Метод ветвей и сечений

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2015

План лекции

Задача СЦП

Будем рассматривать задачу СЦП

$$\max\{c^T x \,:\, b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\}.$$

где

- $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
- $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
- A — действительная $m \times n$-матрица,
- x — n-вектор переменных (неизвестных),
- а $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.

Задача СЦП

Будем рассматривать задачу СЦП

$$\max\{c^T x \ :\ b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\}.$$

где

- $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
- $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
- A — действительная $m \times n$-матрица,
- x — n-вектор переменных (неизвестных),
- а $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.

Задача СЦП

Будем рассматривать задачу СЦП

$$\max\{c^T x \,:\, b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\}.$$

где

- $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
- $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
- A — действительная $m \times n$-матрица,
- x — n-вектор переменных (неизвестных),
- а $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.

Задача СЦП

Будем рассматривать задачу СЦП

$$\max\{c^T x \;:\; b^1 \le Ax \le b^2,\; d^1 \le x \le d^2,\; x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\}.$$

где

- $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
- $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
- A — действительная $m \times n$-матрица,
- x — n-вектор переменных (неизвестных),
- а $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.

Задача СЦП

Будем рассматривать задачу СЦП

$$\max\{c^T x \ :\ b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\}.$$

где

- $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
- $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
- A — действительная $m \times n$-матрица,
- x — n-вектор переменных (неизвестных),
- а $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.

План лекции

Ветвление

- Базовой структурой метода ветвей и границ является *дерево поиска*.
- *Корень* дерева поиска представляет исходную задачу.
- В ходе решения задачи дерево растет благодаря процессу, называемому *ветвлением*, который создает двух или более сыновей для одного из листьев текущего дерева поиска.
- Каждая из задач СЦП в сыновних узлах получается из родительской задачи СЦП добавлением одного или нескольких новых ограничений.
- Обычно новое ограничение — это верхняя или нижняя граница для переменной.
- В процессе ветвления мы не должны потерять допустимые решения: объединение допустимых областей задач сыновей должно давать допустимую область их родителя.

Ветвление

- Базовой структурой метода ветвей и границ является *дерево поиска*.
- *Корень* дерева поиска представляет исходную задачу.
- В ходе решения задачи дерево растет благодаря процессу, называемому *ветвлением*, который создает двух или более сыновей для одного из листьев текущего дерева поиска.
- Каждая из задач СЦП в сыновних узлах получается из родительской задачи СЦП добавлением одного или нескольких новых ограничений.
- Обычно новое ограничение — это верхняя или нижняя граница для переменной.
- В процессе ветвления мы не должны потерять допустимые решения: объединение допустимых областей задач сыновей должно давать допустимую область их родителя.

Ветвление

- Базовой структурой метода ветвей и границ является *дерево поиска*.
- *Корень* дерева поиска представляет исходную задачу.
- В ходе решения задачи дерево растет благодаря процессу, называемому *ветвлением*, который создает двух или более сыновей для одного из листьев текущего дерева поиска.
- Каждая из задач СЦП в сыновних узлах получается из родительской задачи СЦП добавлением одного или нескольких новых ограничений.
- Обычно новое ограничение — это верхняя или нижняя граница для переменной.
- В процессе ветвления мы не должны потерять допустимые решения: объединение допустимых областей задач сыновей должно давать допустимую область их родителя.

Ветвление

- Базовой структурой метода ветвей и границ является *дерево поиска*.
- *Корень* дерева поиска представляет исходную задачу.
- В ходе решения задачи дерево растет благодаря процессу, называемому *ветвлением*, который создает двух или более сыновей для одного из листьев текущего дерева поиска.
- Каждая из задач СЦП в сыновних узлах получается из родительской задачи СЦП добавлением одного или нескольких новых ограничений.
- Обычно новое ограничение — это верхняя или нижняя граница для переменной.
- В процессе ветвления мы не должны потерять допустимые решения: объединение допустимых областей задач сыновей должно давать допустимую область их родителя.

Ветвление

- Базовой структурой метода ветвей и границ является *дерево поиска*.
- *Корень* дерева поиска представляет исходную задачу.
- В ходе решения задачи дерево растет благодаря процессу, называемому *ветвлением*, который создает двух или более сыновей для одного из листьев текущего дерева поиска.
- Каждая из задач СЦП в сыновних узлах получается из родительской задачи СЦП добавлением одного или нескольких новых ограничений.
- Обычно новое ограничение — это верхняя или нижняя граница для переменной.
- В процессе ветвления мы не должны потерять допустимые решения: объединение допустимых областей задач сыновей должно давать допустимую область их родителя.

Ветвление

- Базовой структурой метода ветвей и границ является *дерево поиска*.
- *Корень* дерева поиска представляет исходную задачу.
- В ходе решения задачи дерево растет благодаря процессу, называемому *ветвлением*, который создает двух или более сыновей для одного из листьев текущего дерева поиска.
- Каждая из задач СЦП в сыновних узлах получается из родительской задачи СЦП добавлением одного или нескольких новых ограничений.
- Обычно новое ограничение — это верхняя или нижняя граница для переменной.
- В процессе ветвления мы не должны потерять допустимые решения: объединение допустимых областей задач сыновей должно давать допустимую область их родителя.

Ветвление

- Базовой структурой метода ветвей и границ является *дерево поиска*.
- *Корень* дерева поиска представляет исходную задачу.
- В ходе решения задачи дерево растет благодаря процессу, называемому *ветвлением*, который создает двух или более сыновей для одного из листьев текущего дерева поиска.
- Каждая из задач СЦП в сыновних узлах получается из родительской задачи СЦП добавлением одного или нескольких новых ограничений.
- Обычно новое ограничение — это верхняя или нижняя граница для переменной.
- В процессе ветвления мы не должны потерять допустимые решения: объединение допустимых областей задач сыновей должно давать допустимую область их родителя.

Верхняя и нижняя границы

- Главная идея в методе ветвей и границ состоит в том, чтобы не давать дереву поиска разрастаться, отсекая «бесперспективные» ветви.
- В методах ветвей и границ, основанных на линейном программировании, *верхней границей* в узле k является оптимальное значение $\gamma(k)$ целевой функции релаксационной (без учета требований о целочисленности переменных) задачи ЛП в данном узле.
- *Нижней границей* (или *рекордом*) называется наибольшее значение R целевой функции для уже найденных допустимых решений исходной задачи СЦП.
- Само наилучшее из полученных решений называется *рекордным решением*.
- Если $\gamma(k) \le R$, то узел k и всех его потомков можно отсечь от дерева поиска.

Верхняя и нижняя границы

- Главная идея в методе ветвей и границ состоит в том, чтобы не давать дереву поиска разрастаться, отсекая «бесперспективные» ветви.
- В методах ветвей и границ, основанных на линейном программировании, *верхней границей* в узле k является оптимальное значение $\gamma(k)$ целевой функции релаксационной (без учета требований о целочисленности переменных) задачи ЛП в данном узле.
- *Нижней границей* (или *рекордом*) называется наибольшее значение R целевой функции для уже найденных допустимых решений исходной задачи СЦП.
- Само наилучшее из полученных решений называется *рекордным решением*.
- Если $\gamma(k) \le R$, то узел k и всех его потомков можно отсечь от дерева поиска.

Верхняя и нижняя границы

- Главная идея в методе ветвей и границ состоит в том, чтобы не давать дереву поиска разрастаться, отсекая «бесперспективные» ветви.
- В методах ветвей и границ, основанных на линейном программировании, *верхней границей* в узле k является оптимальное значение $\gamma(k)$ целевой функции релаксационной (без учета требований о целочисленности переменных) задачи ЛП в данном узле.
- *Нижней границей* (или *рекордом*) называется наибольшее значение R целевой функции для уже найденных допустимых решений исходной задачи СЦП.
- Само наилучшее из полученных решений называется *рекордным решением.*
- Если $\gamma(k) \le R$, то узел k и всех его потомков можно отсечь от дерева поиска.

Верхняя и нижняя границы

- Главная идея в методе ветвей и границ состоит в том, чтобы не давать дереву поиска разрастаться, отсекая «бесперспективные» ветви.
- В методах ветвей и границ, основанных на линейном программировании, *верхней границей* в узле k является оптимальное значение $\gamma(k)$ целевой функции релаксационной (без учета требований о целочисленности переменных) задачи ЛП в данном узле.
- *Нижней границей* (или *рекордом*) называется наибольшее значение R целевой функции для уже найденных допустимых решений исходной задачи СЦП.
- Само наилучшее из полученных решений называется *рекордным решением*.
- Если $\gamma(k) \le R$, то узел k и всех его потомков можно отсечь от дерева поиска.

Верхняя и нижняя границы

- Главная идея в методе ветвей и границ состоит в том, чтобы не давать дереву поиска разрастаться, отсекая «бесперспективные» ветви.
- В методах ветвей и границ, основанных на линейном программировании, *верхней границей* в узле k является оптимальное значение $\gamma(k)$ целевой функции релаксационной (без учета требований о целочисленности переменных) задачи ЛП в данном узле.
- *Нижней границей* (или *рекордом*) называется наибольшее значение R целевой функции для уже найденных допустимых решений исходной задачи СЦП.
- Само наилучшее из полученных решений называется *рекордным решением.*
- Если $\gamma(k) \le R$, то узел k и всех его потомков можно отсечь от дерева поиска.

Верхняя и нижняя границы

- Главная идея в методе ветвей и границ состоит в том, чтобы не давать дереву поиска разрастаться, отсекая «бесперспективные» ветви.
- В методах ветвей и границ, основанных на линейном программировании, *верхней границей* в узле k является оптимальное значение $\gamma(k)$ целевой функции релаксационной (без учета требований о целочисленности переменных) задачи ЛП в данном узле.
- *Нижней границей* (или *рекордом*) называется наибольшее значение R целевой функции для уже найденных допустимых решений исходной задачи СЦП.
- Само наилучшее из полученных решений называется *рекордным решением.*
- Если $\gamma(k) \leq R$, то узел k и всех его потомков можно отсечь от дерева поиска.

Верхняя и нижняя границы

- Главная идея в методе ветвей и границ состоит в том, чтобы не давать дереву поиска разрастаться, отсекая «бесперспективные» ветви.
- В методах ветвей и границ, основанных на линейном программировании, *верхней границей* в узле k является оптимальное значение $\gamma(k)$ целевой функции релаксационной (без учета требований о целочисленности переменных) задачи ЛП в данном узле.
- *Нижней границей* (или *рекордом*) называется наибольшее значение R целевой функции для уже найденных допустимых решений исходной задачи СЦП.
- Само наилучшее из полученных решений называется *рекордным решением*.
- Если $\gamma(k) \leq R$, то узел k и всех его потомков можно отсечь от дерева поиска.

План лекции

Метод ветвей и границ: пример

Решить следующую задачу ЦП

$$\begin{array}{rrcl}
 & x_1 + 2x_2 & \to & \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 & \le & 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 & \le & 11, \\
3: & 1 \le x_1 & \le & 4, \\
4: & 1 \le x_2 & \le & 5, \\
 & x_1, x_2 & — & \text{целые.}
\end{array}$$

Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:

- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$\begin{aligned} & & x_1 + 2x_2 &\to \max, \\ 1: & & -2x_1 + 3x_2 &\le 4, \\ 2: & & 2x_1 + 2x_2 &\le 11, \\ 3: & & 1 \le x_1 &\le 4, \\ 4: & & 1 \le x_2 &\le 5. \end{aligned}$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:

- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$, оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:

- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

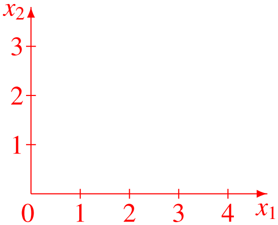
Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{aligned}
& & x_1 + 2x_2 &\to \max,\\
1: & & -2x_1 + 3x_2 &\le 4,\\
2: & & 2x_1 + 2x_2 &\le 11,\\
3: & & 1 \le x_1 &\le 4,\\
4: & & 1 \le x_2 &\le 5.
\end{aligned}
$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2\cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

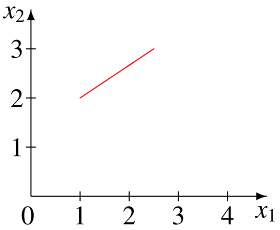
Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{ll}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

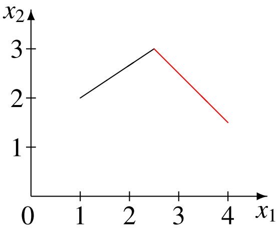
Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



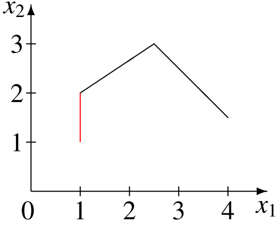
- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

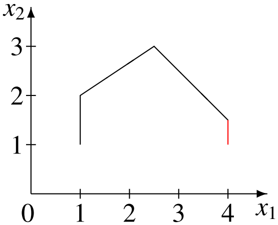
- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{lrl}
 & x_1 + 2x_2 & \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 & \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 & \le 11, \\
{\color{red}3:} & 1 \le {\color{red}x_1} & {\color{red}\le 4}, \\
4: & 1 \le x_2 & \le 5.
\end{array}
$$

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

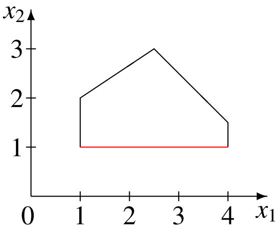
Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{lrl}
 & x_1 + 2x_2 & \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 & \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 & \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 & \le 4, \\
{\color{red}4:} & {\color{red}1 \le x_2} & \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



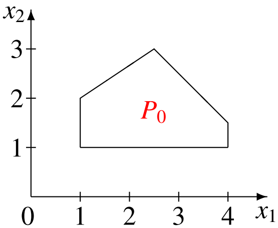
- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{lrl}
 & x_1 + 2x_2 & \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 & \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 & \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 & \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 & \le 5.
\end{array}
$$

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

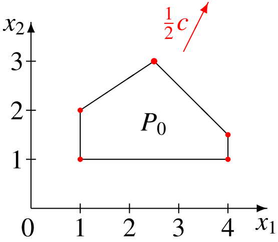
Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{lrl}
 & x_1 + 2x_2 & \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 & \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 & \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 & \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 & \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



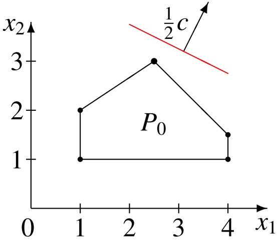
- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{rrl}
 & x_1 + 2x_2 & \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 & \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 & \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 & \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 & \le 5.
\end{array}
$$

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2\cdot 3 \rfloor = 8$.

- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

Узел 0: релаксационная задача

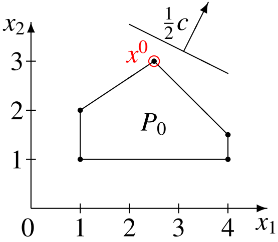
Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{rrl}
 & x_1 + 2x_2 & \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 & \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 & \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 & \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 & \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,

оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

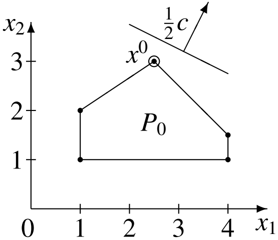
Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{rrl}
 & x_1 + 2x_2 & \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 & \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 & \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 & \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 & \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

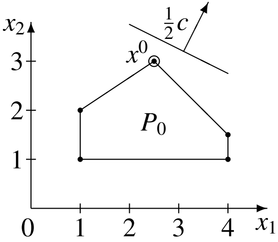
Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$
\begin{array}{rrl}
 & x_1 + 2x_2 & \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 & \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 & \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 & \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 & \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

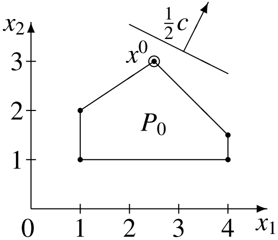
Узел 0: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 0:

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 + 2x_2 & \to & \max, \\ 1: & -2x_1 + 3x_2 & \le & 4, \\ 2: & 2x_1 + 2x_2 & \le & 11, \\ 3: & 1 \le x_1 & \le & 4, \\ 4: & 1 \le x_2 & \le & 5. \end{array}$$

Опт. решение: $x^0 = (5/2, 3)^T$,
оценка: $\gamma(0) = \lfloor 5/2 + 2 \cdot 3 \rfloor = 8$.

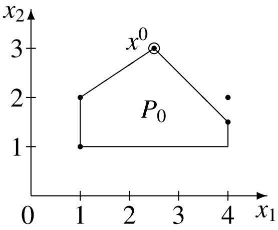
Многогранник P_0 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 0:



- Поскольку решение x^0 нецелочисленно, а $\gamma(0) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 0 добавляем к дереву поиска.

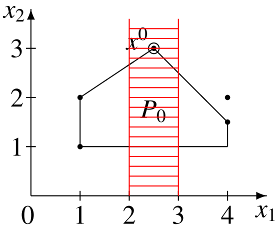
Узел 0: ветвление

- Решение $x^0 = (5/2, 3)^T$ нецелочисленно, то осуществляем ветвление узла 0 по дробной переменной x_1.
- Из P_0 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2 < x_1 < 3\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_0 будет разделен на два многогранника P_1 и P_2, которые являются множествами допустимых решений подзадач 1 и 2.



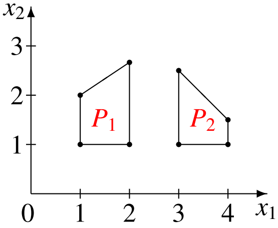
Узел 0: ветвление

- Решение $x^0 = (5/2, 3)^T$ нецелочисленно, то осуществляем ветвление узла 0 по дробной переменной x_1.
- Из P_0 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 2 < x_1 < 3\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_0 будет разделен на два многогранника P_1 и P_2, которые являются множествами допустимых решений подзадач 1 и 2.



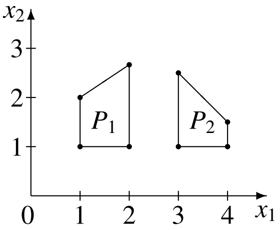
Узел 0: ветвление

- Решение $x^0 = (5/2, 3)^T$ нецелочисленно, то осуществляем ветвление узла 0 по дробной переменной x_1.
- Из P_0 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2 < x_1 < 3\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_0 будет разделен на два многогранника P_1 и P_2, которые являются множествами допустимых решений подзадач 1 и 2.



Узел 0: ветвление

- Решение $x^0 = (5/2, 3)^T$ нецелочисленно, то осуществляем ветвление узла 0 по дробной переменной x_1.
- Из P_0 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 2 < x_1 < 3\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_0 будет разделен на два многогранника P_1 и P_2, которые являются множествами допустимых решений подзадач 1 и 2.



Узел 1: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 1:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 \le 2, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^1 = (2, 8/3)^T$, оценка: $\gamma(1) = \lfloor 2 + 2 \cdot 8/3 \rfloor = 7$.

Многогранник P_1 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 1:

- Поскольку решение x^1 нецелочисленно, а $\gamma(1) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 1 добавляем к дереву поиска.

Узел 1: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 1:

$$\begin{array}{rr} & x_1 + 2x_2 \to \max, \\ 1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ 2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3: & 1 \le x_1 \le 2, \\ 4: & 1 \le x_2 \le 5. \end{array}$$

Опт. решение: $x^1 = (2, 8/3)^T$, оценка: $\gamma(1) = \lfloor 2 + 2 \cdot 8/3 \rfloor = 7$.

Многогранник P_1 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 1:

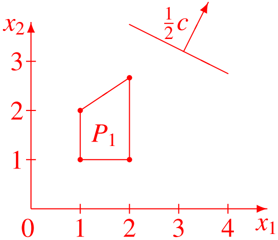
- Поскольку решение x^1 нецелочисленно, а $\gamma(1) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 1 добавляем к дереву поиска.

Узел 1: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 1:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 \le 2, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Многогранник P_1 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 1:



Опт. решение: $x^1 = (2, 8/3)^T$, оценка: $\gamma(1) = \lfloor 2 + 2 \cdot 8/3 \rfloor = 7$.

- Поскольку решение x^1 нецелочисленно, а $\gamma(1) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 1 добавляем к дереву поиска.

Узел 1: релаксационная задача

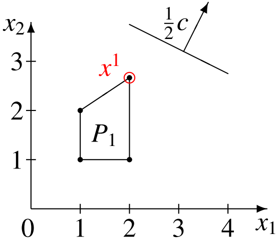
Релаксационная задача ЛП для узла 1:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 \le 2, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^1 = (2, 8/3)^T$,

оценка: $\gamma(1) = \lfloor 2 + 2 \cdot 8/3 \rfloor = 7$.

Многогранник P_1 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 1:



- Поскольку решение x^1 нецелочисленно, а $\gamma(1) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 1 добавляем к дереву поиска.

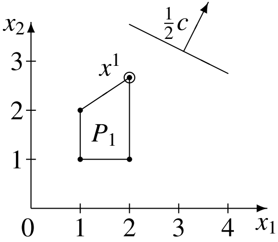
Узел 1: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 1:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 \le 2, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^1 = (2, 8/3)^T$,
оценка: $\gamma(1) = \lfloor 2 + 2 \cdot 8/3 \rfloor = 7$.

Многогранник P_1 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 1:



- Поскольку решение x^1 нецелочисленно, а $\gamma(1) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 1 добавляем к дереву поиска.

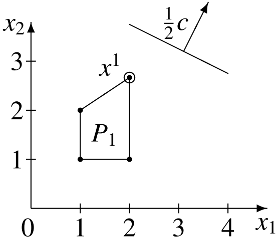
Узел 1: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 1:

$$\begin{array}{rr} & x_1 + 2x_2 \to \max, \\ 1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ 2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3: & 1 \le x_1 \le 2, \\ 4: & 1 \le x_2 \le 5. \end{array}$$

Опт. решение: $x^1 = (2, 8/3)^T$,
оценка: $\gamma(1) = \lfloor 2 + 2 \cdot 8/3 \rfloor = 7$.

Многогранник P_1 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 1:



- Поскольку решение x^1 нецелочисленно, а $\gamma(1) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 1 добавляем к дереву поиска.

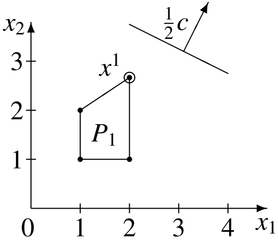
Узел 1: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 1:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 1 \le x_1 \le 2, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^1 = (2, 8/3)^T$,
оценка: $\gamma(1) = \lfloor 2 + 2 \cdot 8/3 \rfloor = 7$.

Многогранник P_1 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 1:



- Поскольку решение x^1 нецелочисленно, а $\gamma(1) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 1 добавляем к дереву поиска.

Узел 2: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 2:

$$
\begin{aligned}
& x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: \quad & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: \quad & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: \quad & 3 \le x_1 \le 4, \\
4: \quad & 1 \le x_2 \le 5.
\end{aligned}
$$

Опт. решение: $x^2 = (3, 5/2)^T$, оценка: $\gamma(2) = \lfloor 3 + 2 \cdot 5/2 \rfloor = 8$.

Многогранник P_2 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 2:

- Поскольку решение x^2 нецелочисленно, а $\gamma(2) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 2 добавляем к дереву поиска.

Узел 2: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 2:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^2 = (3, 5/2)^T$,
оценка: $\gamma(2) = \lfloor 3 + 2 \cdot 5/2 \rfloor = 8$.

Многогранник P_2 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 2:

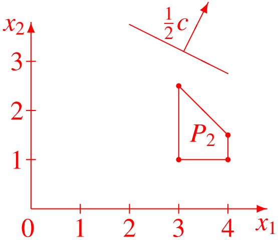
- Поскольку решение x^2 нецелочисленно, а $\gamma(2) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 2 добавляем к дереву поиска.

Узел 2: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 2:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Многогранник P_2 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 2:



Опт. решение: $x^2 = (3, 5/2)^T$, оценка: $\gamma(2) = \lfloor 3 + 2 \cdot 5/2 \rfloor = 8$.

- Поскольку решение x^2 нецелочисленно, а $\gamma(2) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 2 добавляем к дереву поиска.

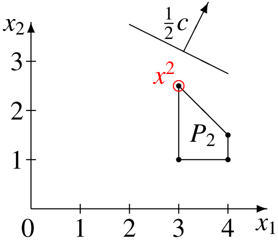
Узел 2: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 2:

$$\begin{array}{rr} & x_1 + 2x_2 \to \max, \\ 1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ 2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3: & 3 \le x_1 \le 4, \\ 4: & 1 \le x_2 \le 5. \end{array}$$

Опт. решение: $x^2 = (3, 5/2)^T$,
оценка: $\gamma(2) = \lfloor 3 + 2 \cdot 5/2 \rfloor = 8$.

Многогранник P_2 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 2:



- Поскольку решение x^2 нецелочисленно, а $\gamma(2) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 2 добавляем к дереву поиска.

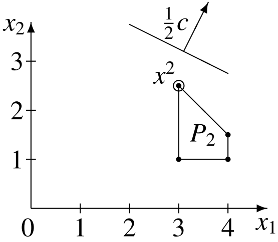
Узел 2: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 2:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^2 = (3, 5/2)^T$,
оценка: $\gamma(2) = \lfloor 3 + 2 \cdot 5/2 \rfloor = 8$.

Многогранник P_2 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 2:



- Поскольку решение x^2 нецелочисленно, а $\gamma(2) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 2 добавляем к дереву поиска.

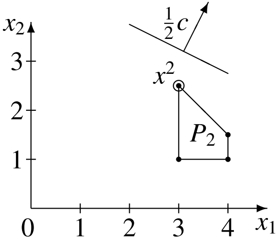
Узел 2: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 2:

$$\begin{array}{rr} & x_1 + 2x_2 \to \max, \\ 1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ 2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3: & 3 \le x_1 \le 4, \\ 4: & 1 \le x_2 \le 5. \end{array}$$

Опт. решение: $x^2 = (3, 5/2)^T$,
оценка: $\gamma(2) = \lfloor 3 + 2 \cdot 5/2 \rfloor = 8$.

Многогранник P_2 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 2:



- Поскольку решение x^2 нецелочисленно, а $\gamma(2) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 2 добавляем к дереву поиска.

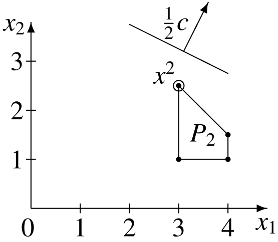
Узел 2: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 2:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^2 = (3, 5/2)^T$, оценка: $\gamma(2) = \lfloor 3 + 2 \cdot 5/2 \rfloor = 8$.

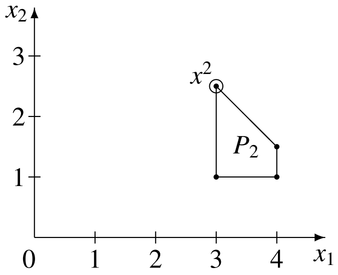
Многогранник P_2 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 2:



- Поскольку решение x^2 нецелочисленно, а $\gamma(2) = 8 > -\infty = R$,
- то узел 2 добавляем к дереву поиска.

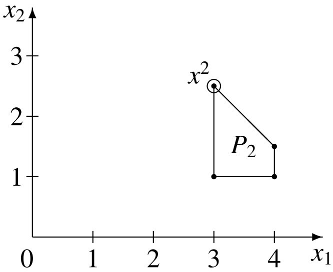
Узел 2: ветвление

- В ▸ текущем дереве выбираем узел 2 с max оценкой.
- Т. к. $x^2 = (3, 5/2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 2 по переменной x_2.
- Из P_2 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2 < x_2 < 3\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_2 будет разделен на два многогранника P_3 и $P_4 = \emptyset$, которые являются множествами допустимых решений подзадач 3 и 4.



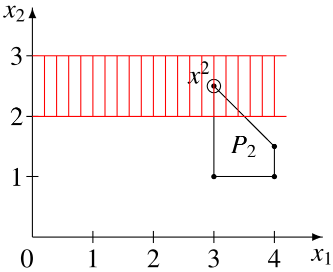
Узел 2: ветвление

- В ▸ текущем дереве выбираем узел 2 с max оценкой.
- Т. к. $x^2 = (3, 5/2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 2 по переменной x_2.
- Из P_2 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2 < x_2 < 3\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_2 будет разделен на два многогранника P_3 и $P_4 = \emptyset$, которые являются множествами допустимых решений подзадач 3 и 4.



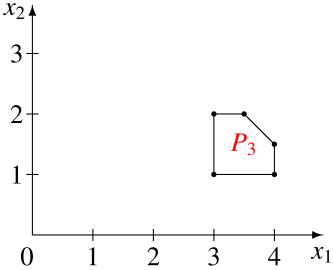
Узел 2: ветвление

- В ‣ текущем дереве выбираем узел 2 с max оценкой.
- Т. к. $x^2 = (3, 5/2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 2 по переменной x_2.
- Из P_2 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 2 < x_2 < 3\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_2 будет разделен на два многогранника P_3 и $P_4 = \emptyset$, которые являются множествами допустимых решений подзадач 3 и 4.



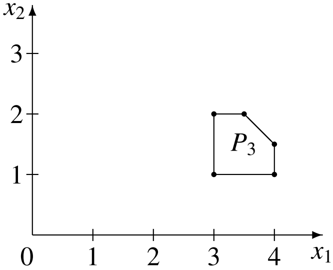
Узел 2: ветвление

- В ▸ текущем дереве выбираем узел 2 с max оценкой.
- Т. к. $x^2 = (3, 5/2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 2 по переменной x_2.
- Из P_2 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 2 < x_2 < 3\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_2 будет разделен на два многогранника P_3 и $P_4 = \emptyset$, которые являются множествами допустимых решений подзадач 3 и 4.



Узел 2: ветвление

- В ▸ текущем дереве выбираем узел 2 с max оценкой.
- Т. к. $x^2 = (3, 5/2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 2 по переменной x_2.
- Из P_2 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 2 < x_2 < 3\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_2 будет разделен на два многогранника P_3 и $P_4 = \emptyset$, которые являются множествами допустимых решений подзадач 3 и 4.



Узел 3: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 3:

$$
\begin{aligned}
& & x_1 + 2x_2 \to \max,\\
1: & & -2x_1 + 3x_2 \le 4,\\
2: & & 2x_1 + 2x_2 \le 11,\\
3: & & 3 \le x_1 \le 4,\\
4: & & 1 \le x_2 \le 2.
\end{aligned}
$$

Опт. решение: $x^3 = (7/2, 2)^T$,
оценка: $\gamma(3) = \lfloor 7/2 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_3 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 3:

- Поскольку решение x^3 нецелочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 3 добавляем к дереву поиска.

Узел 3: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 3:

$$\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}$$

Опт. решение: $x^3 = (7/2, 2)^T$,
оценка: $\gamma(3) = \lfloor 7/2 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_3 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 3:

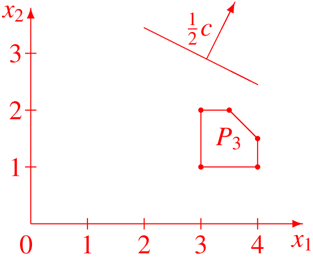
- Поскольку решение x^3 нецелочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 3 добавляем к дереву поиска.

Узел 3: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 3:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Многогранник P_3 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 3:



Опт. решение: $x^3 = (7/2, 2)^T$,
оценка: $\gamma(3) = \lfloor 7/2 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

- Поскольку решение x^3 нецелочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 3 добавляем к дереву поиска.

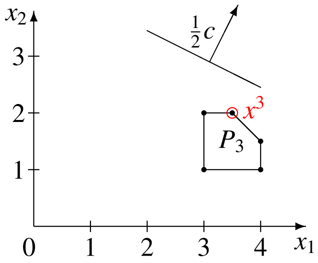
Узел 3: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 3:

$$
\begin{array}{lr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^3 = (7/2, 2)^T$,
оценка: $\gamma(3) = \lfloor 7/2 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_3 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 3:



- Поскольку решение x^3 нецелочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 3 добавляем к дереву поиска.

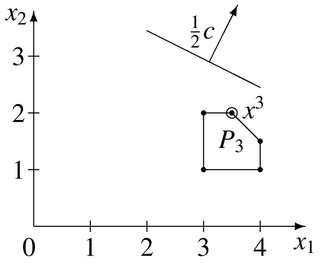
Узел 3: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 3:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 4, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^3 = (7/2, 2)^T$,
оценка: $\gamma(3) = \lfloor 7/2 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_3 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 3:



- Поскольку решение x^3 нецелочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 3 добавляем к дереву поиска.

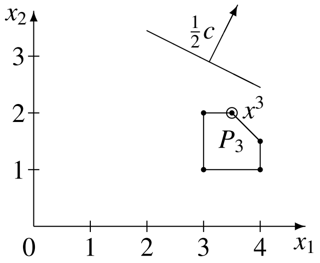
Узел 3: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 3:

$$\begin{array}{rr} & x_1 + 2x_2 \to \max, \\ 1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ 2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3: & 3 \le x_1 \le 4, \\ 4: & 1 \le x_2 \le 2. \end{array}$$

Опт. решение: $x^3 = (7/2, 2)^T$,
оценка: $\gamma(3) = \lfloor 7/2 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_3 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 3:



- Поскольку решение x^3 нецелочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то узел 3 добавляем к дереву поиска.

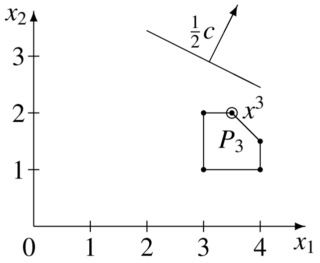
Узел 3: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 3:

$$\begin{array}{rr} & x_1 + 2x_2 \to \max, \\ 1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ 2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3: & 3 \le x_1 \le 4, \\ 4: & 1 \le x_2 \le 2. \end{array}$$

Опт. решение: $x^3 = (7/2, 2)^T$,
оценка: $\gamma(3) = \lfloor 7/2 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_3 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 3:



- Поскольку решение x^3 нецелочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то ‣ узел 3 добавляем к дереву поиска.

Узел 4: релаксационная задача

- Релаксационная задача ЛП для узла 4:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 4, \\
4: & 3 \le x_2 \le 5.
\end{array}
$$

- не имеет решений,
- так как многогранник P_4 ее системы ограничений пуст.
- Поэтому узел 4 не добавляем к дереву поиска.

Узел 4: релаксационная задача

- Релаксационная задача ЛП для узла 4:

$$\begin{aligned}
& & x_1 + 2x_2 &\to \max, \\
1: & & -2x_1 + 3x_2 &\le 4, \\
2: & & 2x_1 + 2x_2 &\le 11, \\
3: & & 3 \le x_1 &\le 4, \\
4: & & 3 \le x_2 &\le 5.
\end{aligned}$$

- не имеет решений,
- так как многогранник P_4 ее системы ограничений пуст.
- Поэтому узел 4 не добавляем к дереву поиска.

Узел 4: релаксационная задача

- Релаксационная задача ЛП для узла 4:

$$\begin{array}{rr} & x_1 + 2x_2 \to \max, \\ 1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ 2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3: & 3 \le x_1 \le 4, \\ 4: & 3 \le x_2 \le 5. \end{array}$$

- не имеет решений,
- так как многогранник P_4 ее системы ограничений пуст.
- Поэтому узел 4 не добавляем к дереву поиска.

Узел 4: релаксационная задача

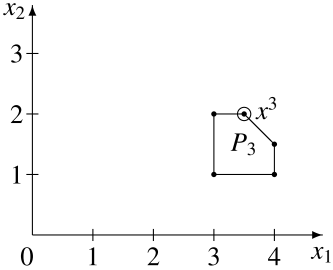
- Релаксационная задача ЛП для узла 4:

$$\begin{array}{rr} & x_1 + 2x_2 \to \max, \\ 1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ 2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3: & 3 \le x_1 \le 4, \\ 4: & 3 \le x_2 \le 5. \end{array}$$

- не имеет решений,
- так как многогранник P_4 ее системы ограничений пуст.
- Поэтому узел 4 не добавляем к дереву поиска.

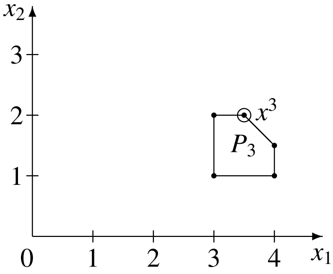
Узел 3: ветвление

- В ▸ текущем дереве выбираем узел 3 с max оценкой.
- Т. к. $x^3 = (7/2, 2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 3 по переменной x_1.
- Из P_3 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : 3 < x_1 < 4\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_3 будет разделен на два многогранника P_5 и P_6, которые являются множествами допустимых решений подзадач 5 и 6.



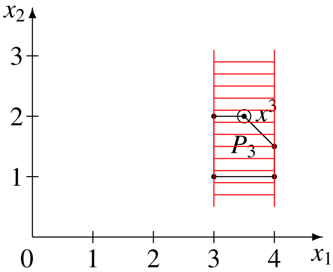
Узел 3: ветвление

- В ▸ текущем дереве выбираем узел 3 с max оценкой.
- Т. к. $x^3 = (7/2, 2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 3 по переменной x_1.
- Из P_3 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 3 < x_1 < 4\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_3 будет разделен на два многогранника P_5 и P_6, которые являются множествами допустимых решений подзадач 5 и 6.



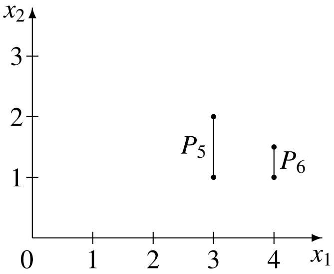
Узел 3: ветвление

- В текущем дереве выбираем узел 3 с max оценкой.
- Т. к. $x^3 = (7/2, 2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 3 по переменной x_1.
- Из P_3 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 3 < x_1 < 4\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_3 будет разделен на два многогранника P_5 и P_6, которые являются множествами допустимых решений подзадач 5 и 6.



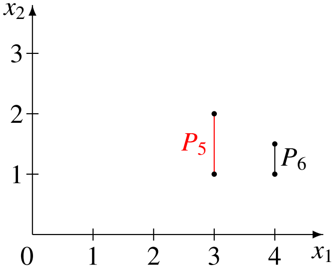
Узел 3: ветвление

- В ▸ текущем дереве выбираем узел 3 с max оценкой.
- Т. к. $x^3 = (7/2, 2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 3 по переменной x_1.
- Из P_3 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 3 < x_1 < 4\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_3 будет разделен на два многогранника P_5 и P_6, которые являются множествами допустимых решений подзадач 5 и 6.



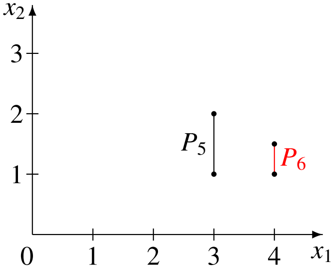
Узел 3: ветвление

- В ▸ текущем дереве выбираем узел 3 с max оценкой.
- Т. к. $x^3 = (7/2, 2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 3 по переменной x_1.
- Из P_3 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : 3 < x_1 < 4\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_3 будет разделен на два многогранника P_5 и P_6, которые являются множествами допустимых решений подзадач 5 и 6.



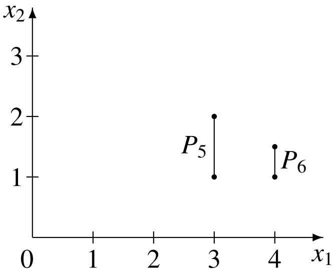
Узел 3: ветвление

- В текущем дереве выбираем узел 3 с max оценкой.
- Т. к. $x^3 = (7/2, 2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 3 по переменной x_1.
- Из P_3 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : 3 < x_1 < 4\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_3 будет разделен на два многогранника P_5 и P_6, которые являются множествами допустимых решений подзадач 5 и 6.



Узел 3: ветвление

- В ▸ текущем дереве выбираем узел 3 с max оценкой.
- Т. к. $x^3 = (7/2, 2)^T \notin \mathbb{Z}^2$, то осуществляем ветвление узла 3 по переменной x_1.
- Из P_3 удаляем полосу $\{x \in \mathbb{R}^2 : 3 < x_1 < 4\}$, в которой нет целых точек.
- В результате, P_3 будет разделен на два многогранника P_5 и P_6, которые являются множествами допустимых решений подзадач 5 и 6.



Узел 5: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 5:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 3, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^5 = (3, 2)^T$, оценка: $\gamma(5) = \lfloor 3 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_5 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 5:

- Т. к. решение x^5 целочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то меняем (устанавливаем) рекорд и рекордное решение, полагая $R = 7$ и $x^R = (3, 2)^T$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 7.

Узел 5: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 5:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 3, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^5 = (3,2)^T$, оценка: $\gamma(5) = \lfloor 3 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_5 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 5:

- Т. к. решение x^5 целочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то меняем (устанавливаем) рекорд и рекордное решение, полагая $R = 7$ и $x^R = (3,2)^T$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 7.

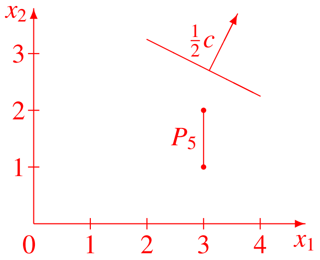
Узел 5: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 5:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 3, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^5 = (3,2)^T$,
оценка: $\gamma(5) = \lfloor 3 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_5 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 5:



- Т. к. решение x^5 целочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то меняем (устанавливаем) рекорд и рекордное решение, полагая $R = 7$ и $x^R = (3,2)^T$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 7.

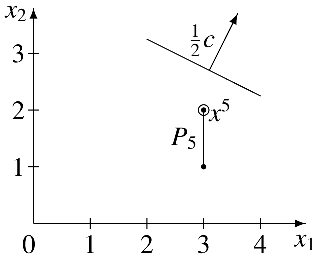
Узел 5: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 5:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 3, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^5 = (3, 2)^T$,
оценка: $\gamma(5) = \lfloor 3 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_5 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 5:



- Т. к. решение x^5 целочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то меняем (устанавливаем) рекорд и рекордное решение, полагая $R = 7$ и $x^R = (3, 2)^T$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 7.

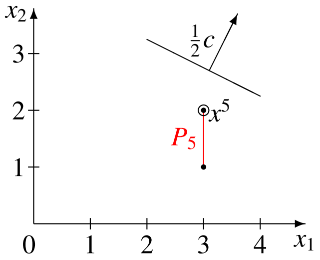
Узел 5: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 5:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 3, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^5 = (3,2)^T$,
оценка: $\gamma(5) = \lfloor 3 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_5 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 5:



- Т. к. решение x^5 целочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то меняем (устанавливаем) рекорд и рекордное решение, полагая $R = 7$ и $x^R = (3,2)^T$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 7.

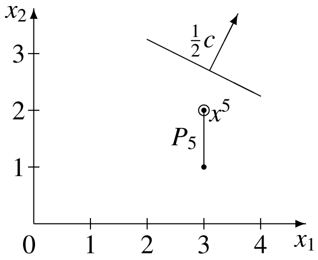
Узел 5: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 5:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 3, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^5 = (3,2)^T$,
оценка: $\gamma(5) = \lfloor 3 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_5 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 5:



- Т. к. решение x^5 целочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то меняем (устанавливаем) рекорд и рекордное решение, полагая $R = 7$ и $x^R = (3,2)^T$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 7.

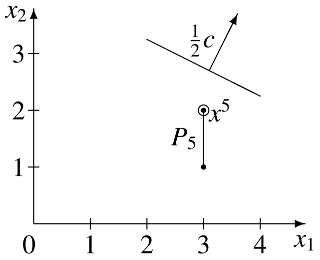
Узел 5: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 5:

$$
\begin{array}{rc}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 3, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^5 = (3,2)^T$, оценка: $\gamma(5) = \lfloor 3 + 2\cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_5 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 5:



- Т. к. решение x^5 целочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то меняем (устанавливаем) рекорд и рекордное решение, полагая $R = 7$ и $x^R = (3,2)^T$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 7.

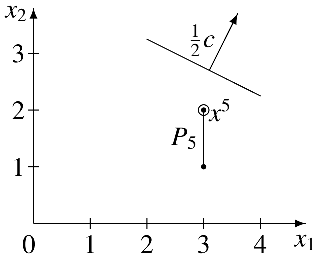
Узел 5: релаксационная задача

Релаксационная задача ЛП для узла 5:

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1 + 2x_2 \to \max, \\
1: & -2x_1 + 3x_2 \le 4, \\
2: & 2x_1 + 2x_2 \le 11, \\
3: & 3 \le x_1 \le 3, \\
4: & 1 \le x_2 \le 2.
\end{array}
$$

Опт. решение: $x^5 = (3,2)^T$, оценка: $\gamma(5) = \lfloor 3 + 2 \cdot 2 \rfloor = 7$.

Многогранник P_5 допустимых решений релаксационной задачи ЛП для узла 5:



- Т. к. решение x^5 целочисленно, а $\gamma(3) = 7 > -\infty = R$,
- то меняем (устанавливаем) рекорд и рекордное решение, полагая $R = 7$ и $x^R = (3,2)^T$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 7.

Оптимальное решение

- Нам не нужно решать задачу ЛП для узла 6, чей родительский узел 3 уже удален. Это объясняется тем, что оценка $\gamma(6)$ в узле 6 не может превосходить оценки родителя $\gamma(3) = 7$.
- Так как в дереве поиска нет неотсеченных листьев,
- то текущее рекордное решение $x^R = (3,2)^T$ оптимально.
- Ответ: оптимальное решение примера $x^* = (3,2)^T$.

Оптимальное решение

- Нам не нужно решать задачу ЛП для узла 6, чей родительский узел 3 уже удален. Это объясняется тем, что оценка $\gamma(6)$ в узле 6 не может превосходить оценки родителя $\gamma(3) = 7$.
- Так как в дереве поиска нет неотсеченных листьев,
- то текущее рекордное решение $x^R = (3, 2)^T$ оптимально.
- Ответ: оптимальное решение примера $x^* = (3, 2)^T$.

Оптимальное решение

- Нам не нужно решать задачу ЛП для узла 6, чей родительский узел 3 уже удален. Это объясняется тем, что оценка $\gamma(6)$ в узле 6 не может превосходить оценки родителя $\gamma(3) = 7$.
- Так как в дереве поиска нет неотсеченных листьев,
- то текущее рекордное решение $x^R = (3, 2)^T$ оптимально.
- Ответ: оптимальное решение примера $x^* = (3, 2)^T$.

Оптимальное решение

- Нам не нужно решать задачу ЛП для узла 6, чей родительский узел 3 уже удален. Это объясняется тем, что оценка $\gamma(6)$ в узле 6 не может превосходить оценки родителя $\gamma(3) = 7$.
- Так как в ▸ дереве поиска нет неотсеченных листьев,
- то текущее рекордное решение $x^R = (3, 2)^T$ оптимально.
- Ответ: оптимальное решение примера $x^* = (3, 2)^T$.

Дерево поиска

К узлу 0

К узлу 1

К узлу 2

К ветвл. узла 2

К узлу 3

К ветвл. узла 3

К узлу 5

К опт. решению

Пропустить

$\boxed{0}\ \gamma(0) = 8$	$R = -\infty$
$x^0 = (5/2, 3)$	
$1 \le x_1 \le 4$	
$1 \le x_2 \le 5$	

Дерево поиска

К узлу 0
К узлу 1
К узлу 2
К ветвл. узла 2
К узлу 3
К ветвл. узла 3
К узлу 5
К опт. решению
Пропустить

$\boxed{0}$ $\gamma(0) = 8$
$x^0 = (5/2, 3)$
$1 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 5$

$\boxed{1}$ $\gamma(1) = 7$
$x^1 = (2, 8/3)$
$1 \le x_1 \le 2$
$1 \le x_2 \le 5$

$R = -\infty$

Дерево поиска

◂ К узлу 0
◂ К узлу 1
◂ К узлу 2
◂ К ветвл. узла 2
◂ К узлу 3
◂ К ветвл. узла 3
◂ К узлу 5
◂ К опт. решению
▸ Пропустить

$\boxed{0}\ \gamma(0) = 8$
$x^0 = (5/2, 3)$
$1 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 5$

$R = -\infty$

$\boxed{1}\ \gamma(1) = 7$
$x^1 = (2, 8/3)$
$1 \le x_1 \le 2$
$1 \le x_2 \le 5$

$\boxed{2}\ \gamma(2) = 8$
$x^2 = (3, 5/2)$
$3 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 5$

Дерево поиска

◂ К узлу 0
◂ К узлу 1
◂ К узлу 2
◂ К ветвл. узла 2
◂ К узлу 3
◂ К ветвл. узла 3
◂ К узлу 5
◂ К опт. решению
▸ Пропустить

$R = -\infty$

Узел 0: $\gamma(0) = 8$, $x^0 = (5/2, 3)$
$1 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 5$

Узел 1: $\gamma(1) = 7$, $x^1 = (2, 8/3)$
$1 \le x_1 \le 2$
$1 \le x_2 \le 5$

Узел 2: $\gamma(2) = 8$, $x^2 = (3, 5/2)$
$3 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 5$

Узел 3: $\gamma(3) = 7$, $x^3 = (7/2, 2)$
$3 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 2$

Дерево поиска

◂ К узлу 0
◂ К узлу 1
◂ К узлу 2
◂ К ветвл. узла 2
◂ К узлу 3
◂ К ветвл. узла 3
◂ К узлу 5
◂ К опт. решению
▸ Пропустить

$\boxed{0}$ $\gamma(0) = 8$
$x^0 = (5/2, 3)$
$1 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 5$

$\boxed{1}$ $\gamma(1) = 7$
$x^1 = (2, 8/3)$
$1 \le x_1 \le 2$
$1 \le x_2 \le 5$

$\boxed{2}$ $\gamma(2) = 8$
$x^2 = (3, 5/2)$
$3 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 5$

$\boxed{3}$ $\gamma(3) = 7$
$x^3 = (7/2, 2)$
$3 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 2$

$R = 7$
$x^R = (3, 2)^T$

Дерево поиска

К узлу 0
К узлу 1
К узлу 2
К ветвл. узла 2
К узлу 3
К ветвл. узла 3
К узлу 5
К опт. решению
Пропустить

$\boxed{0}\ \gamma(0) = 8$
$x^0 = (5/2, 3)$
$1 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 5$

$R = 7$
$x^R = (3, 2)^T$

$\boxed{1}\ \gamma(1) = 7$
$x^1 = (2, 8/3)$
$1 \le x_1 \le 2$
$1 \le x_2 \le 5$

$\boxed{2}\ \gamma(2) = 8$
$x^2 = (3, 5/2)$
$3 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 5$

$\boxed{3}\ \gamma(3) = 7$
$x^3 = (7/2, 2)$
$3 \le x_1 \le 4$
$1 \le x_2 \le 2$

План лекции

1. Метод ветвей и границ
   - Дерево поиска
   - Числовой пример
2. Метод сечений
   - Двойственные отсечения Гомори
3. Метод ветвей и сечений
   - Описание метода
   - Числовой пример

Числовой пример

- Решить пример задачи ЦП:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\to \max,\\
3x_1 + 2x_2 &\le 9,\\
x_2 &\le 2,\\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ .
\end{aligned}
$$

- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^0 = (5/3, 2)^T$.

Многогранник ограничений:

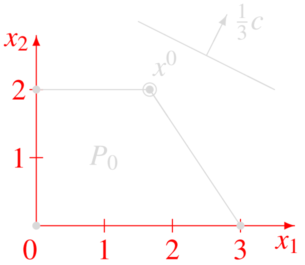
Числовой пример

- Решить пример задачи ЦП:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 9, \\ x_2 &\le 2, \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ . \end{aligned}$$

- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^0 = (5/3, 2)^T$.

Многогранник ограничений:



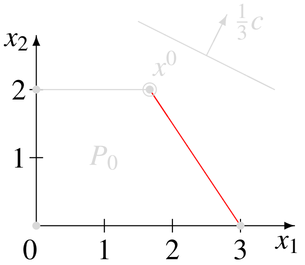
Числовой пример

- Решить пример задачи ЦП:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\to \max,\\
3x_1 + 2x_2 &\le 9,\\
x_2 &\le 2,\\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+\,.
\end{aligned}
$$

- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^0 = (5/3, 2)^T$.

Многогранник ограничений:



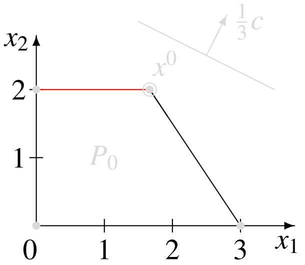
Числовой пример

- Решить пример задачи ЦП:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 9, \\ x_2 &\le 2, \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ . \end{aligned}$$

- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^0 = (5/3, 2)^T$.

Многогранник ограничений:



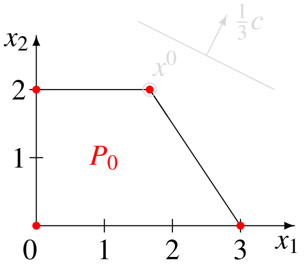
Числовой пример

- Решить пример задачи ЦП:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 9, \\ x_2 &\le 2, \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ . \end{aligned}$$

- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^0 = (5/3, 2)^T$.

Многогранник ограничений:



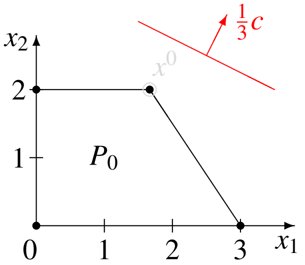
Числовой пример

- Решить пример задачи ЦП:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 9, \\ x_2 &\le 2, \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ . \end{aligned}$$

- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^0 = (5/3, 2)^T$.

Многогранник ограничений:



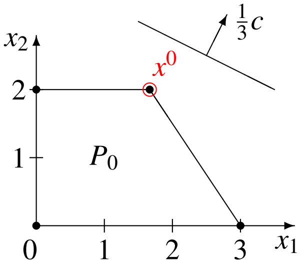
Числовой пример

- Решить пример задачи ЦП:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 9, \\ x_2 &\le 2, \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ . \end{aligned}$$

- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^0 = (5/3, 2)^T$.

Многогранник ограничений:



Отсечения

- Поскольку точка $x^0 = (5/3, 2)^T$ не является целочисленной, то она не является решением задачи ЦП.
- Идея метода сечений состоит в том, чтобы «отсечь» точку x^0 от множества

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^2_+ : \ 3x_1 + 2x_2 \le 9, \ x_2 \le 2\}$$

допустимых решений.
- Это означает, что к ограничениям задачи нужно добавить хотя бы одно *отсечение*,
- т. е. неравенство, которое нарушается в точке x^0 и которому удовлетворяют все точки из X.
- Существует несколько способов построить (сгенерировать) нужное неравенство.

Отсечения

- Поскольку точка $x^0 = (5/3, 2)^T$ не является целочисленной, то она не является решением задачи ЦП.
- Идея метода сечений состоит в том, чтобы «отсечь» точку x^0 от множества

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^2_+ :\ 3x_1 + 2x_2 \le 9,\ x_2 \le 2\}$$

допустимых решений.
- Это означает, что к ограничениям задачи нужно добавить хотя бы одно *отсечение*,
- т. е. неравенство, которое нарушается в точке x^0 и которому удовлетворяют все точки из X.
- Существует несколько способов построить (сгенерировать) нужное неравенство.

Отсечения

- Поскольку точка $x^0 = (5/3, 2)^T$ не является целочисленной, то она не является решением задачи ЦП.
- Идея метода сечений состоит в том, чтобы «отсечь» точку x^0 от множества

$$X = \{x \in \mathbb{Z}_+^2 : \ 3x_1 + 2x_2 \le 9, \ x_2 \le 2\}$$

допустимых решений.
- Это означает, что к ограничениям задачи нужно добавить хотя бы одно *отсечение*,
- т. е. неравенство, которое нарушается в точке x^0 и которому удовлетворяют все точки из X.
- Существует несколько способов построить (сгенерировать) нужное неравенство.

Отсечения

- Поскольку точка $x^0 = (5/3, 2)^T$ не является целочисленной, то она не является решением задачи ЦП.
- Идея метода сечений состоит в том, чтобы «отсечь» точку x^0 от множества

$$X = \{x \in \mathbb{Z}_+^2 : \; 3x_1 + 2x_2 \le 9, \; x_2 \le 2\}$$

допустимых решений.

- Это означает, что к ограничениям задачи нужно добавить хотя бы одно *отсечение*,
- т. е. неравенство, которое нарушается в точке x^0 и которому удовлетворяют все точки из X.
- Существует несколько способов построить (сгенерировать) нужное неравенство.

Отсечения

- Поскольку точка $x^0 = (5/3, 2)^T$ не является целочисленной, то она не является решением задачи ЦП.
- Идея метода сечений состоит в том, чтобы «отсечь» точку x^0 от множества
$$X = \{x \in \mathbb{Z}^2_+ : \; 3x_1 + 2x_2 \le 9, \; x_2 \le 2\}$$
допустимых решений.
- Это означает, что к ограничениям задачи нужно добавить хотя бы одно *отсечение*,
- т. е. неравенство, которое нарушается в точке x^0 и которому удовлетворяют все точки из X.
- Существует несколько способов построить (сгенерировать) нужное неравенство.

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \le 9$ и $x_2 \le 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \le 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \le 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \le 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \le 9$ и $x_2 \le 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \le 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \le 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \le 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \le 9$ и $x_2 \le 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \le 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \le 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \le 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \le 9$ и $x_2 \le 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \le 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \le 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \le 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \le 9$ и $x_2 \le 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \le 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \le 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \le 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \leq 9$ и $x_2 \leq 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \leq 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \leq 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \leq 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \le 9$ и $x_2 \le 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \le 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \le 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \le 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \le 9$ и $x_2 \le 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \le 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \le 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \le 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \leq 9$ и $x_2 \leq 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \leq 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \leq 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \leq 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \le 9$ и $x_2 \le 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \le 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \le 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \le 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \le 9$ и $x_2 \le 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$3x_1 + 2x_2 + x_2 \le 9 + 2 - 1,$$

$$\text{или} \quad 3x_1 + 3x_2 \le 10$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

$$x_1 + x_2 \le 10/3$$

Двойственные отсечения Гомори

- Здесь мы отсечем точку $x^0 = (5/3, 2)^T$, исходя из простого соображения, что
- оба неравенства $3x_1 + 2x_2 \le 9$ и $x_2 \le 2$ одновременно не могут выполняться как равенства в точках множества X.
- Поэтому неравенство

$$
\begin{aligned}
& 3x_1 + 2x_2 + x_2 \le 9 + 2 - 1, \\
\text{или} \quad & 3x_1 + 3x_2 \le 10
\end{aligned}
$$

справедливо для X, но не для x^0:

$$3 \cdot (5/3) + 3 \cdot 2 = 11 > 10.$$

- Мы можем усилить полученное неравенство, если
- сначала разделим его на 3, а затем округлим правую часть:

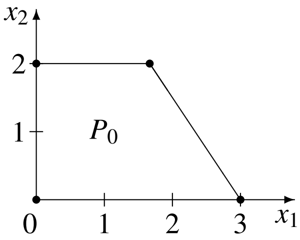
$$x_1 + x_2 \le \lfloor 10/3 \rfloor = 3.$$

Добавляем отсечение

- Исходная задача:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\to \max,\\
3x_1 + 2x_2 &\le 9,\\
x_2 &\le 2,\\
x_1 + x_2 &\le 3,\\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ .
\end{aligned}
$$

Многогранник ограничений:



- Добавим отсечение $x_1 + x_2 \le 3$.
- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^1 = (1, 2)^T$.

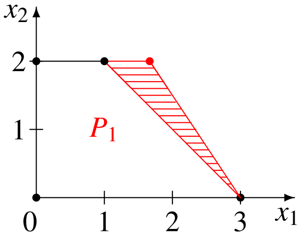
Так как $x^1 = (1, 2)^T$ целочисленно, то это опт. решение.

Добавляем отсечение

- Исходная задача:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 &+& 2x_2 &\to& \max, \\ 3x_1 &+& 2x_2 &\le& 9, \\ && x_2 &\le& 2, \\ x_1 &+& x_2 &\le& 3, \\ && x_1, x_2 &\in& \mathbb{Z}_+ . \end{array}$$

Многогранник ограничений:



- Добавим отсечение $x_1 + x_2 \le 3$.
- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^1 = (1,2)^T$.

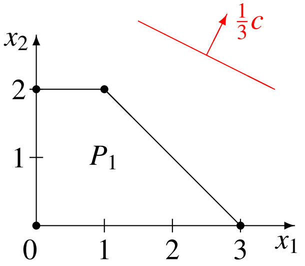
Так как $x^1 = (1,2)^T$ целочисленно, то это опт. решение.

Добавляем отсечение

- Исходная задача:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \to & \max, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \le & 9, \\ & & x_2 & \le & 2, \\ x_1 & + & x_2 & \le & 3, \\ & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}_+ . \end{array}$$

Многогранник ограничений:



- Добавим отсечение $x_1 + x_2 \le 3$.
- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^1 = (1,2)^T$.

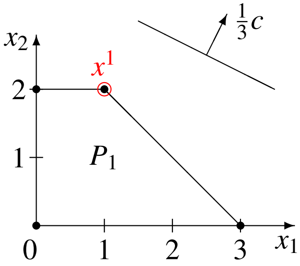
Так как $x^1 = (1,2)^T$ целочисленно, то это опт. решение.

Добавляем отсечение

- Исходная задача:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \to & \max, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \le & 9, \\ & & x_2 & \le & 2, \\ x_1 & + & x_2 & \le & 3, \\ & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}_+ . \end{array}$$

Многогранник ограничений:



- Добавим отсечение $x_1 + x_2 \le 3$.
- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^1 = (1,2)^T$.

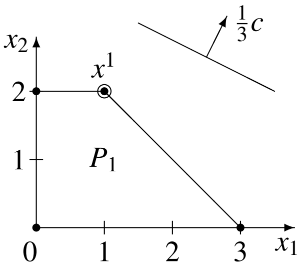
Так как $x^1 = (1,2)^T$ целочисленно, то это опт. решение.

Добавляем отсечение

- Исходная задача:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \to & \max, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \le & 9, \\ & & x_2 & \le & 2, \\ x_1 & + & x_2 & \le & 3, \\ & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}_+ . \end{array}$$

Многогранник ограничений:



- Добавим отсечение $x_1 + x_2 \le 3$.
- Решаем релаксационную задачу ЛП.
- Ее решение $x^1 = (1,2)^T$.

Так как $x^1 = (1,2)^T$ целочисленно, то это опт. решение.

План лекции

1. Метод ветвей и границ
   - Дерево поиска
   - Числовой пример
2. Метод сечений
   - Двойственные отсечения Гомори
3. Метод ветвей и сечений
   - Описание метода
   - Числовой пример

Метод ветвей и сечений

- *Метод ветвей и сечений* — это метод ветвей и границ,
- в котором отсечения генерируются при решении релаксационной задачи ЛП во всех (или только некоторых) узлах дерева поиска.
- В отличие от «чистых» методов сечений, мы теперь не надеемся, что одних отсечений будет достаточно для получения оптимального решения.
- Заметим также, что раньше, как правило, генерировалось только одно неравенство, отсекающее текущее дробное решение.
- Сегодня такой способ считается плохим, отсечения теперь добавляются группами из многих неравенств.

Метод ветвей и сечений

- *Метод ветвей и сечений* — это метод ветвей и границ,
- в котором отсечения генерируются при решении релаксационной задачи ЛП во всех (или только некоторых) узлах дерева поиска.
- В отличие от «чистых» методов сечений, мы теперь не надеемся, что одних отсечений будет достаточно для получения оптимального решения.
- Заметим также, что раньше, как правило, генерировалось только одно неравенство, отсекающее текущее дробное решение.
- Сегодня такой способ считается плохим, отсечения теперь добавляются группами из многих неравенств.

Метод ветвей и сечений

- *Метод ветвей и сечений* — это метод ветвей и границ,
- в котором отсечения генерируются при решении релаксационной задачи ЛП во всех (или только некоторых) узлах дерева поиска.
- В отличие от «чистых» методов сечений, мы теперь не надеемся, что одних отсечений будет достаточно для получения оптимального решения.
- Заметим также, что раньше, как правило, генерировалось только одно неравенство, отсекающее текущее дробное решение.
- Сегодня такой способ считается плохим, отсечения теперь добавляются группами из многих неравенств.

Метод ветвей и сечений

- *Метод ветвей и сечений* — это метод ветвей и границ,
- в котором отсечения генерируются при решении релаксационной задачи ЛП во всех (или только некоторых) узлах дерева поиска.
- В отличие от «чистых» методов сечений, мы теперь не надеемся, что одних отсечений будет достаточно для получения оптимального решения.
- Заметим также, что раньше, как правило, генерировалось только одно неравенство, отсекающее текущее дробное решение.
- Сегодня такой способ считается плохим, отсечения теперь добавляются группами из многих неравенств.

Метод ветвей и сечений

- *Метод ветвей и сечений* — это метод ветвей и границ,
- в котором отсечения генерируются при решении релаксационной задачи ЛП во всех (или только некоторых) узлах дерева поиска.
- В отличие от «чистых» методов сечений, мы теперь не надеемся, что одних отсечений будет достаточно для получения оптимального решения.
- Заметим также, что раньше, как правило, генерировалось только одно неравенство, отсекающее текущее дробное решение.
- Сегодня такой способ считается плохим, отсечения теперь добавляются группами из многих неравенств.

Разрыв двойственности

- Две величины определяют поведение метода ветвей и сечений (равно как и метода ветвей и границ) — это нижняя граница (рекорд) и верхние границы (оптимальные значения целевых функций для релаксационных задач ЛП) в узлах дерева поиска.
- Добавление отсечений способствует уменьшению верхних границ.
- Если в методе ветвей и границ при обработке очередного узла дерева поиска главной целью было поскорее решить соответствующую ему релаксационную задачу ЛП,
- то теперь мы выполняем существенно большую работу в каждом узле, генерируя отсечения с целью минимизировать верхнюю границу.
- При этом *разрыв двойственности* (разность между верхней и нижней границей) в узле также уменьшается.

Разрыв двойственности

- Две величины определяют поведение метода ветвей и сечений (равно как и метода ветвей и границ) — это нижняя граница (рекорд) и верхние границы (оптимальные значения целевых функций для релаксационных задач ЛП) в узлах дерева поиска.
- Добавление отсечений способствует уменьшению верхних границ.
- Если в методе ветвей и границ при обработке очередного узла дерева поиска главной целью было поскорее решить соответствующую ему релаксационную задачу ЛП,
- то теперь мы выполняем существенно большую работу в каждом узле, генерируя отсечения с целью минимизировать верхнюю границу.
- При этом *разрыв двойственности* (разность между верхней и нижней границей) в узле также уменьшается.

Разрыв двойственности

- Две величины определяют поведение метода ветвей и сечений (равно как и метода ветвей и границ) — это нижняя граница (рекорд) и верхние границы (оптимальные значения целевых функций для релаксационных задач ЛП) в узлах дерева поиска.
- Добавление отсечений способствует уменьшению верхних границ.
- Если в методе ветвей и границ при обработке очередного узла дерева поиска главной целью было поскорее решить соответствующую ему релаксационную задачу ЛП,
- то теперь мы выполняем существенно большую работу в каждом узле, генерируя отсечения с целью минимизировать верхнюю границу.
- При этом *разрыв двойственности* (разность между верхней и нижней границей) в узле также уменьшается.

Разрыв двойственности

- Две величины определяют поведение метода ветвей и сечений (равно как и метода ветвей и границ) — это нижняя граница (рекорд) и верхние границы (оптимальные значения целевых функций для релаксационных задач ЛП) в узлах дерева поиска.
- Добавление отсечений способствует уменьшению верхних границ.
- Если в методе ветвей и границ при обработке очередного узла дерева поиска главной целью было поскорее решить соответствующую ему релаксационную задачу ЛП,
- то теперь мы выполняем существенно большую работу в каждом узле, генерируя отсечения с целью минимизировать верхнюю границу.
- При этом *разрыв двойственности* (разность между верхней и нижней границей) в узле также уменьшается.

Разрыв двойственности

- Две величины определяют поведение метода ветвей и сечений (равно как и метода ветвей и границ) — это нижняя граница (рекорд) и верхние границы (оптимальные значения целевых функций для релаксационных задач ЛП) в узлах дерева поиска.
- Добавление отсечений способствует уменьшению верхних границ.
- Если в методе ветвей и границ при обработке очередного узла дерева поиска главной целью было поскорее решить соответствующую ему релаксационную задачу ЛП,
- то теперь мы выполняем существенно большую работу в каждом узле, генерируя отсечения с целью минимизировать верхнюю границу.
- При этом *разрыв двойственности* (разность между верхней и нижней границей) в узле также уменьшается.

Разрыв двойственности

- Две величины определяют поведение метода ветвей и сечений (равно как и метода ветвей и границ) — это нижняя граница (рекорд) и верхние границы (оптимальные значения целевых функций для релаксационных задач ЛП) в узлах дерева поиска.
- Добавление отсечений способствует уменьшению верхних границ.
- Если в методе ветвей и границ при обработке очередного узла дерева поиска главной целью было поскорее решить соответствующую ему релаксационную задачу ЛП,
- то теперь мы выполняем существенно большую работу в каждом узле, генерируя отсечения с целью минимизировать верхнюю границу.
- При этом *разрыв двойственности* (разность между верхней и нижней границей) в узле также уменьшается.

Разрыв двойственности

- Две величины определяют поведение метода ветвей и сечений (равно как и метода ветвей и границ) — это нижняя граница (рекорд) и верхние границы (оптимальные значения целевых функций для релаксационных задач ЛП) в узлах дерева поиска.
- Добавление отсечений способствует уменьшению верхних границ.
- Если в методе ветвей и границ при обработке очередного узла дерева поиска главной целью было поскорее решить соответствующую ему релаксационную задачу ЛП,
- то теперь мы выполняем существенно большую работу в каждом узле, генерируя отсечения с целью минимизировать верхнюю границу.
- При этом *разрыв двойственности* (разность между верхней и нижней границей) в узле также уменьшается.

Генерирование отсечений

- На практике очень важно определить момент, когда нужно прекратить генерировать новые отсечения и приступить к ветвлению.
- Если добавляется много отсечений в каждом узле, то на дооптимизацию узловых задач ЛП может потребоваться существенно большее время.
- Разумная стратегия состоит в том, чтобы следить за тем, как сокращается разрыв двойственности.
- Если прогресса нет на протяжении нескольких раундов, то самое время остановиться.

Генерирование отсечений

- На практике очень важно определить момент, когда нужно прекратить генерировать новые отсечения и приступить к ветвлению.
- Если добавляется много отсечений в каждом узле, то на дооптимизацию узловых задач ЛП может потребоваться существенно большее время.
- Разумная стратегия состоит в том, чтобы следить за тем, как сокращается разрыв двойственности.
- Если прогресса нет на протяжении нескольких раундов, то самое время остановиться.

Генерирование отсечений

- На практике очень важно определить момент, когда нужно прекратить генерировать новые отсечения и приступить к ветвлению.
- Если добавляется много отсечений в каждом узле, то на дооптимизацию узловых задач ЛП может потребоваться существенно большее время.
- Разумная стратегия состоит в том, чтобы следить за тем, как сокращается разрыв двойственности.
- Если прогресса нет на протяжении нескольких раундов, то самое время остановиться.

Генерирование отсечений

- На практике очень важно определить момент, когда нужно прекратить генерировать новые отсечения и приступить к ветвлению.
- Если добавляется много отсечений в каждом узле, то на дооптимизацию узловых задач ЛП может потребоваться существенно большее время.
- Разумная стратегия состоит в том, чтобы следить за тем, как сокращается разрыв двойственности.
- Если прогресса нет на протяжении нескольких раундов, то самое время остановиться.

Узловые эвристики

- Другой способ сократить разрыв двойственности в узле состоит в применении узловых эвристик с целью увеличить нижнюю границу (рекорд).
- Идея *узловой эвристики* проста. Прежде чем приступать к ветвлению в конкретном узле, можно попробовать «округлить» оптимальное решение задачи ЛП в данном узле.
- Обычно округление состоит в выполнении некоторого типа «ныряния», когда
  - фиксируются значения группы целочисленных переменных с почти целыми значениями,
  - решается полученная задача ЛП,
  - затем фиксируется еще одна группа переменных,
  - и так до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или фиксирование переменных приведет к недопустимости.

Узловые эвристики

- Другой способ сократить разрыв двойственности в узле состоит в применении узловых эвристик с целью увеличить нижнюю границу (рекорд).
- Идея *узловой эвристики* проста. Прежде чем приступать к ветвлению в конкретном узле, можно попробовать «округлить» оптимальное решение задачи ЛП в данном узле.
- Обычно округление состоит в выполнении некоторого типа «ныряния», когда
  - фиксируются значения группы целочисленных переменных с почти целыми значениями,
  - решается полученная задача ЛП,
  - затем фиксируется еще одна группа переменных,
  - и так до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или фиксирование переменных приведет к недопустимости.

Узловые эвристики

- Другой способ сократить разрыв двойственности в узле состоит в применении узловых эвристик с целью увеличить нижнюю границу (рекорд).
- Идея *узловой эвристики* проста. Прежде чем приступать к ветвлению в конкретном узле, можно попробовать «округлить» оптимальное решение задачи ЛП в данном узле.
- Обычно округление состоит в выполнении некоторого типа «ныряния», когда
  - фиксируются значения группы целочисленных переменных с почти целыми значениями,
  - решается полученная задача ЛП,
  - затем фиксируется еще одна группа переменных,
  - и так до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или фиксирование переменных приведет к недопустимости.

Узловые эвристики

- Другой способ сократить разрыв двойственности в узле состоит в применении узловых эвристик с целью увеличить нижнюю границу (рекорд).
- Идея *узловой эвристики* проста. Прежде чем приступать к ветвлению в конкретном узле, можно попробовать «округлить» оптимальное решение задачи ЛП в данном узле.
- Обычно округление состоит в выполнении некоторого типа «ныряния», когда
  - фиксируются значения группы целочисленных переменных с почти целыми значениями,
  - решается полученная задача ЛП,
  - затем фиксируется еще одна группа переменных,
  - и так до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или фиксирование переменных приведет к недопустимости.

Узловые эвристики

- Другой способ сократить разрыв двойственности в узле состоит в применении узловых эвристик с целью увеличить нижнюю границу (рекорд).
- Идея *узловой эвристики* проста. Прежде чем приступать к ветвлению в конкретном узле, можно попробовать «округлить» оптимальное решение задачи ЛП в данном узле.
- Обычно округление состоит в выполнении некоторого типа «ныряния», когда
  - фиксируются значения группы целочисленных переменных с почти целыми значениями,
  - решается полученная задача ЛП,
  - затем фиксируется еще одна группа переменных,
  - и так до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или фиксирование переменных приведет к недопустимости.

Узловые эвристики

- Другой способ сократить разрыв двойственности в узле состоит в применении узловых эвристик с целью увеличить нижнюю границу (рекорд).
- Идея *узловой эвристики* проста. Прежде чем приступать к ветвлению в конкретном узле, можно попробовать «округлить» оптимальное решение задачи ЛП в данном узле.
- Обычно округление состоит в выполнении некоторого типа «ныряния», когда
    - фиксируются значения группы целочисленных переменных с почти целыми значениями,
    - решается полученная задача ЛП,
    - затем фиксируется еще одна группа переменных,
    - и так до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или фиксирование переменных приведет к недопустимости.

Узловые эвристики

- Другой способ сократить разрыв двойственности в узле состоит в применении узловых эвристик с целью увеличить нижнюю границу (рекорд).
- Идея *узловой эвристики* проста. Прежде чем приступать к ветвлению в конкретном узле, можно попробовать «округлить» оптимальное решение задачи ЛП в данном узле.
- Обычно округление состоит в выполнении некоторого типа «ныряния», когда
  - фиксируются значения группы целочисленных переменных с почти целыми значениями,
  - решается полученная задача ЛП,
  - затем фиксируется еще одна группа переменных,
  - и так до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или фиксирование переменных приведет к недопустимости.

Узловые эвристики

- Другой способ сократить разрыв двойственности в узле состоит в применении узловых эвристик с целью увеличить нижнюю границу (рекорд).
- Идея *узловой эвристики* проста. Прежде чем приступать к ветвлению в конкретном узле, можно попробовать «округлить» оптимальное решение задачи ЛП в данном узле.
- Если таким образом удастся увеличить нижнюю границу (будет получено целочисленное решение, лучшее рекордного),
- то это может позволить отсеять некоторые активные узлы дерева поиска и тем самым ускорить решение всей задачи.

Узловые эвристики

- Другой способ сократить разрыв двойственности в узле состоит в применении узловых эвристик с целью увеличить нижнюю границу (рекорд).
- Идея *узловой эвристики* проста. Прежде чем приступать к ветвлению в конкретном узле, можно попробовать «округлить» оптимальное решение задачи ЛП в данном узле.
- Если таким образом удастся увеличить нижнюю границу (будет получено целочисленное решение, лучшее рекордного),
- то это может позволить отсеять некоторые активные узлы дерева поиска и тем самым ускорить решение всей задачи.

План лекции

Рюкзачные неравенства

- Для решения числового примера нам нужно ввести один специальный тип отсечений, которые справедливы для *рюкзачных множеств*

$$X = \{x \in \{0,1\}^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j \le b\},$$

- где все параметры a_j $(j = 1, \dots, n)$ и b положительные числа.
- Подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется *рюкзачным покрытием*, если $\sum_{j \in I} a_j > b$.
- Для любого рюкзачного покрытия I неравенство

$$\sum_{j \in I} x_j \le |I| - 1$$

- *справедливо* для множества X (любая точка из X удовлетворяет этому неравенству).
- Такие неравенства называют *рюкзачными*.

Рюкзачные неравенства

- Для решения числового примера нам нужно ввести один специальный тип отсечений, которые справедливы для *рюкзачных множеств*

$$X = \{x \in \{0,1\}^n : \textstyle\sum_{j=1}^n a_j x_j \le b\},$$

- где все параметры a_j $(j = 1, \dots, n)$ и b положительные числа.
- Подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется *рюкзачным покрытием*, если $\sum_{j \in I} a_j > b$.
- Для любого рюкзачного покрытия I неравенство

$$\sum_{j \in I} x_j \le |I| - 1$$

- *справедливо* для множества X (любая точка из X удовлетворяет этому неравенству).
- Такие неравенства называют *рюкзачными*.

Рюкзачные неравенства

- Для решения числового примера нам нужно ввести один специальный тип отсечений, которые справедливы для *рюкзачных множеств*
$$X = \{x \in \{0,1\}^n : \textstyle\sum_{j=1}^n a_j x_j \le b\},$$
- где все параметры a_j $(j = 1, \dots, n)$ и b положительные числа.
- Подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется *рюкзачным покрытием*, если $\sum_{j \in I} a_j > b$.
- Для любого рюкзачного покрытия I неравенство
$$\sum_{j \in I} x_j \le |I| - 1$$
- *справедливо* для множества X (любая точка из X удовлетворяет этому неравенству).
- Такие неравенства называют *рюкзачными*.

Рюкзачные неравенства

- Для решения числового примера нам нужно ввести один специальный тип отсечений, которые справедливы для *рюкзачных множеств*

$$X = \{x \in \{0,1\}^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j \le b\},$$

- где все параметры a_j $(j = 1, \dots, n)$ и b положительные числа.
- Подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется *рюкзачным покрытием*, если $\sum_{j \in I} a_j > b$.
- Для любого рюкзачного покрытия I неравенство

$$\sum_{j \in I} x_j \le |I| - 1$$

- *справедливо* для множества X (любая точка из X удовлетворяет этому неравенству).
- Такие неравенства называют *рюкзачными*.

Рюкзачные неравенства

- Для решения числового примера нам нужно ввести один специальный тип отсечений, которые справедливы для *рюкзачных множеств*
$$X = \{x \in \{0,1\}^n : \textstyle\sum_{j=1}^n a_j x_j \le b\},$$
- где все параметры a_j $(j = 1, \dots, n)$ и b положительные числа.
- Подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется *рюкзачным покрытием*, если $\sum_{j \in I} a_j > b$.
- Для любого рюкзачного покрытия I неравенство
$$\sum_{j \in I} x_j \le |I| - 1$$
- *справедливо* для множества X (любая точка из X удовлетворяет этому неравенству).
- Такие неравенства называют *рюкзачными*.

Рюкзачные неравенства

- Для решения числового примера нам нужно ввести один специальный тип отсечений, которые справедливы для *рюкзачных множеств*
$$X = \{x \in \{0,1\}^n : \textstyle\sum_{j=1}^n a_j x_j \le b\},$$
- где все параметры a_j $(j = 1, \dots, n)$ и b положительные числа.
- Подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется *рюкзачным покрытием*, если $\sum_{j \in I} a_j > b$.
- Для любого рюкзачного покрытия I неравенство
$$\sum_{j \in I} x_j \le |I| - 1$$
- *справедливо* для множества X (любая точка из X удовлетворяет этому неравенству).
- Такие неравенства называют *рюкзачными.*

Рюкзачные неравенства

- Для решения числового примера нам нужно ввести один специальный тип отсечений, которые справедливы для *рюкзачных множеств*

$$X = \{x \in \{0,1\}^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j \le b\},$$

- где все параметры a_j $(j = 1, \dots, n)$ и b положительные числа.
- Подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется *рюкзачным покрытием*, если $\sum_{j \in I} a_j > b$.
- Для любого рюкзачного покрытия I неравенство

$$\sum_{j \in I} x_j \le |I| - 1$$

- *справедливо* для множества X (любая точка из X удовлетворяет этому неравенству).
- Такие неравенства называют *рюкзачными*.

Рюкзачные неравенства

- Для решения числового примера нам нужно ввести один специальный тип отсечений, которые справедливы для *рюкзачных множеств*
$$X = \{x \in \{0,1\}^n : \textstyle\sum_{j=1}^n a_j x_j \le b\},$$
- где все параметры a_j $(j = 1, \dots, n)$ и b положительные числа.
- Подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется *рюкзачным покрытием*, если $\sum_{j \in I} a_j > b$.
- Для любого рюкзачного покрытия I неравенство
$$\sum_{j \in I} x_j \le |I| - 1$$
- *справедливо* для множества X (любая точка из X удовлетворяет этому неравенству).
- Такие неравенства называют *рюкзачными*.

Рюкзачные неравенства

- Для решения числового примера нам нужно ввести один специальный тип отсечений, которые справедливы для *рюкзачных множеств*
$$X = \{x \in \{0,1\}^n : \textstyle\sum_{j=1}^n a_j x_j \le b\},$$
- где все параметры a_j $(j = 1, \dots, n)$ и b положительные числа.
- Подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется *рюкзачным покрытием*, если $\sum_{j \in I} a_j > b$.
- Для любого рюкзачного покрытия I неравенство
$$\sum_{j \in I} x_j \le |I| - 1$$
- *справедливо* для множества X (любая точка из X удовлетворяет этому неравенству).
- Такие неравенства называют *рюкзачными.*

Пример

Решим следующую задачу ЦП:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.
\end{aligned}$$

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &\to \max, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9, \\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1. \end{aligned}$$

- Ее решение есть точка $x^1 = (0, 1, 0, 3/5)^T$.
- Она не удовлетворяет неравенству $x_2 + x_4 \le 1$,
- для покрытия $C_1^1 = \{2, 4\}$ 1-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &\to \max, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9, \\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1. \end{aligned}$$

- Ее решение есть точка $x^1 = (0, 1, 0, 3/5)^T$.
- Она не удовлетворяет неравенству $x_2 + x_4 \le 1$,
- для покрытия $C_1^1 = \{2, 4\}$ 1-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9, \\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1. \end{aligned}$$

- Ее решение есть точка $x^1 = (0, 1, 0, 3/5)^T$.
- Она не удовлетворяет неравенству $x_2 + x_4 \le 1$,
- для покрытия $C_1^1 = \{2, 4\}$ 1-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &\to \max, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9, \\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1. \\ x_2 \qquad\quad + \ x_4 &\le 1, \end{aligned}$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, получим новое решение $x^2 = (1/3, 1, 5/9, 0)^T$,
- которое не удовлетворяет неравенству $x_1 + x_2 \le 1$
- для покрытия $C_2^1 = \{1, 2\}$ 1-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9, \\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1. \\ x_2 \qquad\quad + \; x_4 &\le 1, \end{aligned}$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, получим новое решение $x^2 = (1/3, 1, 5/9, 0)^T$,
- которое не удовлетворяет неравенству $x_1 + x_2 \le 1$
- для покрытия $C_2^1 = \{1, 2\}$ 1-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + \ x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 \qquad\quad + \ x_4 &\le 1,
\end{aligned}$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, получим новое решение $x^2 = (1/3, 1, 5/9, 0)^T$,
- которое не удовлетворяет неравенству $x_1 + x_2 \le 1$
- для покрытия $C_2^1 = \{1, 2\}$ 1-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &\to \max, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9, \\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1. \\ x_2 \qquad\quad + \ \ x_4 &\le 1, \end{aligned}$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, получим новое решение $x^2 = (1/3, 1, 5/9, 0)^T$,
- которое не удовлетворяет неравенству $x_1 + x_2 \le 1$
- для покрытия $C_2^1 = \{1, 2\}$ 1-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9, \\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1. \\ x_2 + x_4 &\le 1, \\ x_1 + x_2 &\le 1, \end{aligned}$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, находим решение $x^3 = (0, 1, 5/6, 0)^T$, которое
- нарушает неравенство $x_2 + x_3 \le 1$
- для покрытия $C_1^2 = \{2, 3\}$ 2-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 \qquad\qquad + \ x_4 &\le 1,\\
x_1 + \ x_2 \qquad\qquad\qquad &\le 1,
\end{aligned}
$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, находим решение $x^3 = (0, 1, 5/6, 0)^T$, которое
- нарушает неравенство $x_2 + x_3 \le 1$
- для покрытия $C_1^2 = \{2, 3\}$ 2-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 \qquad\quad + \ \ x_4 &\le 1,\\
x_1 + \ \ x_2 \qquad\qquad\quad &\le 1,
\end{aligned}
$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, находим решение $x^3 = (0, 1, 5/6, 0)^T$, которое
- нарушает неравенство $x_2 + x_3 \le 1$
- для покрытия $C_1^2 = \{2, 3\}$ 2-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + {\color{red}4}x_2 + {\color{red}6}x_3 + 2x_4 &\le {\color{red}9},\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 \qquad\quad + \; x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad &\le 1,
\end{aligned}
$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, находим решение $x^3 = (0, 1, 5/6, 0)^T$, которое
- нарушает неравенство $x_2 + x_3 \le 1$
- для покрытия $C_1^2 = \{2, 3\}$ 2-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 + x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 &\le 1,\\
x_2 + x_3 &\le 1,
\end{aligned}$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, находим решение $x^4 = (5/9, 4/9, 5/9, 5/9)^T$,
- которое не удовлетворяет неравенству $x_1 + x_3 \le 1$
- для покрытия $C_2^2 = \{1, 3\}$ 2-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 + x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 &\le 1,\\
x_2 + x_3 &\le 1,
\end{aligned}$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, находим решение $x^4 = (5/9, 4/9, 5/9, 5/9)^T$,
- которое не удовлетворяет неравенству $x_1 + x_3 \le 1$
- для покрытия $C_2^2 = \{1, 3\}$ 2-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\ x_2 + x_4 &\le 1,\\ x_1 + x_2 &\le 1,\\ x_2 + x_3 &\le 1, \end{aligned}$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, находим решение $x^4 = (5/9, 4/9, 5/9, 5/9)^T$,
- которое не удовлетворяет неравенству $x_1 + x_3 \le 1$
- для покрытия $C_2^2 = \{1, 3\}$ 2-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9, \\ 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1. \\ x_2 + x_4 &\le 1, \\ x_1 + x_2 &\le 1, \\ x_2 + x_3 &\le 1, \end{aligned}$$

- Добавив это неравенство
- и выполнив дооптимизацию, находим решение $x^4 = (5/9, 4/9, 5/9, 5/9)^T$,
- которое не удовлетворяет неравенству $x_1 + x_3 \le 1$
- для покрытия $C_2^2 = \{1, 3\}$ 2-го рюкзачного неравенства.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 + x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 &\le 1,\\
x_2 + x_3 &\le 1,\\
x_1 + x_3 &\le 1.
\end{aligned}$$

- После добавления очередного неравенства,
- дооптимизация дает решение $x^5 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T$,
- которое удовлетворяет всем рюкзачным неравенствам.
- Добавим ‣ к дереву поиска корневой узел 0 с оценкой $\gamma(0) = \lfloor 1/2 + 3/2 + 1/2 + 2/2 \rfloor = 3$.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 + x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 &\le 1,\\
x_2 + x_3 &\le 1,\\
x_1 + x_3 &\le 1.
\end{aligned}
$$

- После добавления очередного неравенства,
- дооптимизация дает решение $x^5 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T$,
- которое удовлетворяет всем рюкзачным неравенствам.
- Добавим ▸ к дереву поиска корневой узел 0 с оценкой $\gamma(0) = \lfloor 1/2 + 3/2 + 1/2 + 2/2 \rfloor = 3$.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 + x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 &\le 1,\\
x_2 + x_3 &\le 1,\\
x_1 + x_3 &\le 1.
\end{aligned}$$

- После добавления очередного неравенства,
- дооптимизация дает решение $x^5 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T$,
- которое удовлетворяет всем рюкзачным неравенствам.
- Добавим к дереву поиска корневой узел 0 с оценкой $\gamma(0) = \lfloor 1/2 + 3/2 + 1/2 + 2/2 \rfloor = 3$.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 & \to & \max, \\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 & \le & 10, \\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 & \le & 9, \\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 1. & & \\
x_2 + x_4 & \le & 1, \\
x_1 + x_2 & \le & 1, \\
x_2 + x_3 & \le & 1, \\
x_1 + x_3 & \le & 1.
\end{array}
$$

- После добавления очередного неравенства,
- дооптимизация дает решение $x^5 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T$,
- которое удовлетворяет всем рюкзачным неравенствам.
- Добавим к дереву поиска корневой узел 0 с оценкой $\gamma(0) = \lfloor 1/2 + 3/2 + 1/2 + 2/2 \rfloor = 3$.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 \qquad\quad + \ \ x_4 &\le 1,\\
x_1 + \ \ x_2 \qquad\qquad\qquad &\le 1,\\
x_2 + \ \ x_3 \qquad\quad &\le 1,\\
x_1 + \qquad\quad x_3 \qquad\quad &\le 1.
\end{aligned}
$$

- Переходим к ветвлению, которое выполним по переменной x_1:
- $x_1 = 0$
- или $x_1 = 1$.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max, \\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10, \\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9, \\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1. \\
x_2 + x_4 &\le 1, \\
x_1 + x_2 &\le 1, \\
x_2 + x_3 &\le 1, \\
x_1 + x_3 &\le 1.
\end{aligned}
$$

- Переходим к ветвлению, которое выполним по переменной x_1:
- $x_1 = 0$
- или $x_1 = 1$.

Узел 0

Сначала решаем релаксационную задачу ЛП

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 + x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 &\le 1,\\
x_2 + x_3 &\le 1,\\
x_1 + x_3 &\le 1.
\end{aligned}
$$

- Переходим к ветвлению, которое выполним по переменной x_1:
- $x_1 = 0$
- или $x_1 = 1$.

Ветвь $x_1 = 0$

Решаем релаксационную задачу для ветви $x_1 = 0$:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 + x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 &\le 1,\\
x_2 + x_3 &\le 1,\\
x_1 + x_3 &\le 1,\\
x_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

Ветвь $x_1 = 0$

Решаем релаксационную задачу для ветви $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 + x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 &\le 1,\\
x_2 + x_3 &\le 1,\\
x_1 + x_3 &\le 1,\\
x_1 &= 0,
\end{aligned}$$

- Ее целочисленное решение $x^6 = (0, 0, 1, 1)^T$ объявляется в качестве рекордного решения x^R,
- рекорд устанавливаем равным $R = c^T x^R = 3$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 3.

Ветвь $x_1 = 0$

Решаем релаксационную задачу для ветви $x_1 = 0$:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 + x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 &\le 1,\\
x_2 + x_3 &\le 1,\\
x_1 + x_3 &\le 1,\\
x_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

- Ее целочисленное решение $x^6 = (0, 0, 1, 1)^T$ объявляется в качестве рекордного решения x^R,
- рекорд устанавливаем равным $R = c^T x^R = 3$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 3.

Ветвь $x_1 = 0$

Решаем релаксационную задачу для ветви $x_1 = 0$:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\to \max,\\
4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\le 10,\\
5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\le 9,\\
0 \le x_2, x_3, x_4 &\le 1.\\
x_2 + x_4 &\le 1,\\
x_1 + x_2 &\le 1,\\
x_2 + x_3 &\le 1,\\
x_1 + x_3 &\le 1,\\
x_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

- Ее целочисленное решение $x^6 = (0, 0, 1, 1)^T$ объявляется в качестве рекордного решения x^R,
- рекорд устанавливаем равным $R = c^T x^R = 3$.
- а в дереве поиска «отсекаем» все листья с оценкой ≤ 3.

Оптимальное решение

- Так как в ▸ дереве поиска нет неотсеченных листьев,
- то текущее рекордное решение $x^R = (0, 0, 1, 1)^T$ оптимально.
- Ответ: оптимальное решение примера — $x^* = (0, 0, 1, 1)^T$.

Оптимальное решение

- Так как в дереве поиска нет неотсеченных листьев,
- то текущее рекордное решение $x^R = (0,0,1,1)^T$ оптимально.
- Ответ: оптимальное решение примера — $x^* = (0,0,1,1)^T$.

Оптимальное решение

- Так как в ▸ дереве поиска нет неотсеченных листьев,
- то текущее рекордное решение $x^R = (0, 0, 1, 1)^T$ оптимально.
- Ответ: оптимальное решение примера — $x^* = (0, 0, 1, 1)^T$.

Дерево поиска

К узлу 0

К узлу 1

К опт. решению

$$R = -\infty$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\gamma(0) = 3 \\ x^5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T\end{array}}$$

Дерево поиска

К узлу 0
К узлу 1
К опт. решению

$$R = -\infty$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \gamma(0) = 3 \\ x^5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \end{array}}$$

Дерево поиска

К узлу 0

К узлу 1

К опт. решению

$$R = -\infty$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \gamma(0) = 3 \\ x^5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \end{array}}$$

Дерево поиска

◂ К узлу 0

◂ К узлу 1

◂ К опт. решению

$$R = 3$$
$$x^R = (0, 0, 1, 1)^T$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\gamma(0) = 3\\ x^5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T\end{array}}$$

Дерево поиска

К узлу 0

К узлу 1

К опт. решению

$$R = 3$$

$$x^R = (0, 0, 1, 1)^T$$

$$\boxed{\cancel{\begin{array}{c} \gamma(0) = 3 \\ x^5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \end{array}}}$$