Линейное программирование

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2015

План лекции

1. Задача линейного программирования
   - Формулировки задач линейного программирования
   - Эквивалентность задач ЛП в различных формах
2. Двойственность в линейном программировании
   - Лагранжева двойственность
   - Теорема двойственности
   - Двойственные переменные и теневые цены

Задача линейного программирования

- *Задача линейного программирования* (ЛП) есть задача максимизации линейной функции при линейных ограничениях.
- Задачу ЛП можно записать несколькими стандартными способами. Мы здесь рассмотрим только три таких способа.

Задача линейного программирования

- *Задача линейного программирования* (ЛП) есть задача максимизации линейной функции при линейных ограничениях.
- Задачу ЛП можно записать несколькими стандартными способами. Мы здесь рассмотрим только три таких способа.

План лекции

1. Задача линейного программирования
   - Формулировки задач линейного программирования
   - Эквивалентность задач ЛП в различных формах
2. Двойственность в линейном программировании
   - Лагранжева двойственность
   - Теорема двойственности
   - Двойственные переменные и теневые цены

Задача ЛП в канонической форме

Задача ЛП в канонической форме записывается следующим образом:

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\},$$

где

- A — действительная матрица размера $m \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$,
- $b \in \mathbb{R}^m$,
- а $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ есть вектор неизвестных.

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрица ограничений задачи имеет полный столбцовый ранг, т. е. $\operatorname{rank} A = n$.

Задача ЛП в канонической форме

Задача ЛП в канонической форме записывается следующим образом:

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\},$$

где

- A — действительная матрица размера $m \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$,
- $b \in \mathbb{R}^m$,
- а $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ есть вектор неизвестных.

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрица ограничений задачи имеет полный столбцовый ранг, т. е. $\operatorname{rank} A = n$.

Задача ЛП в канонической форме

Задача ЛП в канонической форме записывается следующим образом:

$$\max\{c^T x : \; Ax \leq b\},$$

где

- A — действительная матрица размера $m \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$,
- $b \in \mathbb{R}^m$,
- а $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ есть вектор неизвестных.

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрица ограничений задачи имеет полный столбцовый ранг, т. е. $\operatorname{rank} A = n$.

Задача ЛП в канонической форме

Задача ЛП в канонической форме записывается следующим образом:

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\},$$

где

- A — действительная матрица размера $m \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$,
- $b \in \mathbb{R}^m$,
- а $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ есть вектор неизвестных.

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрица ограничений задачи имеет полный столбцовый ранг, т. е. $\operatorname{rank} A = n$.

Задача ЛП в канонической форме

Задача ЛП в канонической форме записывается следующим образом:

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\},$$

где

- A — действительная матрица размера $m \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$,
- $b \in \mathbb{R}^m$,
- а $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ есть вектор неизвестных.

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрица ограничений задачи имеет полный столбцовый ранг, т. е. $\operatorname{rank} A = n$.

Задача ЛП в канонической форме

Задача ЛП в канонической форме записывается следующим образом:

$$\max\{c^T x : \; Ax \le b\},$$

где

- A — действительная матрица размера $m \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$,
- $b \in \mathbb{R}^m$,
- а $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ есть вектор неизвестных.

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрица ограничений задачи имеет полный столбцовый ранг, т. е. $\operatorname{rank} A = n$.

Задача ЛП в канонической форме

Задача ЛП в канонической форме записывается следующим образом:

$$\max\{c^T x : \ Ax \le b\},$$

где

- A — действительная матрица размера $m \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$,
- $b \in \mathbb{R}^m$,
- а $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ есть вектор неизвестных.

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрица ограничений задачи имеет полный столбцовый ранг, т. е. $\operatorname{rank} A = n$.

Задача ЛП в стандартной форме

Задача ЛП в стандартной форме имеет следующий вид:

$$\max\{c^T x : \ Ax = b, \ x \geq 0\},$$

где A, c, b и x определяются также, как и для задачи ЛП в канонической форме.
Для задачи ЛП в стандартной форме обычно предполагается, что A есть матрица полного строчного ранга, т. е. $\operatorname{rank} A = m$.

Задача ЛП в стандартной форме

Задача ЛП в стандартной форме имеет следующий вид:

$$\max\{c^T x :\ Ax = b,\ x \geq 0\},$$

где A, c, b и x определяются также, как и для задачи ЛП в канонической форме.

Для задачи ЛП в стандартной форме обычно предполагается, что A есть матрица полного строчного ранга, т. е. $\operatorname{rank} A = m$.

Задача ЛП в стандартной форме

Задача ЛП в стандартной форме имеет следующий вид:

$$\max\{c^T x:\ Ax = b,\ x \geq 0\},$$

где A, c, b и x определяются также, как и для задачи ЛП в канонической форме.

Для задачи ЛП в стандартной форме обычно предполагается, что A есть матрица полного строчного ранга, т. е. $\operatorname{rank} A = m$.

Задача ЛП в стандартной форме

Задача ЛП в стандартной форме имеет следующий вид:

$$\max\{c^T x : \; Ax = b, \; x \geq 0\},$$

где A, c, b и x определяются также, как и для задачи ЛП в канонической форме.

Для задачи ЛП в стандартной форме обычно предполагается, что A есть матрица полного строчного ранга, т. е. $\operatorname{rank} A = m$.

Часто встречающаяся форма задачи ЛП

Еще одна часто встречающаяся форма задачи ЛП следующая:

$$\max\{c^T x : Ax \le b, \ x \ge 0\},$$

где A, c, b и x определяются как и ранее, но здесь не накладывают никаких ограничений на ранг матрицы A.

Часто встречающаяся форма задачи ЛП

Еще одна часто встречающаяся форма задачи ЛП следующая:

$$\max\{c^T x : Ax \le b, \ x \ge 0\},$$

где A, c, b и x определяются как и ранее, но здесь не накладывают никаких ограничений на ранг матрицы A.

Часто встречающаяся форма задачи ЛП

Еще одна часто встречающаяся форма задачи ЛП следующая:

$$\max\{c^T x:\ Ax \le b,\ x \ge 0\},$$

где A, c, b и x определяются как и ранее, но здесь не накладывают никаких ограничений на ранг матрицы A.

Часто встречающаяся форма задачи ЛП

Еще одна часто встречающаяся форма задачи ЛП следующая:

$$\max\{c^T x : \ Ax \le b, \ x \ge 0\},$$

где A, c, b и x определяются как и ранее, но здесь не накладывают никаких ограничений на ранг матрицы A.

План лекции

1. Задача линейного программирования
   - Формулировки задач линейного программирования
   - Эквивалентность задач ЛП в различных формах
2. Двойственность в линейном программировании
   - Лагранжева двойственность
   - Теорема двойственности
   - Двойственные переменные и теневые цены

$\max\{c^T x : Ax \le b\} \to \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$

- Представим вектор $x = x^+ - x^-$ как разность двух неотрицательных векторов $x^+, x^- \in \mathbb{R}^n_+$.
- Вводя обозначения

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = [A \mid -A],$$

- запишем задачу $\max\{c^T x : Ax \le b\}$ в форме:

$$\max\{\bar{c}^T \bar{x} : \bar{A}\bar{x} \le b,\ \bar{x} \ge 0\}.$$

$\max\{c^T x:\ Ax \le b\} \ \to\ \max\{c^T x:\ Ax \le b,\ x \ge 0\}$

- Представим вектор $x = x^+ - x^-$ как разность двух неотрицательных векторов $x^+, x^- \in \mathbb{R}^n_+$.
- Вводя обозначения

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = [A \mid -A],$$

- запишем задачу $\max\{c^T x:\ Ax \le b\}$ в форме:

$$\max\{\bar{c}^T \bar{x} : \bar{A}\bar{x} \le b,\ \bar{x} \ge 0\}.$$

$\max\{c^T x : Ax \le b\} \to \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$

- Представим вектор $x = x^+ - x^-$ как разность двух неотрицательных векторов $x^+, x^- \in \mathbb{R}^n_+$.
- Вводя обозначения

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = [A \mid -A],$$

- запишем задачу $\max\{c^T x : Ax \le b\}$ в форме:

$$\max\{\bar{c}^T \bar{x} : \bar{A}\bar{x} \le b,\ \bar{x} \ge 0\}.$$

$\max\{c^T x : Ax \leq b,\ x \geq 0\} \to \max\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}$

- Введем вектор $s = (s_1, \dots, s_m)^T$ переменных недостатка.
- Вводя обозначения

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = [A|I],$$

- запишем $\max\{c^T x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ в форме:

$$\max\{\bar{c}^T \bar{x} : \bar{A}\bar{x} = b,\ \bar{x} \geq 0\}.$$

$\max\{c^T x :\ Ax \le b,\ x \ge 0\} \ \to\ \max\{c^T x :\ Ax = b,\ x \ge 0\}$

- Введем вектор $s = (s_1, \dots, s_m)^T$ переменных недостатка.
- Вводя обозначения

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = [A|I],$$

- запишем $\max\{c^T x :\ Ax \le b,\ x \ge 0\}$ в форме:

$$\max\{\bar{c}^T \bar{x} : \bar{A}\bar{x} = b,\ \bar{x} \ge 0\}.$$

$\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\} \to \max\{c^T x : Ax = b,\ x \ge 0\}$

- Введем вектор $s = (s_1, \dots, s_m)^T$ переменных недостатка.
- Вводя обозначения

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = [A|I],$$

- запишем $\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$ в форме:

$$\max\{\bar{c}^T \bar{x} : \bar{A}\bar{x} = b,\ \bar{x} \ge 0\}.$$

$\max\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\} \ \rightarrow\ \max\{c^T x : Ax \leq b\}$

- Вводя обозначения

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix},$$

- перепишем задачу ЛП в станд. форме след. образом:

$$\max\{c^T x : \bar{A}x \leq \bar{b}\}.$$

$\max\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\} \to \max\{c^T x : Ax \leq b\}$

- Вводя обозначения

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix},$$

- перепишем задачу ЛП в станд. форме след. образом:

$$\max\{c^T x : \bar{A}x \leq \bar{b}\}.$$

План лекции

1. Задача линейного программирования
   - Формулировки задач линейного программирования
   - Эквивалентность задач ЛП в различных формах

2. Двойственность в линейном программировании
   - Лагранжева двойственность
   - Теорема двойственности
   - Двойственные переменные и теневые цены

Прямая задача

- Рассмотрим задачу ЛП

$$\begin{aligned} -c^T x &\to \min, \\ Ax &\le b, \\ x &\ge 0, \end{aligned}$$

- где $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$,
- A есть действительная матрица размера $m \times n$,
- а $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — n-мерный вектор переменных.

Прямая задача

- Рассмотрим задачу ЛП

$$
\begin{aligned}
-c^T x &\to \min, \\
Ax &\leq b, \\
x &\geq 0,
\end{aligned}
$$

- где $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$,
- A есть действительная матрица размера $m \times n$,
- а $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — n-мерный вектор переменных.

Прямая задача

- Рассмотрим задачу ЛП

$$\begin{aligned} -c^T x &\to \min, \\ Ax &\leq b, \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

- где $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$,
- A есть действительная матрица размера $m \times n$,
- а $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ — n-мерный вектор переменных.

Прямая задача

- Рассмотрим задачу ЛП

$$
\begin{aligned}
-c^T x &\to \min, \\
Ax &\leq b, \\
x &\geq 0,
\end{aligned}
$$

- где $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$,
- A есть действительная матрица размера $m \times n$,
- а $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — n-мерный вектор переменных.

Функция Лагранжа

- При условии что $S = \mathbb{R}^n_+$, функция Лагранжа для задачи $\min\{-c^T x : aX \le b,\ x \ge 0\}$ имеет вид

$$L(x,\lambda) = -c^T x + \lambda^T (Ax - b) = -b^T \lambda + (A^T \lambda - c)^T x,$$

- а двойственная функция Лагранжа следующая

$$w(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n_+} L(x,\lambda) = -b^T \lambda + \inf_x (A^T \lambda - c)^T x.$$

- Инфимум линейной функции $q^T x$ на $\mathbb{R}^n_+$ равен $-\infty$, если $q \notin \mathbb{R}^n_+$, и 0, если $q \ge 0$.
- Поэтому

$$w(\lambda) = \begin{cases} -b^T \lambda, & \text{если } A^T \lambda - c \ge 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция Лагранжа

- При условии что $S = \mathbb{R}^n_+$, функция Лагранжа для задачи $\min\{-c^T x : aX \le b,\ x \ge 0\}$ имеет вид
$$L(x, \lambda) = -c^T x + \lambda^T (Ax - b) = -b^T \lambda + (A^T \lambda - c)^T x,$$
- а двойственная функция Лагранжа следующая
$$w(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n_+} L(x, \lambda) = -b^T \lambda + \inf_x (A^T \lambda - c)^T x.$$
- Инфимум линейной функции $q^T x$ на $\mathbb{R}^n_+$ равен $-\infty$, если $q \notin \mathbb{R}^n_+$, и 0, если $q \ge 0$.
- Поэтому
$$w(\lambda) = \begin{cases} -b^T \lambda, & \text{если } A^T \lambda - c \ge 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция Лагранжа

- При условии что $S = \mathbb{R}^n_+$, функция Лагранжа для задачи $\min\{-c^T x : aX \le b,\ x \ge 0\}$ имеет вид
$$L(x,\lambda) = -c^T x + \lambda^T (Ax - b) = -b^T\lambda + (A^T\lambda - c)^T x,$$
- а двойственная функция Лагранжа следующая
$$w(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n_+} L(x,\lambda) = -b^T\lambda + \inf_x (A^T\lambda - c)^T x.$$
- Инфимум линейной функции $q^T x$ на $\mathbb{R}^n_+$ равен $-\infty$, если $q \notin \mathbb{R}^n_+$, и 0, если $q \ge 0$.
- Поэтому
$$w(\lambda) = \begin{cases} -b^T\lambda, & \text{если } A^T\lambda - c \ge 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция Лагранжа

- При условии что $S = \mathbb{R}^n_+$, функция Лагранжа для задачи $\min\{-c^T x : aX \le b,\ x \ge 0\}$ имеет вид
$$L(x,\lambda) = -c^T x + \lambda^T(Ax - b) = -b^T\lambda + (A^T\lambda - c)^T x,$$
- а двойственная функция Лагранжа следующая
$$w(\lambda) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n_+} L(x,\lambda) = -b^T\lambda + \inf_x (A^T\lambda - c)^T x.$$
- Инфимум линейной функции $q^T x$ на $\mathbb{R}^n_+$ равен $-\infty$, если $q \notin \mathbb{R}^n_+$, и 0, если $q \ge 0$.
- Поэтому
$$w(\lambda) = \begin{cases} -b^T\lambda, & \text{если } A^T\lambda - c \ge 0,\\ -\infty & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Функция Лагранжа

- При условии что $S = \mathbb{R}^n_+$, функция Лагранжа для задачи $\min\{-c^T x : aX \le b,\ x \ge 0\}$ имеет вид
$$L(x,\lambda) = -c^T x + \lambda^T(Ax - b) = -b^T\lambda + (A^T\lambda - c)^T x,$$
- а двойственная функция Лагранжа следующая
$$w(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n_+} L(x,\lambda) = -b^T\lambda + \inf_x (A^T\lambda - c)^T x.$$
- Инфимум линейной функции $q^T x$ на $\mathbb{R}^n_+$ равен $-\infty$, если $q \notin \mathbb{R}^n_+$, и 0, если $q \ge 0$.
- Поэтому
$$w(\lambda) = \begin{cases} -b^T\lambda, & \text{если } A^T\lambda - c \ge 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция Лагранжа

- При условии что $S = \mathbb{R}^n_+$, функция Лагранжа для задачи $\min\{-c^T x : aX \le b,\ x \ge 0\}$ имеет вид
$$L(x, \lambda) = -c^T x + \lambda^T (Ax - b) = -b^T \lambda + (A^T \lambda - c)^T x,$$
- а двойственная функция Лагранжа следующая
$$w(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n_+} L(x, \lambda) = -b^T \lambda + \inf_x (A^T \lambda - c)^T x.$$
- Инфимум линейной функции $q^T x$ на $\mathbb{R}^n_+$ равен $-\infty$, если $q \notin \mathbb{R}^n_+$, и 0, если $q \ge 0$.
- Поэтому

$$w(\lambda) = \begin{cases} -b^T \lambda, & \text{если } A^T \lambda - c \ge 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пара двойственных задач ЛП

- Следовательно, двойственная задача Лагранжа для задачи ЛП
$$\min\{-c^T x : aX \le b,\ x \ge 0\}$$
- записывается следующим образом:
$$\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^m_+\} = \max\{-b^T\lambda : A^T\lambda \ge c,\ \lambda \ge 0\}.$$
- Мы показали, что для задачи ЛП
$$\max\{c^T x\ :\ Ax \le b,\ x \ge 0\} \qquad (\Pi)$$
- двойственная задача записывается след. образом:
$$\min\{b^T y\ :\ A^T y \ge c,\ y \ge 0\}. \qquad (Д)$$

Пара двойственных задач ЛП

- Следовательно, двойственная задача Лагранжа для задачи ЛП

$$\min\{-c^T x : aX \le b,\ x \ge 0\}$$

- записывается следующим образом:

$$\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^m_+\} = \max\{-b^T\lambda : A^T\lambda \ge c,\ \lambda \ge 0\}.$$

- Мы показали, что для задачи ЛП

$$\max\{c^T x \ :\ Ax \le b,\ x \ge 0\} \qquad (\text{П})$$

- двойственная задача записывается след. образом:

$$\min\{b^T y \ :\ A^T y \ge c,\ y \ge 0\}. \qquad (\text{Д})$$

Пара двойственных задач ЛП

- Следовательно, двойственная задача Лагранжа для задачи ЛП

$$\min\{-c^T x : aX \le b,\ x \ge 0\}$$

- записывается следующим образом:

$$\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^m_+\} = \max\{-b^T\lambda : A^T\lambda \ge c,\ \lambda \ge 0\}.$$

- Мы показали, что для задачи ЛП

$$\max\{c^T x\ :\ Ax \le b,\ x \ge 0\} \qquad (\Pi)$$

- двойственная задача записывается след. образом:

$$\min\{b^T y\ :\ A^T y \ge c,\ y \ge 0\}. \qquad (Д)$$

Пара двойственных задач ЛП

- Следовательно, двойственная задача Лагранжа для задачи ЛП
$$\min\{-c^T x : aX \le b,\ x \ge 0\}$$
- записывается следующим образом:
$$\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^m_+\} = \max\{-b^T\lambda : A^T\lambda \ge c,\ \lambda \ge 0\}.$$
- Мы показали, что для задачи ЛП
$$\max\{c^T x \ : \ Ax \le b,\ x \ge 0\} \qquad (\text{П})$$
- двойственная задача записывается след. образом:
$$\min\{b^T y \ : \ A^T y \ge c,\ y \ge 0\}. \qquad (\text{Д})$$

Отношение двойственности симметрично

- Задачи (П) и (Д) будем называть, соответственно, *прямой* и *двойственной* задачами.
- В отношении к прямой задаче (П) переменные x_j $(j = 1, \ldots, n)$ называются *прямыми*, а переменные y_i $(i = 1, \ldots, m)$ — *двойственными*.
- Отметим также, что отношение двойственности симметрично, т. е. задача двойственная к двойственной является прямой (докажите это!).

Отношение двойственности симметрично

- Задачи (П) и (Д) будем называть, соответственно, *прямой* и *двойственной* задачами.
- В отношении к прямой задаче (П) переменные x_j $(j = 1, \dots, n)$ называются *прямыми*, а переменные y_i $(i = 1, \dots, m)$ — *двойственными*.
- Отметим также, что отношение двойственности симметрично, т. е. задача двойственная к двойственной является прямой (докажите это!).

Отношение двойственности симметрично

- Задачи (П) и (Д) будем называть, соответственно, *прямой* и *двойственной* задачами.
- В отношении к прямой задаче (П) переменные x_j $(j = 1, \ldots, n)$ называются *прямыми*, а переменные y_i $(i = 1, \ldots, m)$ — *двойственными*.
- Отметим также, что отношение двойственности симметрично, т. е. задача двойственная к двойственной является прямой (докажите это!).

Правило для записи двойственной задачи

Общее правило для записи двойственной задачи для данной задачи ЛП приведено в следующей таблице.

Прямая задача	Двойственная задача
$\max c^T x$	$\min b^T y$
$A_i x \leq b_i\,,\ i \in \mathcal{R}_1$	$y_i \geq 0\,,\ i \in \mathcal{R}_1$
$A_i x = b_i\,,\ i \in \mathcal{R}_2$	$y_i \in \mathbb{R}\,,\ i \in \mathcal{R}_2$
$A_i x \geq b_i\,,\ i \in \mathcal{R}_3$	$y_i \leq 0\,,\ i \in \mathcal{R}_3$
$x_j \geq 0\,,\ j \in \mathcal{C}_1$	$y^T A^j \geq c_j\,,\ j \in \mathcal{C}_1$
$x_j \in \mathbb{R}\,,\ j \in \mathcal{C}_2$	$y^T A^j = c_j\,,\ j \in \mathcal{C}_2$
$x_j \leq 0\,,\ j \in \mathcal{C}_3$	$y^T A^j \leq c_j\,,\ j \in \mathcal{C}_3$

Пример записи двойственной задачи

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &\to \max,\\
x_1 + x_2 - x_3 &= 9,\\
-2x_1 + x_2 &\le 5,\\
x_1 - 3x_3 &\ge 4,\\
x_1 &\ge 0,\\
x_3 &\le 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9y_1 + 5y_2 + 4y_3 &\to \min,\\
y_1 - 2y_2 + y_3 &\ge 2,\\
y_1 + y_2 &= -4,\\
-y_1 - 3y_3 &\le 3,\\
y_2 &\ge 0,\\
y_3 &\le 0.
\end{aligned}
$$

Пример записи двойственной задачи

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
 & 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & \to & \max, \\
y_1: & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 9, \\
 & -2x_1 & + & x_2 & & & \le & 5, \\
 & x_1 & & & - & 3x_3 & \ge & 4, \\
 & x_1 & & & & & \ge & 0, \\
 & & & & & x_3 & \le & 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
9y_1 & + & 5y_2 & + & 4y_3 & \to & \min, \\
y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & \ge & 2, \\
y_1 & + & y_2 & & & = & -4, \\
-y_1 & & & - & 3y_3 & \le & 3, \\
 & & y_2 & & & \ge & 0, \\
 & & & & y_3 & \le & 0.
\end{array}
$$

Пример записи двойственной задачи

$$
\begin{array}{rrl}
 & 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 & \to \max, \\
y_1 : & x_1 + x_2 - x_3 & = 9, \\
y_2 : & -2x_1 + x_2 & \le 5, \\
 & x_1 - 3x_3 & \ge 4, \\
 & x_1 & \ge 0, \\
 & x_3 & \le 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
9y_1 + 5y_2 + 4y_3 & \to \min, \\
y_1 - 2y_2 + y_3 & \ge 2, \\
y_1 + y_2 & = -4, \\
-y_1 - 3y_3 & \le 3, \\
y_2 & \ge 0, \\
y_3 & \le 0.
\end{array}
$$

Пример записи двойственной задачи

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
 & & 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & \to & \max, \\
y_1 & : & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 9, \\
y_2 & : & -2x_1 & + & x_2 & & & \le & 5, \\
y_3 & : & x_1 & & & - & 3x_3 & \ge & 4, \\
 & & x_1 & & & & & \ge & 0, \\
 & & & & & & x_3 & \le & 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
9y_1 & + & 5y_2 & + & 4y_3 & \to & \min, \\
y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & \ge & 2, \\
y_1 & + & y_2 & & & = & -4, \\
-y_1 & & & - & 3y_3 & \le & 3, \\
 & & y_2 & & & \ge & 0, \\
 & & & & y_3 & \le & 0.
\end{array}
$$

Пример записи двойственной задачи

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 & \to & \max, \\
y_1 : & x_1 + x_2 - x_3 & = & 9, \\
y_2 : & -2x_1 + x_2 & \le & 5, \\
y_3 : & x_1 - 3x_3 & \ge & 4, \\
 & x_1 & \ge & 0, \\
 & x_3 & \le & 0,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
9y_1 + 5y_2 + 4y_3 & \to & \min, \\
y_1 - 2y_2 + y_3 & \ge & 2, \\
y_1 + y_2 & = & -4, \\
-y_1 - 3y_3 & \le & 3, \\
y_2 & \ge & 0, \\
y_3 & \le & 0.
\end{array}
$$

Пример записи двойственной задачи

$$
\begin{array}{lrl}
 & 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 & \to \max, \\
y_1 : & x_1 + x_2 - x_3 & = 9, \\
y_2 : & -2x_1 + x_2 & \le 5, \\
y_3 : & x_1 - 3x_3 & \ge 4, \\
 & x_1 & \ge 0, \\
 & x_3 & \le 0,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
9y_1 + 5y_2 + 4y_3 & \to \min, \\
y_1 - 2y_2 + y_3 & \ge 2, \\
y_1 + y_2 & = -4, \\
-y_1 - 3y_3 & \le 3, \\
y_2 & \ge 0, \\
y_3 & \le 0.
\end{array}
$$

Пример записи двойственной задачи

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & 2x_1 & -4x_2 & +3x_3 & \to \max, \\
y_1 : & x_1 & + x_2 & - x_3 & = 9, \\
y_2 : & -2x_1 & + x_2 & & \le 5, \\
y_3 : & x_1 & & -3x_3 & \ge 4, \\
 & x_1 & & & \ge 0, \\
 & & & x_3 & \le 0,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrl}
9y_1 & + 5y_2 & + 4y_3 & \to \min, \\
y_1 & - 2y_2 & + y_3 & \ge 2, \\
y_1 & + y_2 & & = -4, \\
-y_1 & & - 3y_3 & \le 3, \\
 & y_2 & & \ge 0, \\
 & & y_3 & \le 0.
\end{array}
$$

Пример записи двойственной задачи

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 & \to & \max, \\
y_1 : & x_1 + x_2 - x_3 & = & 9, \\
y_2 : & -2x_1 + x_2 & \le & 5, \\
y_3 : & x_1 - 3x_3 & \ge & 4, \\
 & x_1 & \ge & 0, \\
 & x_3 & \le & 0,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
9y_1 + 5y_2 + 4y_3 & \to & \min, \\
y_1 - 2y_2 + y_3 & \ge & 2, \\
y_1 + y_2 & = & -4, \\
-y_1 - 3y_3 & \le & 3, \\
y_2 & \ge & 0, \\
y_3 & \le & 0.
\end{array}
$$

Пример записи двойственной задачи

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 & \to & \max, \\
y_1 : & x_1 + x_2 - x_3 & = & 9, \\
y_2 : & -2x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} & \le & 5, \\
y_3 : & x_1 \phantom{{}+x_2} - 3x_3 & \ge & 4, \\
 & x_1 \phantom{{}+x_2-x_3} & \ge & 0, \\
 & x_3 & \le & 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
9y_1 + 5y_2 + 4y_3 & \to & \min, \\
y_1 - 2y_2 + y_3 & \ge & 2, \\
y_1 + y_2 \phantom{{}+y_3} & = & -4, \\
-y_1 \phantom{{}+y_2} - 3y_3 & \le & 3, \\
y_2 \phantom{{}+y_3} & \ge & 0, \\
y_3 & \le & 0.
\end{array}
$$

Пример записи двойственной задачи

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \max, \\
y_1 : & x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\
y_2 : & -2x_1 + x_2 \le 5, \\
y_3 : & x_1 - 3x_3 \color{red}{\ge} 4, \\
 & x_1 \ge 0, \\
 & x_3 \le 0,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
9y_1 + 5y_2 + 4y_3 \to \min, \\
y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 2, \\
y_1 + y_2 = -4, \\
-y_1 - 3y_3 \le 3, \\
y_2 \ge 0, \\
\color{red}{y_3 \le 0.}
\end{array}
$$

План лекции

Теорема двойственности

Теорема

Имеют место следующие альтернативы.

1. *Обе задачи (П) и (Д) имееют допустимые решения и* $\max\{c^T x : Ax \leq b,\ x \geq 0\} = \min\{b^T y : A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$.
2. *Если одна из задач (П) или (Д) не имеет допустимых решений, а другая имеет, то целевая функция этой задачи неограничена.*
3. *Обе задачи (П) и (Д) не имеют допустимых решений.*

Допустимые решения x^* *и* y^* *соответственно задач (П) и (Д) являются их оптимальными решениями тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия дополняющей нежесткости:*

$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad \text{и} \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0.$$

Теорема двойственности

Теорема

Имеют место следующие альтернативы.

1. *Обе задачи (П) и (Д) имеют допустимые решения и* $\max\{c^T x : Ax \leq b,\ x \geq 0\} = \min\{b^T y : A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$.
2. *Если одна из задач (П) или (Д) не имеет допустимых решений, а другая имеет, то целевая функция этой задачи неограничена.*
3. *Обе задачи (П) и (Д) не имеют допустимых решений.*

Допустимые решения x^* и y^* соответственно задач (П) и (Д) являются их оптимальными решениями тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия дополняющей нежесткости:

$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad \text{и} \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0.$$

Теорема двойственности

Теорема

Имеют место следующие альтернативы.

1. *Обе задачи (П) и (Д) имеют допустимые решения и* $\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\} = \min\{b^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\}$.
2. *Если одна из задач (П) или (Д) не имеет допустимых решений, а другая имеет, то целевая функция этой задачи неограничена.*
3. *Обе задачи (П) и (Д) не имеют допустимых решений.*

Допустимые решения x^* и y^* соответственно задач (П) и (Д) являются их оптимальными решениями тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия дополняющей нежесткости:

$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad \text{и} \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0.$$

Теорема двойственности

Теорема

Имеют место следующие альтернативы.

1. *Обе задачи (П) и (Д) имеют допустимые решения и* $\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\} = \min\{b^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\}$.
2. *Если одна из задач (П) или (Д) не имеет допустимых решений, а другая имеет, то целевая функция этой задачи неограничена.*
3. *Обе задачи (П) и (Д) не имеют допустимых решений.*

Допустимые решения x^* *и* y^* *соответственно задач (П) и (Д) являются их оптимальными решениями тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия дополняющей нежесткости:*

$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad \text{и} \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0.$$

Теорема двойственности

Теорема

Имеют место следующие альтернативы.

1. *Обе задачи (П) и (Д) имеют допустимые решения и* $\max\{c^T x : Ax \leq b,\ x \geq 0\} = \min\{b^T y : A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$.
2. *Если одна из задач (П) или (Д) не имеет допустимых решений, а другая имеет, то целевая функция этой задачи неограничена.*
3. *Обе задачи (П) и (Д) не имеют допустимых решений.*

Допустимые решения x^* и y^* соответственно задач (П) и (Д) являются их оптимальными решениями тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия дополняющей нежесткости:

$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad и \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0.$$

Теорема двойственности

Теорема

Имеют место следующие альтернативы.

1. *Обе задачи (П) и (Д) имеют допустимые решения и* $\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\} = \min\{b^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\}$.
2. *Если одна из задач (П) или (Д) не имеет допустимых решений, а другая имеет, то целевая функция этой задачи неограничена.*
3. *Обе задачи (П) и (Д) не имеют допустимых решений.*

Допустимые решения x^* и y^* соответственно задач (П) и (Д) являются их оптимальными решениями тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия дополняющей нежесткости:

$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad \text{и} \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0.$$

Доказательство теоремы двойственности

Доказательство.

- Справедливость утверждений 1 и 2 следует из сильной теоремы двойственности.
- Чтобы доказать утверждение 3, достаточно привести пример пары двойственных задач ЛП, каждая из которых не имеет решения:
- $$\max\{-x : 0x \leq -1\}, \quad \min\{-y : 0y = -1, \ y \geq 0\}.$$
- Нам осталось заметить, что условие дополняющей нежесткости
$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad \text{и} \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0$$
- — это переформулировка условие дополняющей нежесткости в теореме о св-вах седл. точек.

Доказательство теоремы двойственности

Доказательство.

- Справедливость утверждений 1 и 2 следует из сильной теоремы двойственности.
- Чтобы доказать утверждение 3, достаточно привести пример пары двойственных задач ЛП, каждая из которых не имеет решения:
- $$\max\{-x :\ 0x \le -1\}, \quad \min\{-y :\ 0y = -1,\ y \ge 0\}.$$
- Нам осталось заметить, что условие дополняющей нежесткости
$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad \text{и} \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0$$
- — это переформулировка условие дополняющей нежесткости в теореме о св-вах седл. точек.

□

Доказательство теоремы двойственности

Доказательство.

- Справедливость утверждений 1 и 2 следует из сильной теоремы двойственности.
- Чтобы доказать утверждение 3, достаточно привести пример пары двойственных задач ЛП, каждая из которых не имеет решения:
- $$\max\{-x:\ 0x \le -1\}, \quad \min\{-y:\ 0y = -1,\ y \ge 0\}.$$
- Нам осталось заметить, что условие дополняющей нежесткости
$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad \text{и} \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0$$
- — это переформулировка условие дополняющей нежесткости в теореме о св-вах седл. точек.

Доказательство теоремы двойственности

Доказательство.

- Справедливость утверждений 1 и 2 следует из сильной теоремы двойственности.
- Чтобы доказать утверждение 3, достаточно привести пример пары двойственных задач ЛП, каждая из которых не имеет решения:
- $$\max\{-x : \ 0x \le -1\}, \quad \min\{-y : \ 0y = -1, \ y \ge 0\}.$$
- Нам осталось заметить, что условие дополняющей нежесткости
$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad \text{и} \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0$$
- — это переформулировка условие дополняющей нежесткости в теореме о св-вах седл. точек.

□

Доказательство теоремы двойственности

Доказательство.

- Справедливость утверждений 1 и 2 следует из сильной теоремы двойственности.
- Чтобы доказать утверждение 3, достаточно привести пример пары двойственных задач ЛП, каждая из которых не имеет решения:
- $$\max\{-x:\ 0x \le -1\}, \quad \min\{-y:\ 0y = -1,\ y \ge 0\}.$$
- Нам осталось заметить, что условие дополняющей нежесткости
$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad \text{и} \quad (c - A^T y^*)^T x^* = 0$$
- — это переформулировка условие дополняющей нежесткости в ▸ теореме о св-вах седл. точек.

□

План лекции

Производственная задача

- Предприятие планирует произволить n видов продукции, используя m видов ресурсов:
- для производства единицы j-го продукта требуется a_{ij} единиц i-го ресурса.
- Стоимость единицы j-го продукта равна c_j.
- В наличии имеется b_i единиц i-го ресурса.
- Нужно определить план производства, с целью максимизировать прибыль.

Производственная задача

- Предприятие планирует производить n видов продукции, используя m видов ресурсов:
- для производства единицы j-го продукта требуется a_{ij} единиц i-го ресурса.
- Стоимость единицы j-го продукта равна c_j.
- В наличии имеется b_i единиц i-го ресурса.
- Нужно определить план производства, с целью максимизировать прибыль.

Производственная задача

- Предприятие планирует произволить n видов продукции, используя m видов ресурсов:
- для производства единицы j-го продукта требуется a_{ij} единиц i-го ресурса.
- Стоимость единицы j-го продукта равна c_j.
- В наличии имеется b_i единиц i-го ресурса.
- Нужно определить план производства, с целью максимизировать прибыль.

Производственная задача

- Предприятие планирует произволить n видов продукции, используя m видов ресурсов:
- для производства единицы j-го продукта требуется a_{ij} единиц i-го ресурса.
- Стоимость единицы j-го продукта равна c_j.
- В наличии имеется b_i единиц i-го ресурса.
- Нужно определить план производства, с целью максимизировать прибыль.

Производственная задача

- Предприятие планирует произволить n видов продукции, используя m видов ресурсов:
- для производства единицы j-го продукта требуется a_{ij} единиц i-го ресурса.
- Стоимость единицы j-го продукта равна c_j.
- В наличии имеется b_i единиц i-го ресурса.
- Нужно определить план производства, с целью максимизировать прибыль.

Формулировка производственной задачи

- Обозначив через x_j объем выпуска продукции j-го вида $(j = 1, \dots, n)$,
- мы можем записать задачу поиска оптимального производственного плана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

- или в матричном виде

$$z(b) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\},$$

- где $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_m)^T$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Формулировка производственной задачи

- Обозначив через x_j объем выпуска продукции j-го вида $(j = 1, \ldots, n)$,
- мы можем записать задачу поиска оптимального производственного плана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

- или в матричном виде

$$z(b) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\},$$

- где $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Формулировка производственной задачи

- Обозначив через x_j объем выпуска продукции j-го вида $(j = 1, \dots, n)$,
- мы можем записать задачу поиска оптимального производственного плана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

- или в матричном виде

$$z(b) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x : Ax \le b, \ x \ge 0\},$$

- где $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_m)^T$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Формулировка производственной задачи

- Обозначив через x_j объем выпуска продукции j-го вида $(j = 1, \ldots, n)$,
- мы можем записать задачу поиска оптимального производственного плана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

- или в матричном виде

$$z(b) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\},$$

- где $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Формулировка производственной задачи

- Обозначив через x_j объем выпуска продукции j-го вида ($j = 1, \ldots, n$),
- мы можем записать задачу поиска оптимального производственного плана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

- или в матричном виде

$$z(b) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x : Ax \le b, \ x \ge 0\},$$

- где $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Формулировка производственной задачи

- Обозначив через x_j объем выпуска продукции j-го вида $(j = 1, \ldots, n)$,
- мы можем записать задачу поиска оптимального производственного плана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

- или в матричном виде

$$z(b) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\},$$

- где $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Формулировка производственной задачи

- Обозначив через x_j объем выпуска продукции j-го вида $(j = 1, \ldots, n)$,
- мы можем записать задачу поиска оптимального производственного плана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

- или в матричном виде

$$z(b) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\},$$

- где $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Формулировка производственной задачи

- Пусть x^* — оптимальное базисное решение производственной задачи $\max\{c^Tx \,:\, Ax \le b,\ x \ge 0\}$,
- а y^* — оптимальное решение двойственной задачи.
- Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} z(b+\epsilon e_i) - z(b) &= \max\{c^Tx : Ax \le b+\epsilon e_i,\ x \ge 0\} \\ &\quad - \max\{c^Tx : Ax \le b,\ x \ge 0\} \\ &= \min\{(b+\epsilon e_i)^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\ &\quad - \min\{b^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\ &= (b+\epsilon e_i)^T y^* - b^T y^* = \epsilon y_i^*. \end{aligned}$$

- Теперь мы можем вычислить

$$\frac{\partial z}{\partial b_i}(b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z(b+\epsilon e_i) - z(b)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon y_i^*}{\epsilon} = y_i^*.$$

Формулировка производственной задачи

- Пусть x^* — оптимальное базисное решение производственной задачи $\max\{c^T x \,:\, Ax \le b,\ x \ge 0\}$,
- а y^* — оптимальное решение двойственной задачи.
- Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ имеем

$$
\begin{aligned}
z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) &= \max\{c^T x : Ax \le b + \epsilon \mathrm{e}_i,\ x \ge 0\} \\
&\quad - \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\} \\
&= \min\{(b+\epsilon \mathrm{e}_i)^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\
&\quad - \min\{b^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\
&= (b+\epsilon \mathrm{e}_i)^T y^* - b^T y^* = \epsilon y_i^*.
\end{aligned}
$$

- Теперь мы можем вычислить

$$
\frac{\partial z}{\partial b_i}(b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon y_i^*}{\epsilon} = y_i^*.
$$

Формулировка производственной задачи

- Пусть x^* — оптимальное базисное решение производственной задачи $\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$,
- а y^* — оптимальное решение двойственной задачи.
- Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) &= \max\{c^T x : Ax \le b + \epsilon \mathrm{e}_i,\ x \ge 0\} \\ &\quad - \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\} \\ &= \min\{(b+\epsilon \mathrm{e}_i)^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\ &\quad - \min\{b^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\ &= (b+\epsilon \mathrm{e}_i)^T y^* - b^T y^* = \epsilon y_i^* . \end{aligned}$$

- Теперь мы можем вычислить

$$\frac{\partial z}{\partial b_i}(b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon y_i^*}{\epsilon} = y_i^* .$$

Формулировка производственной задачи

- Пусть x^* — оптимальное базисное решение производственной задачи $\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$,
- а y^* — оптимальное решение двойственной задачи.
- Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ имеем

$$
\begin{aligned}
z(b + \epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) &= \max\{c^T x : Ax \le b + \epsilon \mathrm{e}_i,\ x \ge 0\} \\
&\quad - \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\} \\
&= \min\{(b + \epsilon \mathrm{e}_i)^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\
&\quad - \min\{b^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\
&= (b + \epsilon \mathrm{e}_i)^T y^* - b^T y^* = \epsilon y_i^* .
\end{aligned}
$$

- Теперь мы можем вычислить

$$
\frac{\partial z}{\partial b_i}(b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z(b + \epsilon \mathrm{e}_i) - z(b)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon y_i^*}{\epsilon} = y_i^* .
$$

Формулировка производственной задачи

- Пусть x^* — оптимальное базисное решение производственной задачи $\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$,
- а y^* — оптимальное решение двойственной задачи.
- Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) &= \max\{c^T x : Ax \le b + \epsilon \mathrm{e}_i,\ x \ge 0\} \\ &\quad - \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\} \\ &= \min\{(b+\epsilon \mathrm{e}_i)^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\ &\quad - \min\{b^T y : A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\ &= (b+\epsilon \mathrm{e}_i)^T y^* - b^T y^* = \epsilon y_i^*\,. \end{aligned}$$

- Теперь мы можем вычислить

$$\frac{\partial z}{\partial b_i}(b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon y_i^*}{\epsilon} = y_i^*\,.$$

Формулировка производственной задачи

- Пусть x^* — оптимальное базисное решение производственной задачи $\max\{c^T x \,:\, Ax \le b,\ x \ge 0\}$,
- а y^* — оптимальное решение двойственной задачи.
- Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} z(b + \epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) &= \max\{c^T x :\ Ax \le b + \epsilon \mathrm{e}_i,\ x \ge 0\} \\ &\quad - \max\{c^T x :\ Ax \le b,\ x \ge 0\} \\ &= \min\{(b + \epsilon \mathrm{e}_i)^T y :\ A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\ &\quad - \min\{b^T y :\ A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\ &= (b + \epsilon \mathrm{e}_i)^T y^* - b^T y^* = \epsilon y_i^* . \end{aligned}$$

- Теперь мы можем вычислить

$$\frac{\partial z}{\partial b_i}(b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z(b + \epsilon \mathrm{e}_i) - z(b)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon y_i^*}{\epsilon} = y_i^* .$$

Формулировка производственной задачи

- Пусть x^* — оптимальное базисное решение производственной задачи $\max\{c^T x \,:\, Ax \le b,\ x \ge 0\}$,
- а y^* — оптимальное решение двойственной задачи.
- Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) &= \max\{c^T x :\ Ax \le b + \epsilon \mathrm{e}_i,\ x \ge 0\}\\
&\quad - \max\{c^T x :\ Ax \le b,\ x \ge 0\}\\
&= \min\{(b+\epsilon \mathrm{e}_i)^T y :\ A^T y \ge c,\ y \ge 0\}\\
&\quad - \min\{b^T y :\ A^T y \ge c,\ y \ge 0\}\\
&= (b+\epsilon \mathrm{e}_i)^T y^* - b^T y^* = \epsilon y_i^*\,.
\end{aligned}$$

- Теперь мы можем вычислить

$$\frac{\partial z}{\partial b_i}(b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon y_i^*}{\epsilon} = y_i^*\,.$$

Формулировка производственной задачи

- Пусть x^* — оптимальное базисное решение производственной задачи $\max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$,
- а y^* — оптимальное решение двойственной задачи.
- Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) &= \max\{c^T x:\ Ax \le b+\epsilon \mathrm{e}_i,\ x \ge 0\} \\ &\quad - \max\{c^T x:\ Ax \le b,\ x \ge 0\} \\ &= \min\{(b+\epsilon \mathrm{e}_i)^T y:\ A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\ &\quad - \min\{b^T y:\ A^T y \ge c,\ y \ge 0\} \\ &= (b+\epsilon \mathrm{e}_i)^T y^* - b^T y^* = \epsilon y_i^* . \end{aligned}$$

- Теперь мы можем вычислить

$$\frac{\partial z}{\partial b_i}(b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon y_i^*}{\epsilon} = y_i^* .$$

Экономический смысл двойственных переменных

- Экономический смысл двойств. переменных следует из приблизительного равенства $z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) \approx y_i^* \epsilon$,
- которое означает, что на каждую дополнительную единицу ресурса i предприятие получает прибыль y_i^*.
- Поэтому оптимальные двойственные переменные y_i^* называются *теневыми ценами*.
- Если теневая цена y_i^* больше цены ресурса i на рынке, то предприятию для увеличения прибыли целесообразно закупить дополнительное количество i-го ресурса.
- Из условия дополняющей нежесткости $y_i^*(b_i - A_i x^*) = 0$ следует, что теневая цена y_i^* неполностью использованного ресурса $(A_i x^* < b_i)$ равна нулю.
- Равенство $c^T x^* = b^T y^*$ можно проинтерпретировать так:
- стоимость оптимального плана равна теневой стоимости использованных ресурсов.

Экономический смысл двойственных переменных

- Экономический смысл двойств. переменных следует из приблизительного равенства $z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) \approx y_i^* \epsilon$,
- которое означает, что на каждую дополнительную единицу ресурса i предприятие получает прибыль y_i^*.
- Поэтому оптимальные двойственные переменные y_i^* называются *теневыми ценами*.
- Если теневая цена y_i^* больше цены ресурса i на рынке, то предприятию для увеличения прибыли целесообразно закупить дополнительное количество i-го ресурса.
- Из условия дополняющей нежесткости $y_i^*(b_i - A_i x^*) = 0$ следует, что теневая цена y_i^* неполностью использованного ресурса $(A_i x^* < b_i)$ равна нулю.
- Равенство $c^T x^* = b^T y^*$ можно проинтерпретировать так:
- стоимость оптимального плана равна теневой стоимости использованных ресурсов.

Экономический смысл двойственных переменных

- Экономический смысл двойств. переменных следует из приблизительного равенства $z(b + \epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) \approx y_i^* \epsilon$,
- которое означает, что на каждую дополнительную единицу ресурса i предприятие получает прибыль y_i^*.
- Поэтому оптимальные двойственные переменные y_i^* называются *теневыми ценами*.
- Если теневая цена y_i^* больше цены ресурса i на рынке, то предприятию для увеличения прибыли целесообразно закупить дополнительное количество i-го ресурса.
- Из условия дополняющей нежесткости $y_i^*(b_i - A_i x^*) = 0$ следует, что теневая цена y_i^* неполностью использованного ресурса $(A_i x^* < b_i)$ равна нулю.
- Равенство $c^T x^* = b^T y^*$ можно проинтерпретировать так:
- стоимость оптимального плана равна теневой стоимости использованных ресурсов.

Экономический смысл двойственных переменных

- Экономический смысл двойств. переменных следует из приблизительного равенства $z(b + \epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) \approx y_i^* \epsilon$,
- которое означает, что на каждую дополнительную единицу ресурса i предприятие получает прибыль y_i^*.
- Поэтому оптимальные двойственные переменные y_i^* называются *теневыми ценами*.
- Если теневая цена y_i^* больше цены ресурса i на рынке, то предприятию для увеличения прибыли целесообразно закупить дополнительное количество i-го ресурса.
- Из условия дополняющей нежесткости $y_i^*(b_i - A_i x^*) = 0$ следует, что теневая цена y_i^* неполностью использованного ресурса $(A_i x^* < b_i)$ равна нулю.
- Равенство $c^T x^* = b^T y^*$ можно проинтерпретировать так:
- стоимость оптимального плана равна теневой стоимости использованных ресурсов.

Экономический смысл двойственных переменных

- Экономический смысл двойств. переменных следует из приблизительного равенства $z(b + \epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) \approx y_i^* \epsilon$,
- которое означает, что на каждую дополнительную единицу ресурса i предприятие получает прибыль y_i^*.
- Поэтому оптимальные двойственные переменные y_i^* называются *теневыми ценами*.
- Если теневая цена y_i^* больше цены ресурса i на рынке, то предприятию для увеличения прибыли целесообразно закупить дополнительное количество i-го ресурса.
- Из условия дополняющей нежесткости $y_i^*(b_i - A_i x^*) = 0$ следует, что теневая цена y_i^* неполностью использованного ресурса $(A_i x^* < b_i)$ равна нулю.
- Равенство $c^T x^* = b^T y^*$ можно проинтерпретировать так:
- стоимость оптимального плана равна теневой стоимости использованных ресурсов.

Экономический смысл двойственных переменных

- Экономический смысл двойств. переменных следует из приблизительного равенства $z(b + \epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) \approx y_i^* \epsilon$,
- которое означает, что на каждую дополнительную единицу ресурса i предприятие получает прибыль y_i^*.
- Поэтому оптимальные двойственные переменные y_i^* называются *теневыми ценами*.
- Если теневая цена y_i^* больше цены ресурса i на рынке, то предприятию для увеличения прибыли целесообразно закупить дополнительное количество i-го ресурса.
- Из условия дополняющей нежесткости $y_i^*(b_i - A_i x^*) = 0$ следует, что теневая цена y_i^* неполностью использованного ресурса $(A_i x^* < b_i)$ равна нулю.
- Равенство $c^T x^* = b^T y^*$ можно проинтерпретировать так:
- стоимость оптимального плана равна теневой стоимости использованных ресурсов.

Экономический смысл двойственных переменных

- Экономический смысл двойств. переменных следует из приблизительного равенства $z(b+\epsilon \mathrm{e}_i) - z(b) \approx y_i^* \epsilon$,
- которое означает, что на каждую дополнительную единицу ресурса i предприятие получает прибыль y_i^*.
- Поэтому оптимальные двойственные переменные y_i^* называются *теневыми ценами*.
- Если теневая цена y_i^* больше цены ресурса i на рынке, то предприятию для увеличения прибыли целесообразно закупить дополнительное количество i-го ресурса.
- Из условия дополняющей нежесткости $y_i^*(b_i - A_i x^*) = 0$ следует, что теневая цена y_i^* неполностью использованного ресурса $(A_i x^* < b_i)$ равна нулю.
- Равенство $c^T x^* = b^T y^*$ можно проинтерпретировать так:
- стоимость оптимального плана равна теневой стоимости использованных ресурсов.

Приведенные стоимости

- *Приведенной стоимостью* переменной x_j (продукта j) называется величина

$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*,$$

- равная стоимости единицы продукта j минус теневая стоимость ресурсов, используемых для ее производства.
- Отметим следующие свойства приведенных стоимостей.
  - Поскольку y^* — допустимое решение двойств. з-чи ЛП

$$\max\{b^T y : \ y^T A \geq c, \ y \geq 0\},$$

    то все приведенные стоимости неположительны.
  - Из условия дополняющей нежесткости

    $x_j^* \left(c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^*\right) = 0$ следует, что
  - приведенная стоимость производимого продукта j ($x_j^* > 0$) равна нулю,
  - а если приведенная стоимость отрицательна, то продукт не производится ($\bar{c}_j < 0$ влечет $x_j^* = 0$).

Приведенные стоимости

- *Приведенной стоимостью* переменной x_j (продукта j) называется величина
$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*,$$
- равная стоимости единицы продукта j минус теневая стоимость ресурсов, используемых для ее производства.
- Отметим следующие свойства приведенных стоимостей.
  - Поскольку y^* — допустимое решение двойств. з-чи ЛП
  $$\max\{b^T y : \; y^T A \geq c, \; y \geq 0\},$$
  то все приведенные стоимости неположительны.
  - Из условия дополняющей нежесткости
  $x_j^* \left(c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^*\right) = 0$ следует, что
  - приведенная стоимость производимого продукта j ($x_j^* > 0$) равна нулю,
  - а если приведенная стоимость отрицательна, то продукт не производится ($\bar{c}_j < 0$ влечет $x_j^* = 0$).

Приведенные стоимости

- *Приведенной стоимостью* переменной x_j (продукта j) называется величина
$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*,$$
- равная стоимости единицы продукта j минус теневая стоимость ресурсов, используемых для ее производства.
- Отметим следующие свойства приведенных стоимостей.
  - Поскольку y^* — допустимое решение двойств. з-чи ЛП
$$\max\{b^T y : \ y^T A \geq c, \ y \geq 0\},$$
то все приведенные стоимости неположительны.
  - Из условия дополняющей нежесткости
$x_j^* \left(c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^*\right) = 0$ следует, что
  - приведенная стоимость производимого продукта j $(x_j^* > 0)$ равна нулю,
  - а если приведенная стоимость отрицательна, то продукт не производится ($\bar{c}_j < 0$ влечет $x_j^* = 0$).

Приведенные стоимости

- *Приведенной стоимостью* переменной x_j (продукта j) называется величина
$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*,$$
- равная стоимости единицы продукта j минус теневая стоимость ресурсов, используемых для ее производства.
- Отметим следующие свойства приведенных стоимостей.
  - Поскольку y^* — допустимое решение двойств. з-чи ЛП
  $$\max\{b^T y : \ y^T A \geq c, \ y \geq 0\},$$
  то все приведенные стоимости неположительны.
  - Из условия дополняющей нежесткости $x_j^* \left(c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^*\right) = 0$ следует, что
  - приведенная стоимость производимого продукта j $(x_j^* > 0)$ равна нулю,
  - а если приведенная стоимость отрицательна, то продукт не производится ($\bar{c}_j < 0$ влечет $x_j^* = 0$).

Приведенные стоимости

- *Приведенной стоимостью* переменной x_j (продукта j) называется величина
$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*,$$
- равная стоимости единицы продукта j минус теневая стоимость ресурсов, используемых для ее производства.
- Отметим следующие свойства приведенных стоимостей.
  - Поскольку y^* — допустимое решение двойств. з-чи ЛП
  $$\max\{b^T y : \ y^T A \geq c, \ y \geq 0\},$$
  то все приведенные стоимости неположительны.
  - Из условия дополняющей нежесткости $x_j^* \left(c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^*\right) = 0$ следует, что
  - приведенная стоимость производимого продукта j ($x_j^* > 0$) равна нулю,
  - а если приведенная стоимость отрицательна, то продукт не производится ($\bar{c}_j < 0$ влечет $x_j^* = 0$).

Приведенные стоимости

- *Приведенной стоимостью* переменной x_j (продукта j) называется величина
$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*,$$
- равная стоимости единицы продукта j минус теневая стоимость ресурсов, используемых для ее производства.
- Отметим следующие свойства приведенных стоимостей.
  - Поскольку y^* — допустимое решение двойств. з-чи ЛП
  $$\max\{b^T y : \ y^T A \geq c, \ y \geq 0\},$$
  то все приведенные стоимости неположительны.
  - Из условия дополняющей нежесткости $x_j^* \left(c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^*\right) = 0$ следует, что
  - приведенная стоимость производимого продукта j ($x_j^* > 0$) равна нулю,
  - а если приведенная стоимость отрицательна, то продукт не производится ($\bar{c}_j < 0$ влечет $x_j^* = 0$).

Приведенные стоимости

- *Приведенной стоимостью* переменной x_j (продукта j) называется величина
$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*,$$
- равная стоимости единицы продукта j минус теневая стоимость ресурсов, используемых для ее производства.
- Отметим следующие свойства приведенных стоимостей.
  - Поскольку y^* — допустимое решение двойств. з-чи ЛП
  $$\max\{b^T y : \; y^T A \geq c, \; y \geq 0\},$$
  то все приведенные стоимости неположительны.
  - Из условия дополняющей нежесткости $x_j^* \left(c_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i^*\right) = 0$ следует, что
  - приведенная стоимость производимого продукта j $(x_j^* > 0)$ равна нулю,
  - а если приведенная стоимость отрицательна, то продукт не производится ($\bar{c}_j < 0$ влечет $x_j^* = 0$).

Свойства седловых точек

Теорема

Точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ *является седловой для функции* $L(x, \lambda)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) &= \min_{x \in S} L(x, \bar{\lambda}), \\ g_i(\bar{x}) &\le 0, \quad i \in I, \\ \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) &= 0, \quad i \in I. \end{aligned}$$

◂ К доказательству