

# Модели линейного программирования

Н.Н. Писарук  
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет  
Белорусский государственный университет

Минск - 2015

# План лекции

- 1 Модели линейного программирования
  - Задача о диете
  - Арбитраж
  - Метод DEA

# План лекции

- 1 Модели линейного программирования
  - Задача о диете
  - Арбитраж
  - Метод DEA

# Задача о диете: требования

В задаче о диете нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продемонстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
  - холестерина не превышала 175 единиц,
  - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,
  - белков должно быть не меньше 200 единиц,
  - калорий — не меньше 100 единиц.

# Задача о диете: требования

В *задаче о диете* нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продемонстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
  - холестерина не превышала 175 единиц,
  - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,
  - белков должно быть не меньше 200 единиц,
  - калорий — не меньше 100 единиц.

# Задача о диете: требования

В задаче о диете нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продемонстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
  - холестерина не превышала 175 единиц,
  - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,
  - белков должно быть не меньше 200 единиц,
  - калорий — не меньше 100 единиц.

# Задача о диете: требования

В *задаче о диете* нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продemonстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
  - холестерина не превышала 175 единиц,
  - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,
  - белков должно быть не меньше 200 единиц,
  - калорий — не меньше 100 единиц.

# Задача о диете: требования

В *задаче о диете* нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продemonстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
  - **холестерина не превышала 175 единиц,**
  - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,
  - белков должно быть не меньше 200 единиц,
  - калорий — не меньше 100 единиц.



# Задача о диете: требования

В задаче о диете нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продемонстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
  - холестерина не превышала 175 единиц,
  - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,
  - белков должно быть не меньше 200 единиц,
  - калорий — не меньше 100 единиц.

# Задача о диете: требования

В *задаче о диете* нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продемонстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
  - холестерина не превышала 175 единиц,
  - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,
  - **белков должно быть не меньше 200 единиц,**
  - калорий — не меньше 100 единиц.

# Задача о диете: требования

В *задаче о диете* нужно приготовить блюдо из заданных продуктов (ингредиентов), которое должно удовлетворять ряду требований.

Продemonстрируем это на конкретном примере.

- Диетолог в больнице разрабатывает молочный коктейль для послеоперационных больных.
- Диетолог хочет, чтобы в коктейле количество
  - холестерина не превышала 175 единиц,
  - насыщенных жиров было не больше 150 единиц,
  - белков должно быть не меньше 200 единиц,
  - **калорий — не меньше 100 единиц.**

# Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

| Продукт   | Цена   | К-во холест. | К-во жиров | К-во белков | К-во калорий |
|-----------|--------|--------------|------------|-------------|--------------|
| яйца      | \$0.15 | 50           | 40         | 70          | 30           |
| мороженое | \$0.25 | 120          | 100        | 30          | 50           |
| сироп     | \$0.10 | 80           | 50         | 40          | 100          |

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
  - удовлетворялись вышеперечисленные требования
  - и стоимость единицы коктейля была минимальной.

# Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

| Продукт   | Цена   | К-во холест. | К-во жиров | К-во белков | К-во калорий |
|-----------|--------|--------------|------------|-------------|--------------|
| яйцо      | \$0.15 | 50           | 0          | 70          | 30           |
| мороженое | \$0.25 | 150          | 100        | 10          | 80           |
| сироп     | \$0.10 | 90           | 50         | 0           | 200          |

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
  - удовлетворялись вышперечисленные требования
  - и стоимость единицы коктейля была минимальной.

# Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

| Продукт   | Цена   | К-во холест. | К-во жиров | К-во белков | К-во калорий |
|-----------|--------|--------------|------------|-------------|--------------|
| яйцо      | \$0.15 | 50           | 0          | 70          | 30           |
| мороженое | \$0.25 | 150          | 100        | 10          | 80           |
| сироп     | \$0.10 | 90           | 50         | 0           | 200          |

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
  - удовлетворялись вышеперечисленные требования
  - и стоимость единицы коктейля была минимальной.

# Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

| Продукт   | Цена   | К-во холест. | К-во жиров | К-во белков | К-во калорий |
|-----------|--------|--------------|------------|-------------|--------------|
| яйцо      | \$0.15 | 50           | 0          | 70          | 30           |
| мороженое | \$0.25 | 150          | 100        | 10          | 80           |
| сироп     | \$0.10 | 90           | 50         | 0           | 200          |

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
  - удовлетворялись вышеперечисленные требования
  - и стоимость единицы коктейля была минимальной.

# Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

| Продукт          | Цена          | К-во холест. | К-во жиров | К-во белков | К-во калорий |
|------------------|---------------|--------------|------------|-------------|--------------|
| яйцо             | \$0.15        | 50           | 0          | 70          | 30           |
| <b>мороженое</b> | <b>\$0.25</b> | <b>150</b>   | <b>100</b> | <b>10</b>   | <b>80</b>    |
| сироп            | \$0.10        | 90           | 50         | 0           | 200          |

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
  - удовлетворялись вышеперечисленные требования
  - и стоимость единицы коктейля была минимальной.



# Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

| Продукт   | Цена          | К-во холест. | К-во жиров | К-во белков | К-во калорий |
|-----------|---------------|--------------|------------|-------------|--------------|
| яйцо      | \$0.15        | 50           | 0          | 70          | 30           |
| мороженое | \$0.25        | 150          | 100        | 10          | 80           |
| сироп     | <b>\$0.10</b> | <b>90</b>    | <b>50</b>  | <b>0</b>    | <b>200</b>   |

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
  - удовлетворялись вышеперечисленные требования
  - и стоимость единицы коктейля была минимальной.

# Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

| Продукт   | Цена   | К-во холест. | К-во жиров | К-во белков | К-во калорий |
|-----------|--------|--------------|------------|-------------|--------------|
| яйцо      | \$0.15 | 50           | 0          | 70          | 30           |
| мороженое | \$0.25 | 150          | 100        | 10          | 80           |
| сироп     | \$0.10 | 90           | 50         | 0           | 200          |

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
  - удовлетворялись вышеперечисленные требования
  - и стоимость единицы коктейля была минимальной.

# Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

| Продукт   | Цена   | К-во холест. | К-во жиров | К-во белков | К-во калорий |
|-----------|--------|--------------|------------|-------------|--------------|
| яйцо      | \$0.15 | 50           | 0          | 70          | 30           |
| мороженое | \$0.25 | 150          | 100        | 10          | 80           |
| сироп     | \$0.10 | 90           | 50         | 0           | 200          |

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
  - **удовлетворялись вышперечисленные требования**
  - и стоимость единицы коктейля была минимальной.

# Задача о диете: ингредиенты

- Диетолог выбрал три возможных ингредиента для коктейля: куриные яйца, мороженое и фруктовый сироп.
- Информация о стоимости и составе ингредиентов представлена в следующей таблице.

| Продукт   | Цена   | К-во холест. | К-во жиров | К-во белков | К-во калорий |
|-----------|--------|--------------|------------|-------------|--------------|
| яйцо      | \$0.15 | 50           | 0          | 70          | 30           |
| мороженое | \$0.25 | 150          | 100        | 10          | 80           |
| сироп     | \$0.10 | 90           | 50         | 0           | 200          |

- Нужно смешать ингредиенты в таких пропорциях, чтобы
  - удовлетворялись вышеперечисленные требования
  - **и стоимость единицы коктейля была минимальной.**

# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\100C + 50S &\leq 150, && \text{(жир)} \\70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\E, C, S &\geq 0.\end{aligned}$$

# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\100C + 50S &\leq 150, && \text{(жир)} \\70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\E, C, S &\geq 0.\end{aligned}$$

# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} 0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\ 50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\ &100C + 50S \leq 150, && \text{(жир)} \\ 70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\ 30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\ &E, C, S \geq 0. \end{aligned}$$

# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} 0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\ 50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\ &100C + 50S \leq 150, && \text{(жир)} \\ 70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\ 30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\ &E, C, S \geq 0. \end{aligned}$$



# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\100C + 50S &\leq 150, && \text{(жир)} \\70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\E, C, S &\geq 0.\end{aligned}$$

# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\100C + 50S &\leq 150, && \text{(жир)} \\70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\E, C, S &\geq 0.\end{aligned}$$

# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\
 50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\
 &100C + 50S \leq 150, && \text{(жир)} \\
 70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\
 30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\
 E, C, S &\geq 0.
 \end{aligned}$$

# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\
 50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\
 &100C + 50S \leq 150, && \text{(жир)} \\
 70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\
 30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\
 E, C, S &\geq 0.
 \end{aligned}$$

# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\
 50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\
 100C + 50S &\leq 150, && \text{(жир)} \\
 70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\
 30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\
 E, C, S &\geq 0.
 \end{aligned}$$

# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\100C + 50S &\leq 150, && \text{(жир)} \\70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\E, C, S &\geq 0.\end{aligned}$$

# Задача о диете: формулировка

- Для формулировки данной задачи как задачи ЛП выберем следующие переменные:
  - $E$  — количество яиц в единице коктейля;
  - $C$  — количество единиц мороженого в единице коктейля;
  - $S$  — количество единиц сиропа в единице коктейля.
- В этих переменных задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}0.15E + 0.25C + 0.1S &\rightarrow \min, \\50E + 150C + 90S &\leq 175, && \text{(холестерин)} \\100C + 50S &\leq 150, && \text{(жир)} \\70E + 10C &\geq 200, && \text{(белки)} \\30E + 80C + 200S &\geq 100, && \text{(калории)} \\E, C, S &\geq 0.\end{aligned}$$

# План лекции

- 1 Модели линейного программирования
  - Задача о диете
  - Арбитраж
  - Метод DEA



# Арбитраж: исходные данные

- В нашем распоряжении имеется  $n$  финансовых активов.
- В начале инвестиционного периода цена актива  $j$  равна  $p_j$ .
- В конце инвестиционного периода цена актива  $j$  есть случайная величина  $v_j$ .
- В конце периода возможны  $t$  сценариев (исходов).
- В таком случае  $v_j$  есть дискретная случайная величина. Пусть  $v_{ij}$  есть значение  $v_j$ , если реализуется сценарий  $i$ .
- Из элементов  $v_{ij}$  составим  $t \times n$ -матрицу  $V$ .

# Арбитраж: исходные данные

- В нашем распоряжении имеется  $n$  финансовых активов.
- В начале инвестиционного периода цена актива  $j$  равна  $p_j$ .
- В конце инвестиционного периода цена актива  $j$  есть случайная величина  $v_j$ .
- В конце периода возможны  $t$  сценариев (исходов).
- В таком случае  $v_j$  есть дискретная случайная величина. Пусть  $v_{ij}$  есть значение  $v_j$ , если реализуется сценарий  $i$ .
- Из элементов  $v_{ij}$  составим  $t \times n$ -матрицу  $V$ .

# Арбитраж: исходные данные

- В нашем распоряжении имеется  $n$  финансовых активов.
- В начале инвестиционного периода цена актива  $j$  равна  $p_j$ .
- В конце инвестиционного периода цена актива  $j$  есть случайная величина  $v_j$ .
- В конце периода возможны  $t$  сценариев (исходов).
- В таком случае  $v_j$  есть дискретная случайная величина. Пусть  $v_{ij}$  есть значение  $v_j$ , если реализуется сценарий  $i$ .
- Из элементов  $v_{ij}$  составим  $t \times n$ -матрицу  $V$ .

# Арбитраж: исходные данные

- В нашем распоряжении имеется  $n$  финансовых активов.
- В начале инвестиционного периода цена актива  $j$  равна  $p_j$ .
- В конце инвестиционного периода цена актива  $j$  есть случайная величина  $v_j$ .
- В конце периода возможны  $t$  сценариев (исходов).
- В таком случае  $v_j$  есть дискретная случайная величина. Пусть  $v_{ij}$  есть значение  $v_j$ , если реализуется сценарий  $i$ .
- Из элементов  $v_{ij}$  составим  $t \times n$ -матрицу  $V$ .

# Арбитраж: исходные данные

- В нашем распоряжении имеется  $n$  финансовых активов.
- В начале инвестиционного периода цена актива  $j$  равна  $p_j$ .
- В конце инвестиционного периода цена актива  $j$  есть случайная величина  $v_j$ .
- В конце периода возможны  $m$  сценариев (исходов).
- В таком случае  $v_j$  есть дискретная случайная величина. Пусть  $v_{ij}$  есть значение  $v_j$ , если реализуется сценарий  $i$ .
- Из элементов  $v_{ij}$  составим  $m \times n$ -матрицу  $V$ .

# Арбитраж: исходные данные

- В нашем распоряжении имеется  $n$  финансовых активов.
- В начале инвестиционного периода цена актива  $j$  равна  $p_j$ .
- В конце инвестиционного периода цена актива  $j$  есть случайная величина  $v_j$ .
- В конце периода возможны  $m$  сценариев (исходов).
- В таком случае  $v_j$  есть дискретная случайная величина. Пусть  $v_{ij}$  есть значение  $v_j$ , если реализуется сценарий  $i$ .
- Из элементов  $v_{ij}$  составим  $m \times n$ -матрицу  $V$ .

# Арбитраж: определение

- *Торговая политика* представляется вектором  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ :
  - если  $x_j > 0$ , то мы покупаем  $x_j$  единиц актива  $j$ ,
  - а если  $x_j < 0$ , то  $-x_j$  единиц актива  $j$  продается.
- Торговая политика называется *арбитражем*, если
  - мы можем заработать сегодня ( $p^T x < 0$ )
  - без риска потерь после завершения инвестиционного периода ( $\forall x \geq 0$ ).
- Строгое неравенство  $\sum_{j=1}^n p_j x_j < 0$  означает, что в начале периода мы получаем больше, чем тратим.
- А выполнение всех неравенств  $\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq 0$  из системы  $\forall x \geq 0$  означает, что
- обратная торговая политика  $-x$  не будет убыточной в любом из  $m$  возможных сценариев в конце периода.

# Арбитраж: определение

- Торговая политика представляется вектором  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ :
  - если  $x_j > 0$ , то мы покупаем  $x_j$  единиц актива  $j$ ,
  - а если  $x_j < 0$ , то  $-x_j$  единиц актива  $j$  продается.
- Торговая политика называется *арбитражем*, если
  - мы можем заработать сегодня ( $p^T x < 0$ )
  - без риска потерь после завершения инвестиционного периода ( $\forall x \geq 0$ ).
- Строгое неравенство  $\sum_{j=1}^n p_j x_j < 0$  означает, что в начале периода мы получаем больше, чем тратим.
- А выполнение всех неравенств  $\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq 0$  из системы  $\forall x \geq 0$  означает, что
- обратная торговая политика  $-x$  не будет убыточной в любом из  $m$  возможных сценариев в конце периода.



# Арбитраж: определение

- *Торговая политика* представляется вектором  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ :
  - если  $x_j > 0$ , то мы покупаем  $x_j$  единиц актива  $j$ ,
  - а если  $x_j < 0$ , то  $-x_j$  единиц актива  $j$  продается.
- Торговая политика называется *арбитражем*, если
  - мы можем заработать сегодня ( $p^T x < 0$ )
  - без риска потерь после завершения инвестиционного периода ( $\forall x \geq 0$ ).
- Строгое неравенство  $\sum_{j=1}^n p_j x_j < 0$  означает, что в начале периода мы получаем больше, чем тратим.
- А выполнение всех неравенств  $\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq 0$  из системы  $\forall x \geq 0$  означает, что
- обратная торговая политика  $-x$  не будет убыточной в любом из  $m$  возможных сценариев в конце периода.

# Арбитраж: определение

- Торговая политика представляется вектором  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ :
  - если  $x_j > 0$ , то мы покупаем  $x_j$  единиц актива  $j$ ,
  - а если  $x_j < 0$ , то  $-x_j$  единиц актива  $j$  продается.
- Торговая политика называется *арбитражем*, если
  - мы можем заработать сегодня ( $p^T x < 0$ )
  - без риска потерь после завершения инвестиционного периода ( $Vx \geq 0$ ).
- Строгое неравенство  $\sum_{j=1}^n p_j x_j < 0$  означает, что в начале периода мы получаем больше, чем тратим.
- А выполнение всех неравенств  $\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq 0$  из системы  $Vx \geq 0$  означает, что
- обратная торговая политика  $-x$  не будет убыточной в любом из  $m$  возможных сценариев в конце периода.

# Арбитраж: определение

- Торговая политика представляется вектором  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ :
  - если  $x_j > 0$ , то мы покупаем  $x_j$  единиц актива  $j$ ,
  - а если  $x_j < 0$ , то  $-x_j$  единиц актива  $j$  продается.
- Торговая политика называется *арбитражем*, если
  - мы можем заработать сегодня ( $p^T x < 0$ )
  - без риска потерь после завершения инвестиционного периода ( $Vx \geq 0$ ).
- Строгое неравенство  $\sum_{j=1}^n p_j x_j < 0$  означает, что в начале периода мы получаем больше, чем тратим.
- А выполнение всех неравенств  $\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq 0$  из системы  $Vx \geq 0$  означает, что
- обратная торговая политика  $-x$  не будет убыточной в любом из  $m$  возможных сценариев в конце периода.

# Арбитраж: определение

- Торговая политика представляется вектором  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ :
  - если  $x_j > 0$ , то мы покупаем  $x_j$  единиц актива  $j$ ,
  - а если  $x_j < 0$ , то  $-x_j$  единиц актива  $j$  продается.
- Торговая политика называется *арбитражем*, если
  - мы можем заработать сегодня ( $p^T x < 0$ )
  - **без риска потерь после завершения инвестиционного периода ( $Vx \geq 0$ ).**
- Строгое неравенство  $\sum_{j=1}^n p_j x_j < 0$  означает, что в начале периода мы получаем больше, чем тратим.
- А выполнение всех неравенств  $\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq 0$  из системы  $Vx \geq 0$  означает, что
- обратная торговая политика  $-x$  не будет убыточной в любом из  $m$  возможных сценариев в конце периода.

# Арбитраж: определение

- *Торговая политика* представляется вектором  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ :
  - если  $x_j > 0$ , то мы покупаем  $x_j$  единиц актива  $j$ ,
  - а если  $x_j < 0$ , то  $-x_j$  единиц актива  $j$  продается.
- Торговая политика называется *арбитражем*, если
  - мы можем заработать сегодня ( $p^T x < 0$ )
  - без риска потерь после завершения инвестиционного периода ( $Vx \geq 0$ ).
- Строгое неравенство  $\sum_{j=1}^n p_j x_j < 0$  означает, что в начале периода мы получаем больше, чем тратим.
- А выполнение всех неравенств  $\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq 0$  из системы  $Vx \geq 0$  означает, что
- обратная торговая политика  $-x$  не будет убыточной в любом из  $m$  возможных сценариев в конце периода.

# Арбитраж: определение

- *Торговая политика* представляется вектором  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ :
  - если  $x_j > 0$ , то мы покупаем  $x_j$  единиц актива  $j$ ,
  - а если  $x_j < 0$ , то  $-x_j$  единиц актива  $j$  продается.
- Торговая политика называется *арбитражем*, если
  - мы можем заработать сегодня ( $p^T x < 0$ )
  - без риска потерь после завершения инвестиционного периода ( $Vx \geq 0$ ).
- Строгое неравенство  $\sum_{j=1}^n p_j x_j < 0$  означает, что в начале периода мы получаем больше, чем тратим.
- А выполнение всех неравенств  $\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq 0$  из системы  $Vx \geq 0$  означает, что
- обратная торговая политика  $-x$  не будет убыточной в любом из  $m$  возможных сценариев в конце периода.

# Арбитраж: определение

- *Торговая политика* представляется вектором  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ :
  - если  $x_j > 0$ , то мы покупаем  $x_j$  единиц актива  $j$ ,
  - а если  $x_j < 0$ , то  $-x_j$  единиц актива  $j$  продается.
- Торговая политика называется *арбитражем*, если
  - мы можем заработать сегодня ( $p^T x < 0$ )
  - без риска потерь после завершения инвестиционного периода ( $Vx \geq 0$ ).
- Строгое неравенство  $\sum_{j=1}^n p_j x_j < 0$  означает, что в начале периода мы получаем больше, чем тратим.
- А выполнение всех неравенств  $\sum_{j=1}^n v_{ij} x_j \geq 0$  из системы  $Vx \geq 0$  означает, что
- **обратная торговая политика  $-x$  не будет убыточной в любом из  $m$  возможных сценариев в конце периода.**

# Критерий отсутствия арбитража

Поскольку на рынке цены приспособливаются очень быстро, то возможность заработать на арбитраже тоже исчезает очень быстро. Поэтому в финансовых моделях как правило предполагается, что арбитража не существует.

## Теорема 1

- 1 Арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда совместна система неравенств  $V^T y = p$ ,  $y \geq 0$ .
- 2 При фиксированных ценах  $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n$ , если имеют решения следующие задачи ЛП

$$p_j^{\min} = \min\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

$$p_j^{\max} = \max\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

то арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда  $p_j^{\min} \leq p_j \leq p_j^{\max}$ .



# Критерий отсутствия арбитража

Поскольку на рынке цены приспособливаются очень быстро, то возможность заработать на арбитраже тоже исчезает очень быстро. Поэтому в финансовых моделях как правило предполагается, что арбитража не существует.

## Теорема 1

- 1 Арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда совместна система неравенств  $V^T y = p$ ,  $y \geq 0$ .
- 2 При фиксированных ценах  $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n$ , если имеют решения следующие задачи ЛП

$$p_j^{\min} = \min\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

$$p_j^{\max} = \max\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

то арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда  $p_j^{\min} \leq p_j \leq p_j^{\max}$ .

# Критерий отсутствия арбитража

Поскольку на рынке цены приспособливаются очень быстро, то возможность заработать на арбитраже тоже исчезает очень быстро. Поэтому в финансовых моделях как правило предполагается, что арбитража не существует.

## Теорема 1

- 1 *Арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда совместна система неравенств  $V^T y = p, y \geq 0$ .*
- 2 *При фиксированных ценах  $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n$ , если имеют решения следующие задачи ЛП*

$$p_j^{\min} = \min\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

$$p_j^{\max} = \max\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

*то арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда  $p_j^{\min} \leq p_j \leq p_j^{\max}$ .*

# Критерий отсутствия арбитража

Поскольку на рынке цены приспособливаются очень быстро, то возможность заработать на арбитраже тоже исчезает очень быстро. Поэтому в финансовых моделях как правило предполагается, что арбитража не существует.

## Теорема 1

- 1 Арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда совместна система неравенств  $V^T y = p$ ,  $y \geq 0$ .
- 2 При фиксированных ценах  $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n$ , если имеют решения следующие задачи ЛП

$$p_j^{\min} = \min\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

$$p_j^{\max} = \max\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

то арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда  $p_j^{\min} \leq p_j \leq p_j^{\max}$ .

# Критерий отсутствия арбитража

Поскольку на рынке цены приспособливаются очень быстро, то возможность заработать на арбитраже тоже исчезает очень быстро. Поэтому в финансовых моделях как правило предполагается, что арбитража не существует.

## Теорема 1

- 1 Арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда совместна система неравенств  $V^T y = p$ ,  $y \geq 0$ .
- 2 При фиксированных ценах  $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n$ , *если имеют решения следующие задачи ЛП*

$$p_j^{\min} = \min\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

$$p_j^{\max} = \max\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

*то арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда  $p_j^{\min} \leq p_j \leq p_j^{\max}$ .*

# Критерий отсутствия арбитража

Поскольку на рынке цены приспособливаются очень быстро, то возможность заработать на арбитраже тоже исчезает очень быстро. Поэтому в финансовых моделях как правило предполагается, что арбитража не существует.

## Теорема 1

- 1 Арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда совместна система неравенств  $V^T y = p$ ,  $y \geq 0$ .
- 2 При фиксированных ценах  $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n$ , если имеют решения следующие задачи ЛП

$$p_j^{\min} = \min\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

$$p_j^{\max} = \max\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

то арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда  $p_j^{\min} \leq p_j \leq p_j^{\max}$ .

# Критерий отсутствия арбитража

Поскольку на рынке цены приспособливаются очень быстро, то возможность заработать на арбитраже тоже исчезает очень быстро. Поэтому в финансовых моделях как правило предполагается, что арбитража не существует.

## Теорема 1

- 1 Арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда совместна система неравенств  $V^T y = p$ ,  $y \geq 0$ .
- 2 При фиксированных ценах  $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n$ , если имеют решения следующие задачи ЛП

$$p_j^{\min} = \min\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

$$p_j^{\max} = \max\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

то арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда  $p_j^{\min} \leq p_j \leq p_j^{\max}$ .

# Критерий отсутствия арбитража

Поскольку на рынке цены приспособливаются очень быстро, то возможность заработать на арбитраже тоже исчезает очень быстро. Поэтому в финансовых моделях как правило предполагается, что арбитража не существует.

## Теорема 1

- 1 Арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда совместна система неравенств  $V^T y = p$ ,  $y \geq 0$ .
- 2 При фиксированных ценах  $p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n$ , если имеют решения следующие задачи ЛП

$$p_j^{\min} = \min\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

$$p_j^{\max} = \max\{p_j : V^T y = p, y \geq 0, p_j \geq 0\},$$

*то арбитраж отсутствует тогда и только тогда, когда  $p_j^{\min} \leq p_j \leq p_j^{\max}$ .*

# Доказательство теоремы об отсутствии арбитража

## Доказательство.

- Арбитраж существует тогда и только тогда, когда целевая функция в задаче ЛП

$$\min\{p^T x : Vx \geq 0\}$$

неограничена.

- Тогда двойственная задача ЛП

$$\max\{0^T y : V^T y = p, y \geq 0\}$$

не имеет допустимых решений.

- Обращая это утверждение, получаем утверждение 1).
- Утверждение 2) является простым следствием утверждения 1).





# Доказательство теоремы об отсутствии арбитража

## Доказательство.

- Арбитраж существует тогда и только тогда, когда целевая функция в задаче ЛП

$$\min\{p^T x : Vx \geq 0\}$$

неограничена.

- Тогда двойственная задача ЛП

$$\max\{0^T y : V^T y = p, y \geq 0\}$$

не имеет допустимых решений.

- Обращая это утверждение, получаем утверждение 1).
- Утверждение 2) является простым следствием утверждения 1).



# Доказательство теоремы об отсутствии арбитража

## Доказательство.

- Арбитраж существует тогда и только тогда, когда целевая функция в задаче ЛП

$$\min\{p^T x : Vx \geq 0\}$$

неограничена.

- Тогда двойственная задача ЛП

$$\max\{0^T y : V^T y = p, y \geq 0\}$$

не имеет допустимых решений.

- **Обращая это утверждение, получаем утверждение 1).**
- Утверждение 2) является простым следствием утверждения 1).



# Доказательство теоремы об отсутствии арбитража

## Доказательство.

- Арбитраж существует тогда и только тогда, когда целевая функция в задаче ЛП

$$\min\{p^T x : Vx \geq 0\}$$

неограничена.

- Тогда двойственная задача ЛП

$$\max\{\mathbf{0}^T y : V^T y = p, y \geq 0\}$$

не имеет допустимых решений.

- Обращая это утверждение, получаем утверждение 1).
- Утверждение 2) является простым следствием утверждения 1).



# План лекции

- 1 Модели линейного программирования
  - Задача о диете
  - Арбитраж
  - Метод DEA

# Для чего применяется метод DEA?

- Метод DEA (Data Envelopment Analysis) применяется для сравнения эффективности работы ряда аналогичных сервисных подразделений:
- отделений банка, ресторанов, учреждений образования, здравоохранения, станций технического обслуживания автомобилей и многих других.
- Метод DEA не требует стоимостной оценки предоставляемых услуг.

# Для чего применяется метод DEA?

- Метод DEA (Data Envelopment Analysis) применяется для сравнения эффективности работы ряда аналогичных сервисных подразделений:
- отделений банка, ресторанов, учреждений образования, здравоохранения, станций технического обслуживания автомобилей и многих других.
- Метод DEA не требует стоимостной оценки предоставляемых услуг.

# Для чего применяется метод DEA?

- Метод DEA (Data Envelopment Analysis) применяется для сравнения эффективности работы ряда аналогичных сервисных подразделений:
- отделений банка, ресторанов, учреждений образования, здравоохранения, станций технического обслуживания автомобилей и многих других.
- Метод DEA не требует стоимостной оценки предоставляемых услуг.

# Исходные данные

- Предположим, что имеется  $n$  подразделений, которые занумерованы числами  $1, \dots, n$ .
- За тестовый период подразделение  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) использовало  $r_{ij}$  единиц ресурса  $j$  ( $j = 1, \dots, m$ )
- и оказало  $s_{ik}$  услуг вида  $k$  ( $k = 1, \dots, l$ ).
- Эффективность работы подразделения  $i$  оценивается отношением

$$E_i(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=1}^l s_{ik} u_k}{\sum_{j=1}^m r_{ij} v_j}$$

- взвешенной суммы оказанных услуг к взвешенной сумме использованных ресурсов,
- где  $u_k$  и  $v_j$  есть весовые множители, которые нужно определить.



# Исходные данные

- Предположим, что имеется  $n$  подразделений, которые занумерованы числами  $1, \dots, n$ .
- За тестовый период подразделение  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) использовало  $r_{ij}$  единиц ресурса  $j$  ( $j = 1, \dots, m$ )
- и оказало  $s_{ik}$  услуг вида  $k$  ( $k = 1, \dots, l$ ).
- Эффективность работы подразделения  $i$  оценивается отношением

$$E_i(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=1}^l s_{ik} u_k}{\sum_{j=1}^m r_{ij} v_j}$$

- взвешенной суммы оказанных услуг к взвешенной сумме использованных ресурсов,
- где  $u_k$  и  $v_j$  есть весовые множители, которые нужно определить.

# Исходные данные

- Предположим, что имеется  $n$  подразделений, которые занумерованы числами  $1, \dots, n$ .
- За тестовый период подразделение  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) использовало  $r_{ij}$  единиц ресурса  $j$  ( $j = 1, \dots, m$ )
- и оказало  $s_{ik}$  услуг вида  $k$  ( $k = 1, \dots, l$ ).
- Эффективность работы подразделения  $i$  оценивается отношением

$$E_i(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=1}^l s_{ik} u_k}{\sum_{j=1}^m r_{ij} v_j}$$

- взвешенной суммы оказанных услуг к взвешенной сумме использованных ресурсов,
- где  $u_k$  и  $v_j$  есть весовые множители, которые нужно определить.

# Исходные данные

- Предположим, что имеется  $n$  подразделений, которые занумерованы числами  $1, \dots, n$ .
- За тестовый период подразделение  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) использовало  $r_{ij}$  единиц ресурса  $j$  ( $j = 1, \dots, m$ )
- и оказало  $s_{ik}$  услуг вида  $k$  ( $k = 1, \dots, l$ ).
- Эффективность работы подразделения  $i$  оценивается отношением

$$E_i(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=1}^l s_{ik} u_k}{\sum_{j=1}^m r_{ij} v_j}$$

- взвешенной суммы оказанных услуг к взвешенной сумме использованных ресурсов,
- где  $u_k$  и  $v_j$  есть весовые множители, которые нужно определить.

# Исходные данные

- Предположим, что имеется  $n$  подразделений, которые занумерованы числами  $1, \dots, n$ .
- За тестовый период подразделение  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) использовало  $r_{ij}$  единиц ресурса  $j$  ( $j = 1, \dots, m$ )
- и оказало  $s_{ik}$  услуг вида  $k$  ( $k = 1, \dots, l$ ).
- Эффективность работы подразделения  $i$  оценивается отношением

$$E_i(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=1}^l s_{ik} u_k}{\sum_{j=1}^m r_{ij} v_j}$$

- **взвешенной суммы оказанных услуг к взвешенной сумме использованных ресурсов,**
- где  $u_k$  и  $v_j$  есть весовые множители, которые нужно определить.

# Исходные данные

- Предположим, что имеется  $n$  подразделений, которые занумерованы числами  $1, \dots, n$ .
- За тестовый период подразделение  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) использовало  $r_{ij}$  единиц ресурса  $j$  ( $j = 1, \dots, m$ )
- и оказало  $s_{ik}$  услуг вида  $k$  ( $k = 1, \dots, l$ ).
- Эффективность работы подразделения  $i$  оценивается отношением

$$E_i(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{k=1}^l s_{ik} u_k}{\sum_{j=1}^m r_{ij} v_j}$$

- взвешенной суммы оказанных услуг к взвешенной сумме использованных ресурсов,
- где  $u_k$  и  $v_j$  есть весовые множители, которые нужно определить.

# Вычисление рейтингов

- Чтобы вычислить рейтинг подразделения  $i_0$ , нужно решить задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned} E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\ E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\ u &\in \mathbb{R}_+^l, v \in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned}$$

- в которой нужно найти наилучшие для подразделения  $i_0$  весовые множители  $u_k$  и  $v_j$ .
- Пусть пара  $(u^*, v^*)$  есть оптимальное решение данной задачи.
- Если  $E_{i_0}(u^*, v^*) < 1$ , то подразделение  $i_0$  работало неэффективно, и его работу можно улучшить,
- если перенять опыт работы у более эффективных подразделений  $i$ , для которых  $E_i(u^*, v^*) = 1$ .

# Вычисление рейтингов

- Чтобы вычислить рейтинг подразделения  $i_0$ , нужно решить задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned} E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\ E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\ u &\in \mathbb{R}_+^l, v \in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned}$$

- в которой нужно найти наилучшие для подразделения  $i_0$  весовые множители  $u_k$  и  $v_j$ .
- Пусть пара  $(u^*, v^*)$  есть оптимальное решение данной задачи.
- Если  $E_{i_0}(u^*, v^*) < 1$ , то подразделение  $i_0$  работало неэффективно, и его работу можно улучшить,
- если перенять опыт работы у более эффективных подразделений  $i$ , для которых  $E_i(u^*, v^*) = 1$ .

# Вычисление рейтингов

- Чтобы вычислить рейтинг подразделения  $i_0$ , нужно решить задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned} E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\ E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\ u &\in \mathbb{R}_+^l, v \in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned}$$

- в которой нужно найти наилучшие для подразделения  $i_0$  весовые множители  $u_k$  и  $v_j$ .
- Пусть пара  $(u^*, v^*)$  есть оптимальное решение данной задачи.
- Если  $E_{i_0}(u^*, v^*) < 1$ , то подразделение  $i_0$  работало неэффективно, и его работу можно улучшить,
- если перенять опыт работы у более эффективных подразделений  $i$ , для которых  $E_i(u^*, v^*) = 1$ .



# Вычисление рейтингов

- Чтобы вычислить рейтинг подразделения  $i_0$ , нужно решить задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned} E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\ E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\ u &\in \mathbb{R}_+^l, v \in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned}$$

- в которой нужно найти наилучшие для подразделения  $i_0$  весовые множители  $u_k$  и  $v_j$ .
- Пусть пара  $(u^*, v^*)$  есть оптимальное решение данной задачи.
- Если  $E_{i_0}(u^*, v^*) < 1$ , то подразделение  $i_0$  работало неэффективно, и его работу можно улучшить,
- если перенять опыт работы у более эффективных подразделений  $i$ , для которых  $E_i(u^*, v^*) = 1$ .

# Вычисление рейтингов

- Чтобы вычислить рейтинг подразделения  $i_0$ , нужно решить задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned} E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\ E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\ u &\in \mathbb{R}_+^l, v \in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned}$$

- в которой нужно найти наилучшие для подразделения  $i_0$  весовые множители  $u_k$  и  $v_j$ .
- Пусть пара  $(u^*, v^*)$  есть оптимальное решение данной задачи.
- Если  $E_{i_0}(u^*, v^*) < 1$ , то подразделение  $i_0$  работало неэффективно, и его работу можно улучшить,
- если перенять опыт работы у более эффективных подразделений  $i$ , для которых  $E_i(u^*, v^*) = 1$ .

# Вычисление рейтингов

- Задачу дробно-линейного программирования

$$E_{i_0}(u, v) \rightarrow \max,$$

$$E_i(u, v) \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u \in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m,$$

- можно переформулировать как следующую задачу ЛП:

$$\sum_{k=1}^l s_{i_0 k} u_k \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^m r_{i_0 j} v_j = 1,$$

$$\sum_{k=1}^l s_{ik} u_k \leq \sum_{j=1}^m r_{ij} v_j, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, l,$$

$$v_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

# Вычисление рейтингов

- Задачу дробно-линейного программирования

$$E_{i_0}(u, v) \rightarrow \max,$$

$$E_i(u, v) \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u \in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m,$$

- можно переформулировать как следующую задачу ЛП:

$$\sum_{k=1}^l s_{i_0 k} u_k \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^m r_{i_0 j} v_j = 1,$$

$$\sum_{k=1}^l s_{i k} u_k \leq \sum_{j=1}^m r_{i j} v_j, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, l,$$

$$v_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

# Вычисление рейтингов

- Задачу дробно-линейного программирования

$$E_{i_0}(u, v) \rightarrow \max,$$

$$E_i(u, v) \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u \in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m,$$

- можно переформулировать как следующую задачу ЛП:

$$\sum_{k=1}^l s_{i_0 k} u_k \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^m r_{i_0 j} v_j = 1,$$

$$\sum_{k=1}^l s_{i k} u_k \leq \sum_{j=1}^m r_{i j} v_j, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\},$$

$$u_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, l,$$

$$v_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

# Вычисление рейтингов

- Задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned}
 E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\
 E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\
 u &\in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m,
 \end{aligned}$$

- можно переформулировать как следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^l s_{i_0k} u_k &\rightarrow \max, \\
 \sum_{j=1}^m r_{i_0j} v_j &= 1, \\
 \sum_{k=1}^l s_{ik} u_k &\leq \sum_{j=1}^m r_{ij} v_j, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\
 u_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, l, \\
 v_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

# Вычисление рейтингов

- Задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned}
 E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\
 E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\
 u &\in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m,
 \end{aligned}$$

- можно переформулировать как следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^l s_{i_0k} u_k &\rightarrow \max, \\
 \sum_{j=1}^m r_{i_0j} v_j &= 1, \\
 \sum_{k=1}^l s_{ik} u_k &\leq \sum_{j=1}^m r_{ij} v_j, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\
 u_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, l, \\
 v_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

# Вычисление рейтингов

- Задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned}
 E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\
 E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\
 u &\in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m,
 \end{aligned}$$

- можно переформулировать как следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^l s_{i_0k} u_k &\rightarrow \max, \\
 \sum_{j=1}^m r_{i_0j} v_j &= 1, \\
 \sum_{k=1}^l s_{ik} u_k &\leq \sum_{j=1}^m r_{ij} v_j, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\
 u_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, l, \\
 v_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$



# Вычисление рейтингов

- Задачу дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned}
 E_{i_0}(u, v) &\rightarrow \max, \\
 E_i(u, v) &\leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\
 u &\in \mathbb{R}_+^l, \quad v \in \mathbb{R}_+^m,
 \end{aligned}$$

- можно переформулировать как следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^l s_{i_0k} u_k &\rightarrow \max, \\
 \sum_{j=1}^m r_{i_0j} v_j &= 1, \\
 \sum_{k=1}^l s_{ik} u_k &\leq \sum_{j=1}^m r_{ij} v_j, \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}, \\
 u_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, l, \\
 v_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

# Демонстрационный пример

- **Фирма быстрого питания имеет шесть подразделений, каждое из которых размещено в одном из торговых центров с большой парковкой.**
- Фирма предлагает клиентам только один стандартный набор, включающий бургергер, картофель фри и напиток.
- Менеджеры фирмы решили использовать DEA, чтобы выявить те подразделения, которые используют свои ресурсы наиболее эффективно.

# Демонстрационный пример

- Фирма быстрого питания имеет шесть подразделений, каждое из которых размещено в одном из торговых центров с большой парковкой.
- Фирма предлагает клиентам только один стандартный набор, включающий бургергер, картофель фри и напиток.
- Менеджеры фирмы решили использовать DEA, чтобы выявить те подразделения, которые используют свои ресурсы наиболее эффективно.

# Демонстрационный пример

- Фирма быстрого питания имеет шесть подразделений, каждое из которых размещено в одном из торговых центров с большой парковкой.
- Фирма предлагает клиентам только один стандартный набор, включающий бургергер, картофель фри и напиток.
- Менеджеры фирмы решили использовать DEA, чтобы выявить те подразделения, которые используют свои ресурсы наиболее эффективно.

## Данные для DEA анализа

| Подразделение | Труд (часов) | Материалы (долларов) | Наборов продано |
|---------------|--------------|----------------------|-----------------|
| 1             | 32           | 3200                 | 1600            |
| 2             | 16           | 600                  | 400             |
| 3             | 24           | 600                  | 600             |
| 4             | 24           | 400                  | 400             |
| 5             | 16           | 160                  | 200             |
| 6             | 8            | 40                   | 80              |

## Задача ЛП для вычисления рейтинга подразделения 1

| Подразделение | Труд (часов) | Материалы (долларов) | Наборов продано |
|---------------|--------------|----------------------|-----------------|
| 1             | 32           | 3200                 | 1600            |
| 2             | 16           | 600                  | 400             |
| 3             | 24           | 600                  | 600             |
| 4             | 24           | 400                  | 400             |
| 5             | 16           | 160                  | 200             |
| 6             | 8            | 40                   | 80              |

$$\begin{aligned}E_1 &= 1600u_1 \rightarrow \max, \\32v_1 + 3200v_2 &= 1, \\400u_1 - 16v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\600u_1 - 24v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\400u_1 - 24v_1 - 400v_2 &\leq 0, \\200u_1 - 16v_1 - 160v_2 &\leq 0, \\80u_1 - 8v_1 - 40v_2 &\leq 0, \\u_1, v_1, v_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

## Задача ЛП для вычисления рейтинга подразделения 1

| Подразделение | Труд (часов) | Материалы (долларов) | Наборов продано |
|---------------|--------------|----------------------|-----------------|
| 1             | 32           | 3200                 | 1600            |
| 2             | 16           | 600                  | 400             |
| 3             | 24           | 600                  | 600             |
| 4             | 24           | 400                  | 400             |
| 5             | 16           | 160                  | 200             |
| 6             | 8            | 40                   | 80              |

$$E_1 = 1600u_1 \rightarrow \max,$$

$$32v_1 + 3200v_2 = 1,$$

$$400u_1 - 16v_1 - 600v_2 \leq 0,$$

$$600u_1 - 24v_1 - 600v_2 \leq 0,$$

$$400u_1 - 24v_1 - 400v_2 \leq 0,$$

$$200u_1 - 16v_1 - 160v_2 \leq 0,$$

$$80u_1 - 8v_1 - 40v_2 \leq 0,$$

$$u_1, v_1, v_2 \geq 0.$$

## Задача ЛП для вычисления рейтинга подразделения 1

| Подразделение | Труд (часов) | Материалы (долларов) | Наборов продано |
|---------------|--------------|----------------------|-----------------|
| 1             | 32           | 3200                 | 1600            |
| 2             | 16           | 600                  | 400             |
| 3             | 24           | 600                  | 600             |
| 4             | 24           | 400                  | 400             |
| 5             | 16           | 160                  | 200             |
| 6             | 8            | 40                   | 80              |

$$E_1 = 1600u_1 \rightarrow \max,$$

$$32v_1 + 3200v_2 = 1,$$

$$400u_1 - 16v_1 - 600v_2 \leq 0,$$

$$600u_1 - 24v_1 - 600v_2 \leq 0,$$

$$400u_1 - 24v_1 - 400v_2 \leq 0,$$

$$200u_1 - 16v_1 - 160v_2 \leq 0,$$

$$80u_1 - 8v_1 - 40v_2 \leq 0,$$

$$u_1, v_1, v_2 \geq 0.$$



## Задача ЛП для вычисления рейтинга подразделения 1

| Подразделение | Труд (часов) | Материалы (долларов) | Наборов продано |
|---------------|--------------|----------------------|-----------------|
| 1             | 32           | 3200                 | 1600            |
| 2             | 16           | 600                  | 400             |
| 3             | 24           | 600                  | 600             |
| 4             | 24           | 400                  | 400             |
| 5             | 16           | 160                  | 200             |
| 6             | 8            | 40                   | 80              |

$$\begin{aligned}E_1 &= 1600u_1 \rightarrow \max, \\32v_1 + 3200v_2 &= 1, \\400u_1 - 16v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\600u_1 - 24v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\400u_1 - 24v_1 - 400v_2 &\leq 0, \\200u_1 - 16v_1 - 160v_2 &\leq 0, \\80u_1 - 8v_1 - 40v_2 &\leq 0, \\u_1, v_1, v_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

## Задача ЛП для вычисления рейтинга подразделения 1

| Подразделение | Труд (часов) | Материалы (долларов) | Наборов продано |
|---------------|--------------|----------------------|-----------------|
| 1             | 32           | 3200                 | 1600            |
| 2             | 16           | 600                  | 400             |
| 3             | 24           | 600                  | 600             |
| 4             | 24           | 400                  | 400             |
| 5             | 16           | 160                  | 200             |
| 6             | 8            | 40                   | 80              |

$$\begin{aligned}E_1 &= 1600u_1 \rightarrow \max, \\32v_1 + 3200v_2 &= 1, \\400u_1 - 16v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\600u_1 - 24v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\400u_1 - 24v_1 - 400v_2 &\leq 0, \\200u_1 - 16v_1 - 160v_2 &\leq 0, \\80u_1 - 8v_1 - 40v_2 &\leq 0, \\u_1, v_1, v_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

## Задача ЛП для вычисления рейтинга подразделения 1

| Подразделение | Труд (часов) | Материалы (долларов) | Наборов продано |
|---------------|--------------|----------------------|-----------------|
| 1             | 32           | 3200                 | 1600            |
| 2             | 16           | 600                  | 400             |
| 3             | 24           | 600                  | 600             |
| 4             | 24           | 400                  | 400             |
| 5             | 16           | 160                  | 200             |
| 6             | 8            | 40                   | 80              |

$$\begin{aligned}E_1 &= 1600u_1 \rightarrow \max, \\32v_1 + 3200v_2 &= 1, \\400u_1 - 16v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\600u_1 - 24v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\400u_1 - 24v_1 - 400v_2 &\leq 0, \\200u_1 - 16v_1 - 160v_2 &\leq 0, \\80u_1 - 8v_1 - 40v_2 &\leq 0, \\u_1, v_1, v_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

# Задача ЛП для вычисления рейтинга подразделения 1

| Подразделение | Труд (часов) | Материалы (долларов) | Наборов продано |
|---------------|--------------|----------------------|-----------------|
| 1             | 32           | 3200                 | 1600            |
| 2             | 16           | 600                  | 400             |
| 3             | 24           | 600                  | 600             |
| 4             | 24           | 400                  | 400             |
| 5             | 16           | 160                  | 200             |
| 6             | 8            | 40                   | 80              |

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 1600u_1 \rightarrow \max, \\
 32v_1 + 3200v_2 &= 1, \\
 400u_1 - 16v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\
 600u_1 - 24v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\
 400u_1 - 24v_1 - 400v_2 &\leq 0, \\
 200u_1 - 16v_1 - 160v_2 &\leq 0, \\
 80u_1 - 8v_1 - 40v_2 &\leq 0, \\
 u_1, v_1, v_2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

## Задача ЛП для вычисления рейтинга подразделения 1

| Подразделение | Труд (часов) | Материалы (долларов) | Наборов продано |
|---------------|--------------|----------------------|-----------------|
| 1             | 32           | 3200                 | 1600            |
| 2             | 16           | 600                  | 400             |
| 3             | 24           | 600                  | 600             |
| 4             | 24           | 400                  | 400             |
| 5             | 16           | 160                  | 200             |
| 6             | 8            | 40                   | 80              |

$$\begin{aligned}E_1 &= 1600u_1 \rightarrow \max, \\32v_1 + 3200v_2 &= 1, \\400u_1 - 16v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\600u_1 - 24v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\400u_1 - 24v_1 - 400v_2 &\leq 0, \\200u_1 - 16v_1 - 160v_2 &\leq 0, \\80u_1 - 8v_1 - 40v_2 &\leq 0, \\u_1, v_1, v_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

## Задача ЛП для вычисления рейтинга подразделения 1

| Подразделение | Труд (часов) | Материалы (долларов) | Наборов продано |
|---------------|--------------|----------------------|-----------------|
| 1             | 32           | 3200                 | 1600            |
| 2             | 16           | 600                  | 400             |
| 3             | 24           | 600                  | 600             |
| 4             | 24           | 400                  | 400             |
| 5             | 16           | 160                  | 200             |
| 6             | 8            | 40                   | 80              |

$$\begin{aligned}E_1 &= 1600u_1 \rightarrow \max, \\32v_1 + 3200v_2 &= 1, \\400u_1 - 16v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\600u_1 - 24v_1 - 600v_2 &\leq 0, \\400u_1 - 24v_1 - 400v_2 &\leq 0, \\200u_1 - 16v_1 - 160v_2 &\leq 0, \\80u_1 - 8v_1 - 40v_2 &\leq 0, \\u_1, v_1, v_2 &\geq 0.\end{aligned}$$