер як пабудаваць QR-расклад (B.26). Спачатку зазначым, што ўсе слупкі матрыцы wv^T аднолькавыя і роўны вектару $z = (v_1 w_1, \ldots, v_n w_n)^T$. Таму дастаткова выканаць $n - 1$ плоскае кручэнне

$$J(n-1, n, \alpha_n, \beta_n), \ldots, J(1, 2, \alpha_2, \beta_2)$$

каб зануліць радкі матрыцы wv^T з нумарамі $n, n-1, \dots, 2$. Кожнае такое кручэнне мяняе таксама і радкі матрыцы R. Акрамя таго, кручэнне $J(i-1, i, \alpha_i, \beta_i)$ уводзіць адзін ненулявы элемент пад дыяганаллю ў пазіцыі $(i, i-1)$. Такім чынам, пасля $n-1$-го кручэння атрымаем верхнюю трохвугольную матрыцу

$$J(1, 2, \alpha_2, \beta_2) \dots J(n-1, n, \alpha_n, \beta_n)(Q + wv^T)$$

з дадатковай дыяганаллю ніжэй галоўнай. Цяпер зноў выконваем $n-1$ плоскае кручэнне

$$J(1, 2, \overline{\alpha}_2, \overline{\beta}_2), \dots, J(n-1, n, \overline{\alpha}_n, \overline{\beta}_n)$$

але ўжо для таго, каб абнуліць элементы $(i, i-1)$, $i = 2, \dots, n$.

Няцяжка ўпэўніцца, што ўвесь працэс пераліку патрабуе толькі $O(n^2)$ аперацый, што на парадак меней чым гэта патрэбна для выканання QR-раскладу "з нуля".

В.3 Фактарызацыя Халескага

Любую дадатна азначаную матрыцу $A \in SM^n_{++}$ можна прадставіць здабыткам наступнага выгляду:

$$A = LL^T,$$

дзе $L \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ ёсць ніжняя трохвугольная матрыца. Гэтае прадстаўленне называецца *фактарызацыяй Халескага* матрыцы A, а матрыца L называецца *фактарам Халескага*.

Няхай $A^{(0)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} A$. Разгледзім разбіенне

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & (a^{(1)})^T \\ a^{(1)} & \left(A^{(0)}\right)_{2,\dots,n}^{2,\dots,n} \end{bmatrix},$$

дзе $a^{(1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (a_{12}^{(0)}, \dots, a_{1n}^{(0)})^T$. Зазначым, што

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}^{(0)}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}^{(0)}}} a^{(1)} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(A^{(0)}\right)_{2,\dots,n}^{2,\dots,n} - \frac{1}{a_{11}^{(0)}} a^{(1)} \left(a^{(1)}\right)^T \end{bmatrix} \times \\ & \quad \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}^{(0)}} & \frac{1}{\sqrt{a_{11}^{(0)}}} (a^{(1)})^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(L^{(1)}\right)^T A^{(1)} L^{(1)}. \end{aligned}$$

Зразумела, што матрыца $A^{(1)}$ сіметрычная. Паколькі для любога $x \in \mathbf{R}^{n-1}$,

$x \neq 0$,

$$x^T (A^{(1)})_{2,\ldots,n}^{2,\ldots,n} x = x^T \left((A^{(0)})_{2,\ldots,n}^{2,\ldots,n} - \frac{1}{a_{11}^{(0)}} a^{(1)} \left(a^{(1)} \right)^T \right) x$$

$$= \left(-\frac{x^T a^{(1)}}{a_{11}^{(0)}}, x^T \right) \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & (a^{(1)})^T \\ a^{(1)} & (A^{(0)})_{2,\ldots,n}^{2,\ldots,n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{x^T a^{(1)}}{a_{11}^{(0)}} \\ x \end{pmatrix} > 0,$$

то $A^{(1)}$ дадатна азначана.

На другім кроку, абазначаючы $a^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{23}^{(1)}, \ldots, a_{2n}^{(1)})$, маем

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (A^{(1)})_{2,\ldots,n}^{2,\ldots,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \left(a^{(2)}\right)^T \\ 0 & a^{(2)} & (A^{(1)})_{3,\ldots,n}^{3,\ldots,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}^{(1)}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{a_{22}^{(1)}}} a^{(2)} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (A^{(1)})_{3,\ldots,n}^{3,\ldots,n} - \frac{1}{a_{22}^{(1)}} a^{(2)} \left(a^{(2)}\right)^T \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}^{(1)}} & \frac{1}{\sqrt{a_{22}^{(1)}}} \left(a^{(2)}\right)^T \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \left(L^{(2)}\right)^T A^{(2)} L^{(2)}.$$

Па індукцыі

$$A^{(k-1)} = L^{(k)} A^{(k)} \left(L^{(k)}\right)^T$$

з $A^{(n)} = I$. Такім чынам, мы можам пабудаваць ніжнія трохвугольныя матрыцы $L^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$, такія, што

$$A = L^{(1)} L^{(2)} \ldots L^{(n)} \left(L^{(n)}\right)^T \left(L^{(n-1)}\right)^T \ldots \left(L^{(1)}\right)^T = LL^T,$$

дзе

$$L \stackrel{\text{def}}{=} L^{(1)} L^{(2)} \ldots L^{(n)} = L^{(1)} + L^{(2)} + \ldots + L^{(n)} - (n-1)I.$$

B.4 Практыкаванні

1. Ацаніце пагрэшнасць рашэння метадам Гаўса наступнай сістэмы лінейных ураўненняў

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & = & b_1, \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & b_2, \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & b_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & 2x_{99} & + \; x_{100} & = & b_{100}, \end{array}$$

калі вылічэнні праводзяцца з дакладнасцю 12 знакаў пасля коскі.

2. Вылічыце адваротную матрыцу і LU-расклад матрыцы
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Знайдзіце LU-расклад матрыцы
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -3 & 6 \\ -1 & -3 & 3 & -8 \end{bmatrix}.$$
Выкарыстоўваючы яго,

   a) вырашыце сістэмы $Ax = b^1$, $Ax = b^2$ і $Ax = b^3$, дзе
$$b^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

   b) вырашыце сістэмы $A^T y = c^1$, $A^T y = c^2$ і $A^T y = c^3$, дзе
$$c^1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \\ -16 \\ 33 \end{pmatrix}, \quad c^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad c^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайдзіце парабалу $y = x_0 + tx_1 + t^2 x_2$, сума адлегласцей да якой ад кропак $\{(t_i, y_i)\} = \{(-1,3), (0,2), (1,0), (2,4), (3,3)\}$ мінімальна.

5. Няхай $m \geq n > 0$, $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^m$. Дакажыце, што калі $A^T(Ax^* - b) = 0$, то $\|Ax - b\| \geq \|Ax^* - b\|$ для ўсіх $x \in \mathbf{R}^n$, прычым строгая няроўнасць мае месца, калі $\operatorname{rank}(A) = n$. Пакажыце таксама, што ў гэтым выпадку матрыца $A^T A$ нявыраджана, дадатна азначана і $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Приложение C

Бібліятэка класаў

C.1 class CSpMatr

Клас прызначаны для выканання LU і QR-фактарызацыі разрэджанай матрыцы. Клас таксама прадстаўляе шэраг функцый для рашэння СЛУ, а таксама лінейнай задачы аб найменьшых квадратах.

#**include** <math.h>
#**include** <string.h>

C.1.1 Публічныя функцыі класа

Канструктар і дэструктар

Канструктар CSpMatr
Прызначэнне: будуе CSpMatr аб'ект для падматрыцы A_I^J матрыцы $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ рознымі спосабамі.

CSpMatr::CSpMatr(**int** *m*, **int** *n*, **int** *NonZeroNum*,
double* *dpVal*, **int*** *ipRow*, **int*** *ipCol*,
part_type *PartType*,
int *SubM*, **int** *SubN*,
int* *ipIMap*, **int*** *ipJMap*,
int *PartBufSize*);

Параметры:

m колькасць радкоў матрыцы.

n колькасць слупкоў матрыцы.

$NonZeroNum$ колькасць ненулявых элементаў (ненулёў) матрыцы.

$dpVal$,$ipRow$,$ipCol$ задаюць спіс ненулёў матрыцы, г. зн. што для $0 \le i \le NonZeroNum - 1$ ў радку $ipRow[i]$ і слупку $ipCol[i]$ знаходзіцца элемент $dpVal[i]$.

PartType указвае тып раскладу матрыцы. Можа прымаць адно з двух значэнняў: QR ці LU.

SubM колькасць радкоў падматрыцы.

SubN колькасць слупкоў падматрыцы.

ipIMap вызначае радкі падматрыцы. Калі $ipIMap[i] = -1$, то радок i не належыць падматрыцы, інакш радок i будзе $ipIMap[i]$-м радком падматрыцы ($0 \le ipIMap[i] \le SubM$).

ipJMap вызначае слупкі падматрыцы. Калі $ipJMap[j] = -1$, то слупок j не належыць падматрыцы, інакш слупок j будзе $ipJMap[j]$-м слупком падматрыцы ($0 \le ipJMap[j] \le SubN$).

CSpMatr::CSpMatr(**CSpMatr&** *Matr*,
part_type *PartType*,
int *SubM*, **int** *SubN*,
int* *ipIMap*, **int*** *ipJMap*);

Параметры:

Matr новы аб'ект ініцыялізуецца для той жа матрыцы, што і аб'ект *Matr*. Больш таго, абодва аб'екты будуць дзяліць *агульны буфер памяці* для выканання фактарызацыі падматрыц.

значэнне астатніх параметраў такое ж, што і ў папярэдняга канструктара.

Дэструктар CSpMatr
Прызначэнне: разбурае CSpMatr аб'ект.

CSpMatr::˜CSpMatr();

Функцыі для фактарызацыі матрыцы

LUFactor
Прызначэнне: вылічвае LU-расклад падматрыцы A_I^J.

int CSpMatr::LUFactor();

Вяртаемае значэнне: -1, калі з-за недахопу памяці працэдура QR-фактарызацыі спыняецца, інакш вяртаецца значэнне 0.

QRDecomp
Прызначэнне: вылічвае QR-расклад падматрыцы A_I^J.

int CSpMatr::QRDecomp();

Вяртаемае значэнне: -1, калі з-за недахопу памяці працэдура QR-фактарызацыі спыняецца, інакш вяртаецца значэнне 0.

Функцыі для рашэння СЛУ

LUSolve
Прызначэнне: рашае СЛУ $A_I^J x = b$, пры ўмове, што A_I^J — квадратная нявыраджаная матрыца. Можа выклікацца толькі пасля $LUFactor$.
void CSpMatr::LUSolve(double* b);

Параметры:

b вектар правай часткі памеру $SubM$.

LUtSolve
Прызначэнне: рашае СЛУ $(A_I^J)^T x = c$, пры ўмове, што A_I^J — квадратная нявыраджаная матрыца. Можа выклікацца толькі пасля $LUFactor$.
void CSpMatr::LUtSolve(double* b);

Параметры:

b вектар правай часткі памеру $SubN$.

QRSolve
Прызначэнне: рашае СЛУ $A_I^J x = b$ у сэнсе найменьшых квадратаў, г. зн. задачу $\min_{x \in \mathbf{R}^{|J|}} \|A_I^J x - b\|$. Можа выклікацца толькі пасля *QRDecomp*.
void CSpMatr::QRSolve(double* b);

Параметры:

b вектар правай часткі памеру $SubM$.

QtQSolve
Прызначэнне: рашае СЛУ $Q^T Q x = b$, што эквівалентна рашэнню СЛУ $(A_I^J)^T A_I^J x = b$. Можа выклікацца толькі пасля *QRDecomp* пры ўмове, што матрыца R нявыраджаная.
void CSpMatr::QtQSolve(double* b);

Параметры:

b вектар правай часткі памеру $SubN$.

QQtSolve
Прызначэнне: рашае СЛУ $QQ^T x = b$. Можа выклікацца толькі пасля *QRDecomp* пры ўмове, што матрыца R нявыраджаная.
void CSpMatr::QQtSolve(double* b);

Параметры:

b вектар правай часткі памеру $SubN$.

PrjOnRankSpace
Прызначэнне: знаходзіць $\mathrm{pr}(\mathcal{R}(\mathcal{A}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}}), \dagger)$. Можа выклікацца толькі пасля $QRDecomp$ пры ўмове, што $\operatorname{rank} A_I^J = |J|$.
int CSpMatr::PrjOnRankSpace(**double*** y);

Вяртаемае значэнне: 1, калі $y \in \mathrm{conv\_hull}(A_I^J)$, інакш вяртаецца значэнне 0.
Параметры:

y на ўваходзе вектар памеру $SubN$; на выхадзе $\mathrm{pr}(\mathcal{R}(\mathcal{A}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}}), \dagger)$.

Іншыя функцыі

IsOK
Прызначэнне: вяртае інфармацыю аб унутраным стане аб'екта. Звычайна выклікаецца пасля канструктара.
int CSpMatr::IsOK();

Вяртаемае значэнне: 1, калі ініцыялізацыя аб'екта прайшла паспяхова, і 0 у адваротным выпадку.
GetRank

Прызначэнне: вяртае ранк матрыцы A_I^J. Звычайна выклікаецца пасля **LUFactor** ці **QRDecomp**.
int CSpMatr::GetRank();

Вяртаемае значэнне: $\operatorname{rank} A_I^J$.

Reuse

Прызначэнне: ініцыялізуе клас новай падматрыцай.

void CSpMatr::Reuse(**part_type** $PartType$,
int $SubM$, **int** $SubN$, **int*** $ipIMap$, **int*** $ipJMap$);

Параметры: супадаюць з аднаіменнымі параметрамі канструктара.

C.1.2 Прыклад выкарыстання

Праграма на мал. C.1 паказвае, як з дапамогай функцый класа **CSpMatr** вылічыць праекцыю вектара $c \in \mathbf{R}^n$ на нульпрастору $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ матрыцы $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ поўнага радковага ранга ($\operatorname{rank} A = m$).

```
#include <iostream.h>
#include <string.h>
#include "CSpMatr.h"
const int n = 5, m = 3, NonZeroNum = 11;
double Val[] = {−4, 3, −2, 3, 3, −4, 1, 1, 1, −1, −1};
int Row[] = {0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2};
int Col[] = {1, 2, 3, 4, 0, 2, 4, 0, 1, 3, 4};
double c[] = {1, 2, 1, 2, 1};
double y[n];
int ipIMap[] = {0, 1, 2};
int ipJMap[] = {0, 1, 2, 3, 4};
void main()

{
    CSpMatr B(n, m, NonZeroNum, Val, Col, Row, QR,
                45, n, m, ipJMap, ipIMap);
    if (!B.IsOK()) {
        cerr << "Памылка ініцыялізацыі CSpMatr аб’екта\n";
        return;
    }
//  pr(c,𝒩(𝒜)) = ⌋ − pr(⌋, ℛ(𝒜))
    memcpy(y,c,n*sizeof(double));
    if (!B.QRDecomp()) {
        cerr << "Памылка фактарызацыі матрыцы\n";
        return;
    }
    (void) B.PrjOnRankSpace(y);
//  compute c − y
    for (register int j = 0; j < NonZeroNum; j++)
        y[j] = c[j] − y[j];
//  друкуем адказ
    cout << "\n Pr(c,𝒩(𝒜)): (";
    for (j = 0; j < n − 1; j++)
        cout << y[j] << " ";
    cout << y[n − 1] << ")\n";

}
```

Рис. C.1: Файл MatrTest.cpp

C.2 class CLP

Гэты клас прызначаны для рашэння задач ЛП і ЦЛП. Канструктары класа дазваляюць выкарыстоўваць розныя спосабы для яго ініцыялізацыі. Вы можаце напісаць сваю працэдуру, якая падрыхтуе неабходныя масівы з дадзенымі аб задачы і пабудаваць аб'ект, выклікаўшы адпаведны канструктар, параметрамі якога з'яўляюцца ўказальнікі на гэтыя масівы. Такі спосаб зручны, напрыклад, пры рашэнні камбінаторных задач. Прасцейшы спосаб ініцыялізацыі аб'екта класа CLP — гэта выклікаць канструктар, адным з параметраў якога з'яўляецца імя тэкставага файла, у якім прадстаўлены дадзеныя аб задачы ЛП наступнага агульнага выгляду:

$$\min\{c^T x \,:\, b^1 \le Ax \le b^2\,,\ d^1 \le x \le d^2\}.$$

Структуру такога файла лепш за ўсё разглядзець на прыкладзе. Няхай мы маем задачу ЛП

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
 & & x_1 & + & 8x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & \to & \max \\
2 & \le & x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & \le & 7, \\
0 & \le & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & \le & 6, \\
0 & \le & 5x_1 & + & x_2 & & & & & \le & 5, \\
12 & \le & & & & & 3x_3 & + & 4x_4 & \le & 20, \\
0 & \le & x_1 & & & & & & & \le & 4, \\
0 & \le & & & x_2 & & & & & \le & 2, \\
0 & \le & & & & & x_3 & & & \le & 4, \\
0 & \le & & & & & & & x_4 & \le & 3
\end{array}$$

Файл дадзеных для гэтай задачы ЛП наступны:

```
4 4 10
-1 -8 -5 -6
1 1 1   4 1 2   5 1 3   2 1 4
2 2 1   3 2 2
5 3 1   1 3 2
3 4 3   4 4 4
2 0 0 12
7 6 5 20
0 0 0 0
4 2 4 3
```

Тры лічбы ў першым радку задаюць, адпаведна, колькасць двухбаковых абмежаванняў (без уліку абмежаванняў на зменныя), колькасць зменных і колькасць ненулявых элементаў у матрыцы абмежаванняў. Пасля іх задаюцца кампаненты вектара c. Далей ідуць тройкі лікаў (ў любым парадку), якія прадстаўляюць ненулявыя элементы матрыцы абмежаванняў: спачатку ідзе значэнне элемента, потым радок і слупок, у якіх ён знаходзіцца. Пасля ненулявых элементаў ідуць, адпаведна, вектары b^1, b^2, d^1 і d^2.

C.2.1 Публічныя функцыі класа

Канструктар і дэструктар

Канструктар CLP
Прызначэнне: будуе CLP аб'ект рознымі спосабамі.

CLP::CLP(**method** *Method*, **char*** *cpName*, **double** *eps* = 0);

Параметры:

Method прымае наступныя значэнні:

- *simplex*, калі падразумеваецца рашаць задачу ЛП прамым ці двойным сімплекс-метадам.
- *barrier*, калі падразумеваецца рашаць задачу ЛП метадам бар'ераў.
- *projected*, калі падразумеваецца рашаць задачу ЛП праектыўным метадам.
- *branch_ bound*, калі падразумеваецца рашаць задачу ЦЛП метадам галін і межаў.
- *cutting*, калі падразумеваецца рашаць задачу ЦЛП метадам адсячэнняў.

cpName імя файла (без пашырэння) задачы ЛП у фармаце, апісанным вышэй.

eps дакладнасць, з якой трэба рашаць задачу (абавязковы параметр толькі для метада бар'ераў).

Дэструктар CLP
Прызначэнне: разбурае CLP аб'ект.

CLP:: CLP();

Метады рашэння задач ЛП і ЦЛП

DualSimplex
Прызначэнне: Рашае задачу ЛП двойным сімплекс-метадам.

int CLP::DualSimplex(**int** *BuffSize* = 30);

Параметры:

BuffSize памер буфера для *LU*–фактарызацыі матрыцы абмежаванняў. Задаецца ў працэнтах ад памеру поўнай матрыцы.

Barrier
Прызначэнне: Рашае задачу ЛП метадам бар'ераў.

int CLP::Barrier(**double** *alpha* = 0.0, **int** *BuffSize* = 30);

Параметры:

```
#include <iostream.h>
#include "CLP.h"
int main()

{

    char Name[50];
    cout << "Enter problem name: ";
    cin >> Name;
    CLP LP(barrier, Name, 0.01);
    if (LP.Barrier(1.0, 75)) return 1;
    LP.PrintSolution();
    return 0;

}
```

Рис. C.2: Файл Barrier.cpp

$alpha$ параметр метада бар'ераў. Калі $alpha < 1$, то метад устанаўлівае $alpha = 1+\frac{1}{9\sqrt{m}}$, дзе m ёсць колькасць радкоў матрыцы абмежаванняў. Рэкамендуемыя значэнні $1.01 \leq gamma \leq 1.5$.

$BuffSize$ памер буфера для QR-фактарызацыі матрыцы абмежаванняў. Задаецца ў працэнтах ад памеру поўнай матрыцы.

Іншыя функцыі

IsOK
Прызначэнне: вяртае інфармацыю аб унутраным стане аб'екта. Звычайна выклікаецца пасля канструктара.
int IsOK();

Вяртаемае значэнне: 1, калі ініцыялізацыя аб'екта прайшла паспяхова, і 0 у адваротным выпадку.

C.2.2 Прыклад выкарыстання

Праграма, якая прадстаўлена на мал. C.2, рашае задачу ЛП метадам бар'ераў і друкуе аптымальнае рашэнне.

C.3 class CMultMatr

Няхай $B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ нявыраджаная матрыца, а матрыца $\overline{B}$ атрымана з B заменай радка s_1 на вектар-радок $a^1 \in \mathbf{R}^n$. Тады (гл. параграф У.2.1)

$$\overline{B}^{-1} = B^{-1} I(s_1, u^1)^{-1},$$

дзе $u^1 = a^1 B^{-1}$. Калі $\hat{B}$ атрымана з $\overline{B}$ заменай радка s_2 на вектар-радок a^2, то

$$\hat{B}^{-1} = \overline{B}^{-1} I(s_2, u^2)^{-1} = B^{-1} I(s_1, u^1)^{-1} I(s_2, u^2)^{-1}$$

для $u^2 = a^2 B^{-1} I(s_1, u^1)^{-1}$. Няхай, цяпер, матрыца A атрымана пасля k замяшчэнняў радкоў матрыцы B. Відавочна, што

$$A^{-1} = B^{-1} I(s_1, u^1)^{-1} \cdot \ldots \cdot I(s_k, u^k)^{-1}.$$

Калі $B = I$,

$$A^{-1} = I(s_1, u^1)^{-1} \cdot \ldots \cdot I(s_k, u^k)^{-1}.$$

Гэта прадстаўленне матрыцы A^{-1} называецца ***мультыплікатыўнай формай адваротнай матрыцы***, а складаючыя яго элементарныя матрыцы называюцца ***мультыплікатарамі***. Зазначым, што мультыплікатар $I(s, u)$ можна захоўваць як пару (s, u), прычым, вектар u можна захоўваць ва ўпакованным фармаце (толькі ненулявыя элементы).

Клас *CMultMatr* прызначаны для прадстаўлення мультыплікатыўнай формы адваротнай матрыцы. Клас прымяняецца разам з LU-раскладам на ітэрацыях прамога і двойнага сімплекс-метадаў, калі кожная q-я ітэрацыя (q фіксаваны лік, напрыклад, $q = 10$) выконваецца шляхам вылічэння LU-раскладу, а ўсе папярэднія $q - 1$ ітэрацыі выконваюцца дабаўленнем мультыплікатараў.

C.3.1 Публічныя функцыі класа

Канструктар і дэструктар

Канструктар CMultMatr
Прызначэнне: ініцыалізуе аб'ект тыпу *CMultMatr*.

CMultMatr::CMultMatr(**int** n, **int** $MaxMultNum$, **double** $Zero$, **int** $PoolSize = 0$);
Параметры:

n памер матрыцы.

$MaxMultNum$ максімальная колькасць мультыплікатараў.

$Zero$ элементы мультыплікатара, меньшыя за $Zero$ па абслютнай велічыні лічацца роўнымі нулю і пры ўпакоўцы мультыплікатара ігнаруюцца.

$PoolSize$ памер буфера для захоўвання мультыплікатараў. Стандартнае значэнне 0 азначае, што памер буфера будзе выбраны пры ініцыялізацыі аб'екта.

Дэструктар CMultMatr

Прызначэнне: высвабаджае памяць, занятую аб'ектам тыпу *CMultMatr*.

CMultMatr:: CMultMatr();

Асноўныя функцыі

Solve
Прызначэнне: рашае СЛУ $Ax = b$.

void CMultMatr::Solve(**double*** b);

Параметры:

b вектар правай часткі.

SolveTr

Прызначэнне: рашае СЛУ $A^T x = b$.

void CMultMatr::SolveTr(**double*** b);

Параметры:

b вектар правай часткі.

AddRow

Прызначэнне: дабаўляе новы мультыплікатар.

int CMultMatr::AddRow(**int** s, **double*** U);

Параметры: дабаўляе вектар-радок U замест радка s.

Іншыя функцыі

Clear
Прызначэнне: рыхтуе аб’ект да пачатку новага працэса фактарызацыі.

void CMultMatr::Clear();
ChangePoolSize

Прызначэнне: устанаўлівае новы памер унутранага буфера.

int CMultMatr::ChangePoolSize(**int** $NewSize$);

Параметры:

$NewSize$ новы памер буфера ў байтах.

C.3.2 Прыклад выкарыстання

Праграма на мал. C.3 рашае СЛУ $Ax = b$. Пасля ініцыялізацы аб'екта *Matr* тыпу **CMultMatr** знаходзім мультыплікатыўную форму адваротнай матрыцы, выклікаючы функцыю *AddRow* для кожнага радка матрыцы. Потым функцыя *Solve* знаходзіць рашэнне СЛУ.

Заўвага C.3.1 *Праграму на мал. C.3 трэба разглядаць выключна як дэманстрацыю магчымасцей класа* **CMultMatr**. *Яе можна прымяняць для рашэння СЛУ $Ax = b$ толькі ў тым выпадку, калі нявыраджаны ўсе матрыцы, якія атрымліваюцца аб'яднаннем першых k радкоў матрыцы A і апошніх $n - k$ радкоў адзінкавай матрыцы I $(k = 1, \ldots, n)$.*

```
#include <iostream.h>
#include <string.h>
#include "MultMatr.h"
const int n = 4;

double b[] = {0, 1, 0, 2};

double A[n][n] = {
          {1,2,0,5},
          {2,5,1,0},
          {6,1,0,2},
          {0,3,2,3}
};


void main()
{

     CMultMatr Matr(n, n, 0.001, n * n);
     if (!Matr.IsOK()) return 1;
     Matr.AddRow(0, A[0]);
     Matr.AddRow(1, A[1]);
     Matr.AddRow(2, A[2]);
     Matr.AddRow(3, A[3]);
//   solve Ax = b
     Matr.Solve(b);
//   print solution
     cout << "Solution: (";
     for (register int i = 0; i < n - 1; i++)
           cout << b[i] << ";
     cout << b[n - 1] << ")\ n";

}
```

Рис. C.3: Файл TestMult.cpp

Спіс абазначэнняў

$\mathbf{R}$ поле сапраўдных лікаў.

$\mathbf{Q}$ поле рацыянальных лікаў.

$\mathbf{Z}$ кольца цэлых лікаў

$\mathbf{N}$ мноства натуральных лікаў

$X \pm Y$ мноства $\{x \pm y : x \in X, \ y \in Y\}$

$X \times Y$ прамы здабытак мностваў X і Y: $X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in X, \ y \in Y\}$

X^n мноства $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in X, \ i = 1, \ldots, n\}$

$\mathbf{R}^n$ сапраўдная n-мерная вектарная прастора

$\mathbf{Q}^n$ рацыянальная n-мерная вектарная прастора

$\mathbf{Z}^n$ n-мерныя цэлалікавыя краты

$\mathbf{R}^n_+$ мноства $\{x \in \mathbf{R}^n : x \geq 0\}$

$\mathbf{Q}^n_+$ мноства $\{x \in \mathbf{Q}^n : x \geq 0\}$

$\mathbf{Z}^n_+$ мноства $\{x \in \mathbf{Z}^n : x \geq 0\}$

$\mathbf{R}^n_{++}$ мноства $\{x \in \mathbf{R}^n : x > 0\}$

$\mathbf{Q}^n_{++}$ мноства $\{x \in \mathbf{Q}^n : x > 0\}$

$\mathbf{Z}^n_{++}$ мноства $\{x \in \mathbf{Z}^n : x > 0\}$

N_n мноства {1,2,…,n}

$\mathbf{C}^k$ мноства функцый на $\mathbf{R}^n$, якія k раз непарыўна дыфферэнцавальныя

SSC мноства строга самаўзгодненых функцый

$\mathbf{SSC}(K)$ мноства самаўзгодненых бар'ераў з параметрам K

$\mathbf{BN}(K)$ мноства K-нармальных бар'ераў

Σ_n $(n-1)$-мерны сімплекс

lin_hull(X) лінейная абалонка мноства вектараў $X \subseteq \mathbf{R}^n$

aff_hull(X) афінная абалонка мноства вектараў $X \subseteq \mathbf{R}^n$

conv_hull(X) выпуклая абалонка мноства вектараў $X \subseteq \mathbf{R}^n$

$\mathcal{L}^{\perp}$ артаганальна дадатковая лінейная падпрастора да лінейнай падпрасторы $\mathcal{L}$

$M_{m,n}(F)$ мноства $m \times n$-матрыц з элементамі з F (звычайна F ёсць $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ ці $\mathbf{Z}$)

SM^n лінейная падпрастора сіметрычных матрыц з $M_{n,n}(\mathbf{R})$

SM^n_+ конус неадмоўна азначаных матрыц з SM^n

SM^n_{++} конус дадатна азначаных матрыц з SM^n

UM^n_+ конус верхніх трохвугольнікаў неадмоўна азначаных матрыц памеру n

I адзінкавая матрыца

diag$(a_1, \ldots, a_n)$ квадратная дыяганальная матрыца, на галоўнай дыяганалі якой стаяць лікі $a_1, \ldots, a_n$

diag(a) квадратная дыяганальная матрыца, на галоўнай дыяганалі якой стаяць каардынаты $a_1, \ldots, a_n$ вектара $a \in \mathbf{R}^n$

$\mathbf{0}$ нулявы скаляр, нулявы вектар, нулявая матрыца

e_i i-ты адзінкавы орт $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 1)$ з адзінкай на i-м месцы

e вектар $(1, 1, \ldots, 1)$

A^T матрыца, транспанаваная да матрыцы $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$

A^{-1} адваротная да нявыраджанай матрыцы $A \in M_{n,n}(\mathbf{F})$

$A^{\frac{1}{2}}$ квадратны корань матрыцы $A \in SM^n_+$

$A^{-\frac{1}{2}}$ матрыца $(A^{\frac{1}{2}})^{-1} = (A^{-1})^{\frac{1}{2}}$

$\det A$ дэтэрмінант матрыцы $A \in M_{n,n}(\mathbf{F})$

A_I^J падматрыца матрыцы $A \in M_{m,n}(\mathbf{F})$, утвораная элементамі, якія ляжаць у радках з мноства I і слупках з мноства J

$\operatorname{rank} A$ ранг матрыцы $A \in M_{m,n}(F)$

$\|\cdot\|_1$ l_1-норма на $\mathbf{R}^n$; максімальная слупковая норма на $M_{m,n}(\mathbf{R})$

$\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_2$ l_2-норма (яўклідава норма) на $\mathbf{R}^n$; спектральная норма на $M_{m,n}(\mathbf{R})$

$\|\cdot\|_\infty$ l_∞-норма на $\mathbf{R}^n$; максімальная радковая норма на $M_{m,n}(\mathbf{R})$

$\|\cdot\|_D$ норма (паўнорма) азначана для дадатна (неадмоўна) азначанай матрыцы $D \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ па правілу $\|x\|_D = \sqrt{x^T Dx}$

$\mathcal{R}(\mathcal{A})$ лінейная прастора значэнняў матрыцы $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$

$\mathcal{N}(\mathcal{A})$ нуль прастора матрыцы $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$

$P_{\mathcal{L}}$ матрыца праектавання на лінейную падпрастору $\mathcal{L} \subseteq \mathbf{R}^\setminus$

χ^X характарыстычная функцыя (вектар) падмноства X концага мноства S: $\chi^X(i) = 1$ ($\chi_i^X = 1$), калі $i \in X$; $\chi^X(i) = 0$ ($\chi_i^X = 0$), калі $i \in S \setminus X$

$H(a,b)$ гіперплоскасць $\{x \in \mathbf{R}^n : ax = b\}$

$H_{\leq}(a,b)$ паўпрастора $\{x \in \mathbf{R}^n : ax \leq b\}$

$P_{\leq}(A,b)$ паліэдр $\{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leq b\}$

$P_{<}(A,b)$ мноства $\{x \in \mathbf{R}^n : Ax < b\}$

vert P мноства вяршынь паліэдра P

$\mathrm{ell}(t,D,r)$ эліпсоід $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x-t\|_D \leq r\}$

$\mathrm{ell}(t,D)$ эліпсоід $\mathrm{ell}(t,D,1)$

$B(t,r)$ шар радыуса r з цэнтрам t

B^n шар $B(0,1)$

$[x,y]$ мноства $\{z \in \mathbf{R}^n : z = \alpha x + (1-\alpha)y,\ 0 \leq \alpha \leq 1\}$

$[a,b]_{\leq}$ мноства $\{x \in \mathbf{R}^n : a \leq x \leq b\}$

int X унутранасць мноства $X \subseteq \mathbf{R}^n$

rint X адносная ўнутранасць мноства $X \subset \mathbf{R}^n$

cl X замыканне мноства $X \subseteq \mathbf{R}^n$

bd X граніца мноства $X \subset \mathbf{R}^n$

$\mathrm{pr}(x,X)$ праекцыя кропкі $x \in \mathbf{R}^n$ на мноства $X \subseteq \mathbf{R}^n$

$\mathrm{sym}(x,X)$ сіметрыя выпуклага мноства $X \subseteq \mathbf{R}^n$ вакол кропкі $x \in \mathrm{int}\ X$

dom f эфектыўны абсяг функцыі f

$\partial f(x)$ субдыферэнцыял выпуклай функцыі f

epi f надграфік функцыі f

$f'(x)$ вытворная, градыент функцыі f

$f''(x)$ другая вытворная, матрыца другіх вытворных (Гессе) функцыі f

$\partial f(x)/\partial p$ вытворнай па напрамку p функцыі f у кропцы x

$\Pr X$ імавернасць падзеі X

$G = (V, E)$ граф з мноствам вяршынь V і мноствам рэбраў (дуг) E

$G(S)$ падграф графа G, пароджаны мноствам вяршынь S

$\ln a$ натуральны лагарыфм $\log_e a$

$\log a$ двайковы лагарыфм $\log_2 a$

$\exp x$ экспанента e^x

$f(n) = O(g(n))$, калі існуе такая канстанта $c > 0$, што $f(n) \leq cg(n)$ для дастаткова вялікіх n

$f(n) = \Omega(g(n))$, калі існуе такая канстанта $c > 0$, што $f(n) \geq cg(n)$ для дастаткова вялікіх n

$\geq_C$ "$x \geq_C y$"азначае, што $x - y \in C$

$>_C$ "$x >_C y$"азначае, што $x - y \in \operatorname{int} C$

Асноўная літаратура

[1] Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. Методы оптимизации. – Мн.: Изд-во БГУ, 1981.

[2] Дж. Данцыг. Линейное программирование, его применения и обобщения. – М.: Прогресс, 1966.

[3] М. Мину. Математическое программирование. – М.: Наука, 1990.

[4] Б. Муртаф. Современное линейное программирование: Теория и практика. – М.: Мир, 1984.

[5] Ю.Е. Нестеров. Эффективные методы в нелинейном программировании. – М.: Радио и связь, 1989.

[6] Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985.

[7] А. Схрейвер. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1,2. – М.: Мир, 1991.

[8] Л.Г. Хачиян. Сложность задач линейного программирования. – М.: Знание, 1987 (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, кибернетика").

[9] Т. Ху. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974.

[10] Yu. E. Nesterov, A.S. Nemirovskii. Interior Point Methods in Convex Optimization: Theory and Applications. – SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[11] R. Saigal. Linear programming: a modern integrated analysis. – Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 1995.

Дадатковая літаратура

[1] А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979.

[2] Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.

[3] М. Гэри, Д. Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.

[4] А. Джордж, Дж. Лю. Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984.

[5] Дж. Дэнніс, Р. Шнабель. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988.

[6] В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981.

[7] Л.С. Лэсдон. Оптимизация больших систем. – М.: Наука, 1975.

[8] С. Писсанецки. Технология разреженных матриц. – М.: Мир, 1988.

[9] Р.Т. Рокафеллар. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.

[10] Р. Хорн, Ч. Джонсон. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989.

Предметный указатель