Смешанно-целочисленное программирование

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2015

План лекции

1. Целочисленность и нелинейность
   - Задача смешанно-целочисленного программирования
   - Фиксированные доплаты
   - Дискретные переменные
   - Аппроксимация нелинейной функции
2. Логические условия
   - Булевы формулы
   - Множественные альтернативы и дизъюнкции
   - Линейная задача о дополнительности

План лекции

Задача смешанно-целочисленного программирования

- Задача смешанно-целочисленного программирования (СЦП) есть следующая оптимизационная задача:

$$\max\{c^T x \ :\ b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\},$$

  где
  - $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
  - $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
  - A — действительная $m \times n$-матрица,
  - x — n-вектор переменных (неизвестных),
  - а $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.

- В задаче *целочисленного программирования* (ЦП) все переменные целочисленны ($|S| = n$).

Задача смешанно-целочисленного программирования

- Задача смешанно-целочисленного программирования (СЦП) есть следующая оптимизационная задача:

$$\max\{c^T x \,:\, b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\},$$

  где
  - $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
  - $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
  - A — действительная $m \times n$-матрица,
  - x — n-вектор переменных (неизвестных),
  - а $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.
- В задаче *целочисленного программирования* (ЦП) все переменные целочисленны ($|S| = n$).

Задача смешанно-целочисленного программирования

- Задача смешанно-целочисленного программирования (СЦП) есть следующая оптимизационная задача:

$$\max\{c^T x \;:\; b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\},$$

  где
  - $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
  - $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
  - A — действительная $m \times n$-матрица,
  - x — n-вектор переменных (неизвестных),
  - а $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.
- В задаче *целочисленного программирования* (ЦП) все переменные целочисленны ($|S| = n$).

Задача смешанно-целочисленного программирования

- Задача смешанно-целочисленного программирования (СЦП) есть следующая оптимизационная задача:

$$\max\{c^T x \,:\, b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\},$$

  где
  - $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
  - $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
  - A — действительная $m \times n$-матрица,
  - x — n-вектор переменных (неизвестных),
  - а $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.

- В задаче *целочисленного программирования* (ЦП) все переменные целочисленны ($|S| = n$).

Задача смешанно-целочисленного программирования

- Задача смешанно-целочисленного программирования (СЦП) есть следующая оптимизационная задача:

$$\max\{c^T x \;:\; b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\},$$

  где
  - $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
  - $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
  - A — действительная $m \times n$-матрица,
  - x — n-вектор переменных (неизвестных),
  - а $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.
- В задаче *целочисленного программирования* (ЦП) все переменные целочисленны ($|S| = n$).

Задача смешанно-целочисленного программирования

- Задача смешанно-целочисленного программирования (СЦП) есть следующая оптимизационная задача:

$$\max\{c^T x \,:\, b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\},$$

  где
  - $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
  - $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
  - A — действительная $m \times n$-матрица,
  - x — n-вектор переменных (неизвестных),
  - а $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.
- В задаче *целочисленного программирования* (ЦП) все переменные целочисленны ($|S| = n$).

Задача смешанно-целочисленного программирования

- Задача смешанно-целочисленного программирования (СЦП) есть следующая оптимизационная задача:

$$\max\{c^T x \;:\; b^1 \le Ax \le b^2,\ d^1 \le x \le d^2,\ x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\},$$

  где
  - $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m$,
  - $c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$,
  - A — действительная $m \times n$-матрица,
  - x — n-вектор переменных (неизвестных),
  - а $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ есть множество целочисленных переменных.
- В задаче *целочисленного программирования* (ЦП) все переменные целочисленны ($|S| = n$).

Отличие задач СЦП и ЛП

- Задача СЦП отличается от задачи линейного программирования (ЛП) тем,
- что некоторые переменные могут принимать значения из дискретного множества.
- Это отличие делает задачу СЦП
  - существенно более полезной на практике,
  - но существенно сложнее с алгоритмической точки зрения.
- Можно сказать, что задача СЦП — это одна из самых трудных задач математического программирования.
- И это неудивительно, поскольку даже самые трудные комбинаторные задачи очень просто формулируются как задачи СЦП.
- Одно из самых распространенных применений СЦП в повседневной жизни касается эффективного использования ограниченных ресурсов.

Отличие задач СЦП и ЛП

- Задача СЦП отличается от задачи линейного программирования (ЛП) тем,
- что некоторые переменные могут принимать значения из дискретного множества.
- Это отличие делает задачу СЦП
  - существенно более полезной на практике,
  - но существенно сложнее с алгоритмической точки зрения.
- Можно сказать, что задача СЦП — это одна из самых трудных задач математического программирования.
- И это неудивительно, поскольку даже самые трудные комбинаторные задачи очень просто формулируются как задачи СЦП.
- Одно из самых распространенных применений СЦП в повседневной жизни касается эффективного использования ограниченных ресурсов.

Отличие задач СЦП и ЛП

- Задача СЦП отличается от задачи линейного программирования (ЛП) тем,
- что некоторые переменные могут принимать значения из дискретного множества.
- Это отличие делает задачу СЦП
  - существенно более полезной на практике,
  - но существенно сложнее с алгоритмической точки зрения.
- Можно сказать, что задача СЦП — это одна из самых трудных задач математического программирования.
- И это неудивительно, поскольку даже самые трудные комбинаторные задачи очень просто формулируются как задачи СЦП.
- Одно из самых распространенных применений СЦП в повседневной жизни касается эффективного использования ограниченных ресурсов.

Отличие задач СЦП и ЛП

- Задача СЦП отличается от задачи линейного программирования (ЛП) тем,
- что некоторые переменные могут принимать значения из дискретного множества.
- Это отличие делает задачу СЦП
  - существенно более полезной на практике,
  - но существенно сложнее с алгоритмической точки зрения.
- Можно сказать, что задача СЦП — это одна из самых трудных задач математического программирования.
- И это неудивительно, поскольку даже самые трудные комбинаторные задачи очень просто формулируются как задачи СЦП.
- Одно из самых распространенных применений СЦП в повседневной жизни касается эффективного использования ограниченных ресурсов.

Отличие задач СЦП и ЛП

- Задача СЦП отличается от задачи линейного программирования (ЛП) тем,
- что некоторые переменные могут принимать значения из дискретного множества.
- Это отличие делает задачу СЦП
  - существенно более полезной на практике,
  - но существенно сложнее с алгоритмической точки зрения.
- Можно сказать, что задача СЦП — это одна из самых трудных задач математического программирования.
- И это неудивительно, поскольку даже самые трудные комбинаторные задачи очень просто формулируются как задачи СЦП.
- Одно из самых распространенных применений СЦП в повседневной жизни касается эффективного использования ограниченных ресурсов.

Отличие задач СЦП и ЛП

- Задача СЦП отличается от задачи линейного программирования (ЛП) тем,
- что некоторые переменные могут принимать значения из дискретного множества.
- Это отличие делает задачу СЦП
  - существенно более полезной на практике,
  - но существенно сложнее с алгоритмической точки зрения.
- Можно сказать, что задача СЦП — это одна из самых трудных задач математического программирования.
- И это неудивительно, поскольку даже самые трудные комбинаторные задачи очень просто формулируются как задачи СЦП.
- Одно из самых распространенных применений СЦП в повседневной жизни касается эффективного использования ограниченных ресурсов.

Отличие задач СЦП и ЛП

- Задача СЦП отличается от задачи линейного программирования (ЛП) тем,
- что некоторые переменные могут принимать значения из дискретного множества.
- Это отличие делает задачу СЦП
  - существенно более полезной на практике,
  - но существенно сложнее с алгоритмической точки зрения.
- Можно сказать, что задача СЦП — это одна из самых трудных задач математического программирования.
- И это неудивительно, поскольку даже самые трудные комбинаторные задачи очень просто формулируются как задачи СЦП.
- Одно из самых распространенных применений СЦП в повседневной жизни касается эффективного использования ограниченных ресурсов.

Отличие задач СЦП и ЛП

- Задача СЦП отличается от задачи линейного программирования (ЛП) тем,
- что некоторые переменные могут принимать значения из дискретного множества.
- Это отличие делает задачу СЦП
    - существенно более полезной на практике,
    - но существенно сложнее с алгоритмической точки зрения.
- Можно сказать, что задача СЦП — это одна из самых трудных задач математического программирования.
- И это неудивительно, поскольку даже самые трудные комбинаторные задачи очень просто формулируются как задачи СЦП.
- Одно из самых распространенных применений СЦП в повседневной жизни касается эффективного использования ограниченных ресурсов.

План лекции

Фиксированные доплаты

- Одно из главных ограничений по применению линейного программирования для решения задач производственного планирования — это невозможность учесть фиксированные издержки.
- В моделях СЦП учет фиксированных издержек осуществляется просто.

Фиксированные доплаты

- Одно из главных ограничений по применению линейного программирования для решения задач производственного планирования — это невозможность учесть фиксированные издержки.
- В моделях СЦП учет фиксированных издержек осуществляется просто.

Фиксированные доплаты

Функция стоимости с фиксированными доплатами имеет вид

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ax+b, & \text{если } 0 < l \le x \le u, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где

- a — переменные издержки,
- b — постоянные издержки.

Ее график представлен на рис. справа.

- Если ввести *бинарную переменную* y, которая принимает одно из двух значений 0 или 1,
- и добавить неравенства $ly \le x \le uy$,
- то функцию $c(x)$ можно преобразовать в линейную

$$\bar{c}(x,y) = ax + by.$$

Фиксированные доплаты

Функция стоимости с фиксированными доплатами имеет вид

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ax+b, & \text{если } 0 < l \le x \le u, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где

- a — переменные издержки,
- b — постоянные издержки.

Ее график представлен на рис. справа.

- Если ввести *бинарную переменную* y, которая принимает одно из двух значений 0 или 1,
- и добавить неравенства $ly \le x \le uy$,
- то функцию $c(x)$ можно преобразовать в линейную

$$\bar{c}(x, y) = ax + by.$$

Фиксированные доплаты

Функция стоимости с фиксированными доплатами имеет вид

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ax+b, & \text{если } 0 < l \le x \le u, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где

- a — переменные издержки,
- b — постоянные издержки.

Ее график представлен на рис. справа.

- Если ввести *бинарную переменную* y, которая принимает одно из двух значений 0 или 1,
- и добавить неравенства $ly \le x \le uy$,
- то функцию $c(x)$ можно преобразовать в линейную

$$\bar{c}(x,y) = ax + by.$$

Фиксированные доплаты

Функция стоимости с фиксированными доплатами имеет вид

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ax + b, & \text{если } 0 < l \le x \le u, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где

- a — переменные издержки,
- b — постоянные издержки.

Ее график представлен на рис. справа.

- Если ввести *бинарную переменную* y, которая принимает одно из двух значений 0 или 1,
- и добавить неравенства $ly \le x \le uy$,
- то функцию $c(x)$ можно преобразовать в линейную

$$\bar{c}(x, y) = ax + by.$$

Фиксированные доплаты

Функция стоимости с фиксированными доплатами имеет вид

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ax+b, & \text{если } 0 < l \le x \le u, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где

- a — переменные издержки,
- b — постоянные издержки.

Ее график представлен на рис. справа.

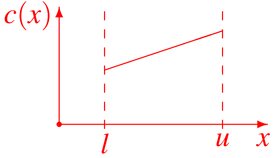
- Если ввести *бинарную переменную* y, которая принимает одно из двух значений 0 или 1,
- и добавить неравенства $ly \le x \le uy$,
- то функцию $c(x)$ можно преобразовать в линейную

$$\bar{c}(x,y) = ax + by.$$

Фиксированные доплаты

Функция стоимости с фиксированными доплатами имеет вид

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ax+b, & \text{если } 0 < l \le x \le u, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$



где

- a — переменные издержки,
- b — постоянные издержки.

Ее график представлен на рис. справа.

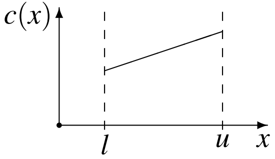
- Если ввести *бинарную переменную* y, которая принимает одно из двух значений 0 или 1,
- и добавить неравенства $ly \le x \le uy$,
- то функцию $c(x)$ можно преобразовать в линейную

$$\bar{c}(x,y) = ax + by.$$

Фиксированные доплаты

Функция стоимости с фиксированными доплатами имеет вид

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ax + b, & \text{если } 0 < l \le x \le u, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$



где

- a — переменные издержки,
- b — постоянные издержки.

Ее график представлен на рис. справа.

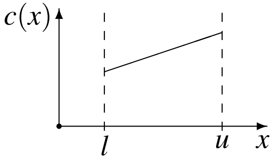
- Если ввести *бинарную переменную* y, которая принимает одно из двух значений 0 или 1,
- и добавить неравенства $ly \le x \le uy$,
- то функцию $c(x)$ можно преобразовать в линейную

$$\bar{c}(x, y) = ax + by.$$

Фиксированные доплаты

Функция стоимости с фиксированными доплатами имеет вид

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ax+b, & \text{если } 0 < l \le x \le u, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$



где

- a — переменные издержки,
- b — постоянные издержки.

Ее график представлен на рис. справа.

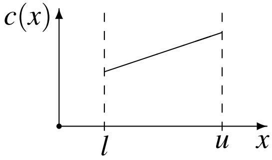
- Если ввести *бинарную переменную* y, которая принимает одно из двух значений 0 или 1,
- и добавить неравенства $ly \le x \le uy$,
- то функцию $c(x)$ можно преобразовать в линейную

$$\bar{c}(x,y) = ax + by.$$

Фиксированные доплаты

Функция стоимости с фиксированными доплатами имеет вид

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ax + b, & \text{если } 0 < l \le x \le u, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$



где

- a — переменные издержки,
- b — постоянные издержки.

Ее график представлен на рис. справа.

- Если ввести *бинарную переменную* y, которая принимает одно из двух значений 0 или 1,
- и добавить неравенства $ly \le x \le uy$,
- то функцию $c(x)$ можно преобразовать в линейную

$$\bar{c}(x, y) = ax + by.$$

План лекции

1. Целочисленность и нелинейность
   - Задача смешанно-целочисленного программирования
   - Фиксированные доплаты
   - Дискретные переменные
   - Аппроксимация нелинейной функции
2. Логические условия
   - Булевы формулы
   - Множественные альтернативы и дизъюнкции
   - Линейная задача о дополнительности

Дискретные переменные

- *Дискретная переменная* x может принимать только конечное число значений $v_1, \dots, v_k$.
- Например, в задаче проектирования автомобиля объем двигателя x может принимать, скажем, одно из четырех значений: 1.4, 1.6, 1.9 и 2.0 литра.
- Дискретную переменную x можно представить как обычную непрерывную переменную,
  - вводя бинарные переменные $y_1, \dots, y_k$
  - и записывая ограничения

$$
\begin{aligned}
x - v_1 y_1 - v_2 y_2 - \dots - v_k y_k &= 0, \\
y_1 + y_2 + \dots + y_k &= 1, \\
y_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i &= 1, \dots, k.
\end{aligned}
$$

Дискретные переменные

- *Дискретная переменная* x может принимать только конечное число значений $v_1, \dots, v_k$.
- Например, в задаче проектирования автомобиля объем двигателя x может принимать, скажем, одно из четырех значений: 1.4, 1.6, 1.9 и 2.0 литра.
- Дискретную переменную x можно представить как обычную непрерывную переменную,
  - вводя бинарные переменные $y_1, \dots, y_k$
  - и записывая ограничения

Дискретные переменные

- *Дискретная переменная* x может принимать только конечное число значений $v_1, \dots, v_k$.
- Например, в задаче проектирования автомобиля объем двигателя x может принимать, скажем, одно из четырех значений: 1.4, 1.6, 1.9 и 2.0 литра.
- Дискретную переменную x можно представить как обычную непрерывную переменную,
  - вводя бинарные переменные $y_1, \dots, y_k$
  - и записывая ограничения

$$\begin{aligned} x - v_1 y_1 - v_2 y_2 - \dots - v_k y_k &= 0, \\ y_1 + y_2 + \dots + y_k &= 1, \\ y_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i &= 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Дискретные переменные

- *Дискретная переменная* x может принимать только конечное число значений $v_1, \dots, v_k$.
- Например, в задаче проектирования автомобиля объем двигателя x может принимать, скажем, одно из четырех значений: 1.4, 1.6, 1.9 и 2.0 литра.
- Дискретную переменную x можно представить как обычную непрерывную переменную,
  - вводя бинарные переменные $y_1, \dots, y_k$
  - и записывая ограничения

$$
\begin{aligned}
x - v_1 y_1 - v_2 y_2 - \dots - v_k y_k &= 0, \\
y_1 + y_2 + \dots + y_k &= 1, \\
y_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i &= 1, \dots, k.
\end{aligned}
$$

Дискретные переменные

- *Дискретная переменная* x может принимать только конечное число значений $v_1, \dots, v_k$.
- Например, в задаче проектирования автомобиля объем двигателя x может принимать, скажем, одно из четырех значений: 1.4, 1.6, 1.9 и 2.0 литра.
- Дискретную переменную x можно представить как обычную непрерывную переменную,
  - вводя бинарные переменные $y_1, \dots, y_k$
  - и записывая ограничения

$$
\begin{aligned}
x - v_1 y_1 - v_2 y_2 - \dots - v_k y_k &= 0,\\
y_1 + y_2 + \dots + y_k &= 1,\\
y_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i &= 1, \dots, k.
\end{aligned}
$$

Дискретные переменные

- *Дискретная переменная* x может принимать только конечное число значений $v_1, \dots, v_k$.
- Например, в задаче проектирования автомобиля объем двигателя x может принимать, скажем, одно из четырех значений: 1.4, 1.6, 1.9 и 2.0 литра.
- Дискретную переменную x можно представить как обычную непрерывную переменную,
  - вводя бинарные переменные $y_1, \dots, y_k$
  - и записывая ограничения

$$x - v_1 y_1 - v_2 y_2 - \dots - v_k y_k = 0,$$
$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = 1,$$
$$y_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \dots, k.$$

Дискретные переменные

- *Дискретная переменная* x может принимать только конечное число значений $v_1, \dots, v_k$.
- Например, в задаче проектирования автомобиля объем двигателя x может принимать, скажем, одно из четырех значений: 1.4, 1.6, 1.9 и 2.0 литра.
- Дискретную переменную x можно представить как обычную непрерывную переменную,
  - вводя бинарные переменные $y_1, \dots, y_k$
  - и записывая ограничения

$$\begin{aligned} x - v_1 y_1 - v_2 y_2 - \dots - v_k y_k &= 0, \\ y_1 + y_2 + \dots + y_k &= 1, \\ y_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i &= 1, \dots, k. \end{aligned}$$

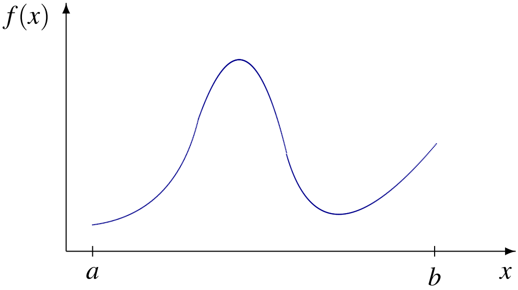
Дискретные переменные

- *Дискретная переменная* x может принимать только конечное число значений $v_1, \dots, v_k$.
- Например, в задаче проектирования автомобиля объем двигателя x может принимать, скажем, одно из четырех значений: 1.4, 1.6, 1.9 и 2.0 литра.
- Дискретную переменную x можно представить как обычную непрерывную переменную,
  - вводя бинарные переменные $y_1, \dots, y_k$
  - и записывая ограничения

$$\begin{aligned} x - v_1 y_1 - v_2 y_2 - \ldots - v_k y_k &= 0, \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_k &= 1, \\ y_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i &= 1, \dots, k. \end{aligned}$$

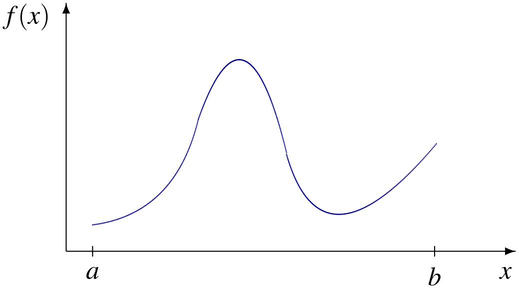
План лекции

Аппроксимация нелинейной функции



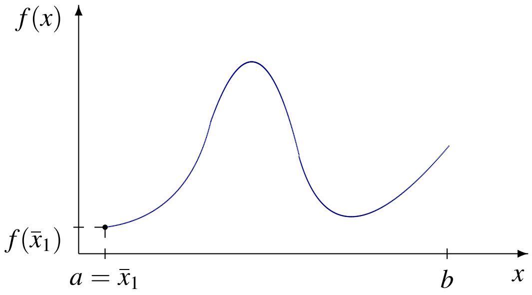
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a,b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



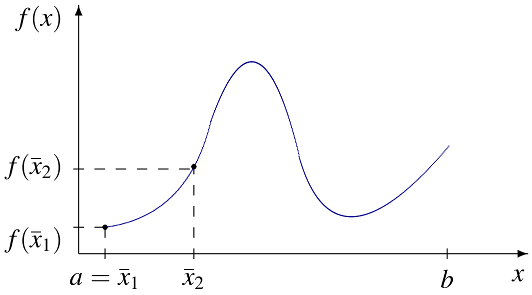
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



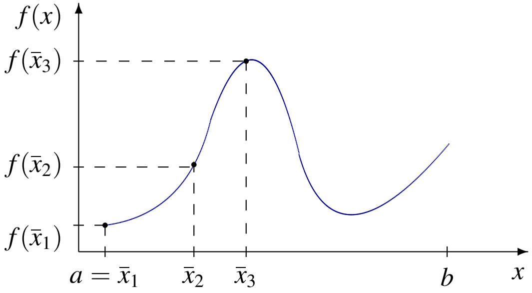
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



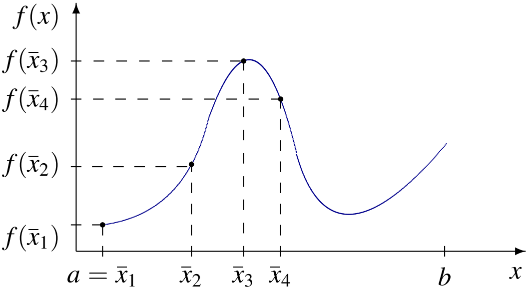
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



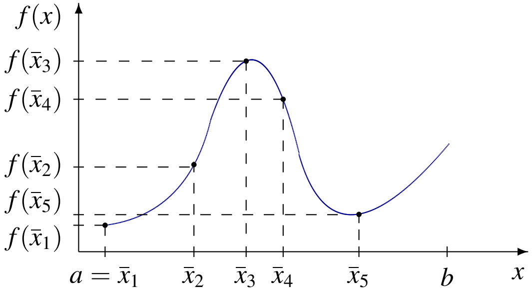
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



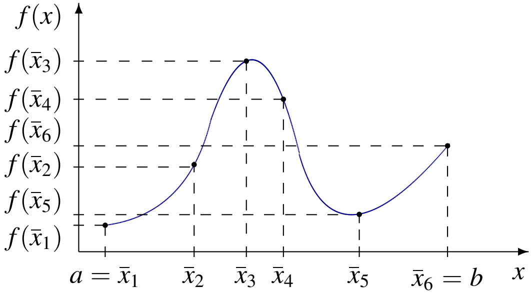
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



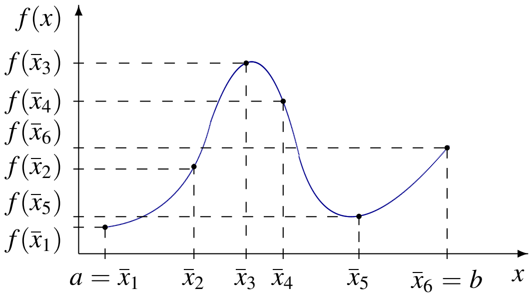
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



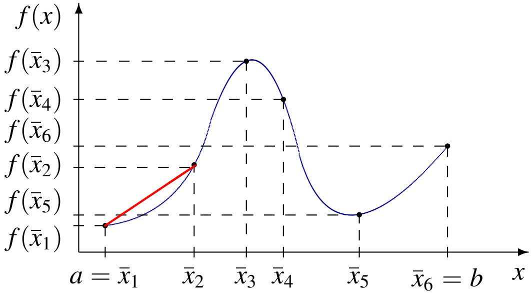
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



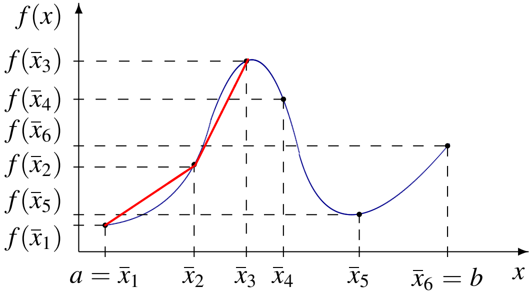
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



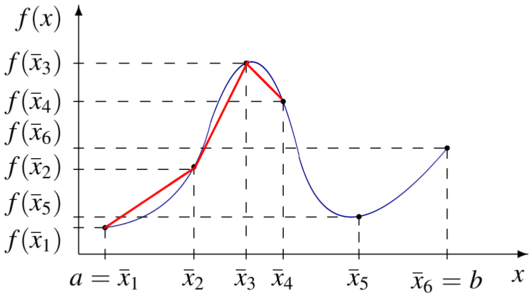
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



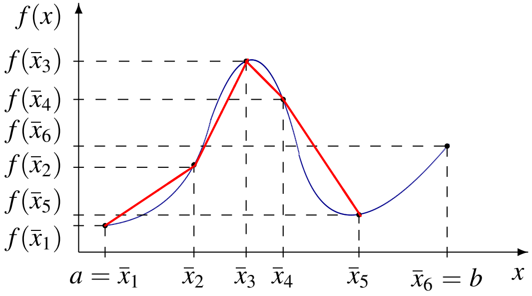
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



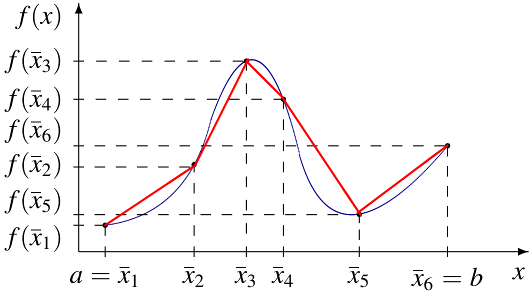
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a,b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



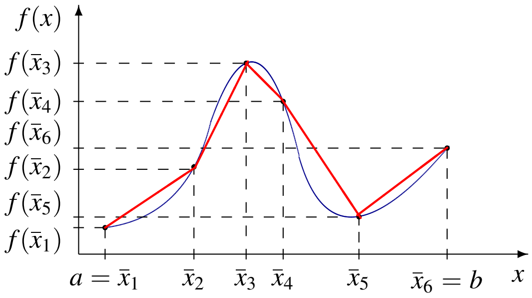
- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции



- Нелинейная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.
- Выберем разбиение $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$ отрезка $[a, b]$.
- Соединяя соседние точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k = f(\bar{x}_k))$ и $(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1} = f(\bar{x}_{k+1}))$ отрезками прямых,
- мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции

То, что точка $(x,y)^T$ лежит на графике функции $\tilde{f}$, выражается следующей системой ограничений:

$$0 \le \lambda_k \le \delta_k,\ \delta_k \in \{0,1\}, \quad k=1,\dots,r,$$
$$\delta_i + \delta_j \le 1, \quad j=3,\dots,r;\ i=1,\dots,j-2,$$
$$x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{x}_k, \quad y = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{y}_k, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1.$$

- Первые две группы ограничений означают, что среди чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ не более двух ненулевых, причем, если два числа λ_{j_1} и λ_{j_2} ненулевые, то они соседние, т. е. $|j_1 - j_2| = 1$.
- Следующие три равенства означают, что точка $(x,y)^T$ принадлежит выпуклой оболочке точек $(\bar{x}_k, f(\bar{x}_k))^T$, $k=1,\dots,r$.
- Все условия вместе гарантируют, что точка $(x,y)^T$ лежит на графике функции $\tilde{f}(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции

То, что точка $(x,y)^T$ лежит на графике функции $\tilde{f}$, выражается следующей системой ограничений:

$$
\begin{gathered}
0 \le \lambda_k \le \delta_k,\ \delta_k \in \{0,1\}, \quad k = 1,\dots,r, \\
\delta_i + \delta_j \le 1, \quad j = 3,\dots,r;\ i = 1,\dots,j-2, \\
x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{x}_k, \quad y = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{y}_k, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1.
\end{gathered}
$$

- Первые две группы ограничений означают, что среди чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ не более двух ненулевых, причем, если два числа λ_{j_1} и λ_{j_2} ненулевые, то они соседние, т. е. $|j_1 - j_2| = 1$.
- Следующие три равенства означают, что точка $(x,y)^T$ принадлежит выпуклой оболочке точек $(\bar{x}_k, f(\bar{x}_k))^T$, $k = 1,\dots,r$.
- Все условия вместе гарантируют, что точка $(x,y)^T$ лежит на графике функции $\tilde{f}(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции

То, что точка $(x,y)^T$ лежит на графике функции $\tilde{f}$, выражается следующей системой ограничений:

$$0 \le \lambda_k \le \delta_k,\ \delta_k \in \{0,1\}, \quad k = 1,\dots,r,$$
$$\delta_i + \delta_j \le 1, \quad j = 3,\dots,r;\ i = 1,\dots,j-2,$$
$$x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{x}_k, \quad y = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{y}_k, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1.$$

- Первые две группы ограничений означают, что среди чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ не более двух ненулевых, причем, если два числа λ_{j_1} и λ_{j_2} ненулевые, то они соседние, т. е. $|j_1 - j_2| = 1$.
- Следующие три равенства означают, что точка $(x,y)^T$ принадлежит выпуклой оболочке точек $(\bar{x}_k, f(\bar{x}_k))^T$, $k = 1,\dots,r$.
- Все условия вместе гарантируют, что точка $(x,y)^T$ лежит на графике функции $\tilde{f}(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции

То, что точка $(x,y)^T$ лежит на графике функции $\tilde{f}$, выражается следующей системой ограничений:

$$0 \le \lambda_k \le \delta_k,\ \delta_k \in \{0,1\}, \quad k = 1,\dots,r,$$
$$\delta_i + \delta_j \le 1, \quad j = 3,\dots,r;\ i = 1,\dots,j-2,$$
$$x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{x}_k, \quad y = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{y}_k, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1.$$

- Первые две группы ограничений означают, что среди чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ не более двух ненулевых, причем, если два числа λ_{j_1} и λ_{j_2} ненулевые, то они соседние, т. е. $|j_1 - j_2| = 1$.
- Следующие три равенства означают, что точка $(x,y)^T$ принадлежит выпуклой оболочке точек $(\bar{x}_k, f(\bar{x}_k))^T$, $k = 1,\dots,r$.
- Все условия вместе гарантируют, что точка $(x,y)^T$ лежит на графике функции $\tilde{f}(x)$.

Аппроксимация нелинейной функции

То, что точка $(x,y)^T$ лежит на графике функции $\tilde{f}$, выражается следующей системой ограничений:

$$0 \le \lambda_k \le \delta_k,\ \delta_k \in \{0,1\}, \quad k = 1,\dots,r,$$
$$\delta_i + \delta_j \le 1, \quad j = 3,\dots,r;\ i = 1,\dots,j-2,$$
$$x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{x}_k, \quad y = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{y}_k, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1.$$

- Первые две группы ограничений означают, что среди чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ не более двух ненулевых, причем, если два числа λ_{j_1} и λ_{j_2} ненулевые, то они соседние, т. е. $|j_1 - j_2| = 1$.
- Следующие три равенства означают, что точка $(x,y)^T$ принадлежит выпуклой оболочке точек $(\bar{x}_k, f(\bar{x}_k))^T$, $k = 1,\dots,r$.
- Все условия вместе гарантируют, что точка $(x,y)^T$ лежит на графике функции $\tilde{f}(x)$.

План лекции

Булевы переменные и формулы

- Формально мы записываем логические условия с помощью булевых переменных и формул.
- *Булева переменная* может принимать только два значения: истина и ложь.
- Из булевых переменных с помощью бинарных логических операций $\vee$ (*или*), $\wedge$ (*и*)
- и унарной операции $\neg$ ($\neg x$ означает *не* x)
- можно образовывать *булевы формулы* почти так же, как из действительных переменных с помощью арифметических операций можно образовывать алгебраические выражения.
- Например, $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$ есть булева формула.

Булевы переменные и формулы

- Формально мы записываем логические условия с помощью булевых переменных и формул.
- *Булева переменная* может принимать только два значения: истина и ложь.
- Из булевых переменных с помощью бинарных логических операций $\vee$ (*или*), $\wedge$ (*и*)
- и унарной операции $\neg$ ($\neg x$ означает *не* x)
- можно образовывать *булевы формулы* почти так же, как из действительных переменных с помощью арифметических операций можно образовывать алгебраические выражения.
- Например, $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$ есть булева формула.

Булевы переменные и формулы

- Формально мы записываем логические условия с помощью булевых переменных и формул.
- *Булева переменная* может принимать только два значения: **истина** и **ложь**.
- Из булевых переменных с помощью бинарных логических операций $\vee$ (*или*), $\wedge$ (*и*)
- и унарной операции $\neg$ ($\neg x$ означает *не* x)
- можно образовывать *булевы формулы* почти так же, как из действительных переменных с помощью арифметических операций можно образовывать алгебраические выражения.
- Например, $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$ есть булева формула.

Булевы переменные и формулы

- Формально мы записываем логические условия с помощью булевых переменных и формул.
- *Булева переменная* может принимать только два значения: **истина** и **ложь**.
- Из булевых переменных с помощью бинарных логических операций $\vee$ (*или*), $\wedge$ (*и*)
- и унарной операции $\neg$ ($\neg x$ означает *не* x)
- можно образовывать *булевы формулы* почти так же, как из действительных переменных с помощью арифметических операций можно образовывать алгебраические выражения.
- Например, $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$ есть булева формула.

Булевы переменные и формулы

- Формально мы записываем логические условия с помощью булевых переменных и формул.
- *Булева переменная* может принимать только два значения: **истина** и **ложь**.
- Из булевых переменных с помощью бинарных логических операций $\vee$ (*или*), $\wedge$ (*и*)
- и унарной операции $\neg$ ($\neg x$ означает *не* x)
- можно образовывать *булевы формулы* почти так же, как из действительных переменных с помощью арифметических операций можно образовывать алгебраические выражения.
- Например, $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$ есть булева формула.

Булевы переменные и формулы

- Формально мы записываем логические условия с помощью булевых переменных и формул.
- *Булева переменная* может принимать только два значения: **истина** и **ложь**.
- Из булевых переменных с помощью бинарных логических операций $\vee$ (*или*), $\wedge$ (*и*)
- и унарной операции $\neg$ ($\neg x$ означает *не* x)
- можно образовывать *булевы формулы* почти так же, как из действительных переменных с помощью арифметических операций можно образовывать алгебраические выражения.
- Например, $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$ есть булева формула.

Булевы переменные и формулы

- Формально мы записываем логические условия с помощью булевых переменных и формул.
- *Булева переменная* может принимать только два значения: **истина** и **ложь**.
- Из булевых переменных с помощью бинарных логических операций $\vee$ (*или*), $\wedge$ (*и*)
- и унарной операции $\neg$ ($\neg x$ означает *не* x)
- можно образовывать *булевы формулы* почти так же, как из действительных переменных с помощью арифметических операций можно образовывать алгебраические выражения.
- Например, $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$ есть булева формула.

Булевы переменные и формулы

- Формально мы записываем логические условия с помощью булевых переменных и формул.
- *Булева переменная* может принимать только два значения: **истина** и **ложь**.
- Из булевых переменных с помощью бинарных логических операций $\vee$ (*или*), $\wedge$ (*и*)
- и унарной операции $\neg$ ($\neg x$ означает *не* x)
- можно образовывать *булевы формулы* почти так же, как из действительных переменных с помощью арифметических операций можно образовывать алгебраические выражения.
- Например, $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$ есть булева формула.

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	истина
истина	ложь

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	ложь	ложь	ложь
истина	ложь	ложь	истина
ложь	истина	ложь	истина
истина	истина	истина	истина

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	истина
истина	ложь

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	ложь	ложь	ложь
истина	ложь	ложь	истина
ложь	истина	ложь	истина
истина	истина	истина	истина

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Таблицы истинности логических операций

- Логическая операция $\neg$

x	$\neg x$
ложь	**истина**
истина	**ложь**

- Логические операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
ложь	**ложь**	**ложь**	**ложь**
истина	**ложь**	**ложь**	**истина**
ложь	**истина**	**ложь**	**истина**
истина	**истина**	**истина**	**истина**

Вычисление значения булевой формулы

- Подставляя значения для булевых переменных, мы можем вычислить значение булевой формулы.
- Например, для набора истинности

$$(x_1, x_2, x_3) = (\textbf{истина},\textbf{ложь},\textbf{ложь})$$

- булева формула $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- принимает значение $(\textbf{истина} \vee \neg \textbf{ложь}) \wedge (\neg \textbf{истина} \vee \textbf{ложь})$ $= \textbf{истина} \wedge \textbf{ложь} = \textbf{ложь}.$

Вычисление значения булевой формулы

- Подставляя значения для булевых переменных, мы можем вычислить значение булевой формулы.
- Например, для набора истинности

$$(x_1, x_2, x_3) = (\textbf{истина}, \textbf{ложь}, \textbf{ложь})$$

- булева формула $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- принимает значение $(\textbf{истина} \vee \neg\textbf{ложь}) \wedge (\neg\textbf{истина} \vee \textbf{ложь})$ $= \textbf{истина} \wedge \textbf{ложь} = \textbf{ложь}.$

Вычисление значения булевой формулы

- Подставляя значения для булевых переменных, мы можем вычислить значение булевой формулы.
- Например, для набора истинности

$$(x_1, x_2, x_3) = (\textbf{истина},\textbf{ложь},\textbf{ложь})$$

- булева формула $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- принимает значение
  $(\textbf{истина} \vee \neg \textbf{ложь}) \wedge (\neg \textbf{истина} \vee \textbf{ложь})$
  $= \textbf{истина} \wedge \textbf{ложь} = \textbf{ложь}$.

Вычисление значения булевой формулы

- Подставляя значения для булевых переменных, мы можем вычислить значение булевой формулы.
- Например, для набора истинности

$$(x_1, x_2, x_3) = (\textbf{истина}, \textbf{ложь}, \textbf{ложь})$$

- булева формула $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- принимает значение
$(\textbf{истина} \vee \neg \textbf{ложь}) \wedge (\neg \textbf{истина} \vee \textbf{ложь})$
$= \textbf{истина} \wedge \textbf{ложь} = \textbf{ложь}$.

Вычисление значения булевой формулы

- Подставляя значения для булевых переменных, мы можем вычислить значение булевой формулы.
- Например, для набора истинности

$$(x_1, x_2, x_3) = (\textbf{истина},\textbf{ложь},\textbf{ложь})$$

- булева формула $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- принимает значение
  $(\textbf{истина} \vee \neg \textbf{ложь}) \wedge (\neg \textbf{истина} \vee \textbf{ложь})$
  $= \textbf{истина} \wedge \textbf{ложь} = \textbf{ложь}.$

Вычисление значения булевой формулы

- Подставляя значения для булевых переменных, мы можем вычислить значение булевой формулы.
- Например, для набора истинности

$$(x_1, x_2, x_3) = (\textbf{истина},\textbf{ложь},\textbf{ложь})$$

- булева формула $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- принимает значение
  $(\textbf{истина} \vee \neg\textbf{ложь}) \wedge (\neg\textbf{истина} \vee \textbf{ложь})$
  $= \textbf{истина} \wedge \textbf{ложь} = \textbf{ложь}.$

Вычисление значения булевой формулы

- Подставляя значения для булевых переменных, мы можем вычислить значение булевой формулы.
- Например, для набора истинности

$$(x_1, x_2, x_3) = (\textbf{истина}, \textbf{ложь}, \textbf{ложь})$$

- булева формула $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- принимает значение
  $(\textbf{истина} \vee \neg\textbf{ложь}) \wedge (\neg\textbf{истина} \vee \textbf{ложь})$
  $= \textbf{истина} \wedge \textbf{ложь} = \textbf{ложь}$.

Вычисление значения булевой формулы

- Подставляя значения для булевых переменных, мы можем вычислить значение булевой формулы.
- Например, для набора истинности

$$(x_1, x_2, x_3) = (\textbf{истина},\textbf{ложь},\textbf{ложь})$$

- булева формула $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- принимает значение $(\textbf{истина} \vee \neg\textbf{ложь}) \wedge (\neg\textbf{истина} \vee \textbf{ложь})$ $= \textbf{истина} \wedge \textbf{ложь} = \textbf{ложь}$.

Вычисление значения булевой формулы

- Подставляя значения для булевых переменных, мы можем вычислить значение булевой формулы.
- Например, для набора истинности

$$(x_1, x_2, x_3) = (\textbf{истина},\textbf{ложь},\textbf{ложь})$$

- булева формула $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- принимает значение
  $(\textbf{истина} \vee \neg\textbf{ложь}) \wedge (\neg\textbf{истина} \vee \textbf{ложь})$
  $= \textbf{истина} \wedge \textbf{ложь} = \text{ложь}$.

Вычисление значения булевой формулы

- Подставляя значения для булевых переменных, мы можем вычислить значение булевой формулы.
- Например, для набора истинности

$$(x_1, x_2, x_3) = (\textbf{истина},\textbf{ложь},\textbf{ложь})$$

- булева формула $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- принимает значение $(\textbf{истина} \vee \neg \textbf{ложь}) \wedge (\neg \textbf{истина} \vee \textbf{ложь})$
  $= \textbf{истина} \wedge \textbf{ложь} = \textbf{ложь}$.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

- Любую булеву формулу n булевых переменных можно представить в виде *конъюнктивной нормальной формы* (КНФ):

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j \in S_i} x_j^{\sigma_j^i} \right),$$

- где $S_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ и все $\sigma_j^i \in \{0, 1\}$.
- Здесь мы использовали следующие обозначения:

$x^1 \stackrel{\text{def}}{=} x$ и $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} \neg x$.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

- Любую булеву формулу n булевых переменных можно представить в виде *конъюнктивной нормальной формы* (КНФ):

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j \in S_i} x_j^{\sigma_j^i} \right),$$

- где $S_i \subseteq \{1,\dots,n\}$ $(i = 1,\dots,m)$ и все $\sigma_j^i \in \{0,1\}$.
- Здесь мы использовали следующие обозначения:

$x^1 \stackrel{\text{def}}{=} x$ и $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} \neg x$.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

- Любую булеву формулу n булевых переменных можно представить в виде *конъюнктивной нормальной формы* (КНФ):

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j \in S_i} x_j^{\sigma_j^i} \right),$$

- где $S_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ $(i = 1, \dots, m)$ и все $\sigma_j^i \in \{0, 1\}$.
- Здесь мы использовали следующие обозначения:

$x^1 \stackrel{\text{def}}{=} x$ и $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} \neg x$.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

- Любую булеву формулу n булевых переменных можно представить в виде *конъюнктивной нормальной формы* (КНФ):

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j \in S_i} x_j^{\sigma_j^i} \right),$$

- где $S_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ и все $\sigma_j^i \in \{0, 1\}$.
- Здесь мы использовали следующие обозначения:

$x^1 \stackrel{\text{def}}{=} x$ и $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} \neg x$.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

- Любую булеву формулу n булевых переменных можно представить в виде *конъюнктивной нормальной формы* (КНФ):

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j \in S_i} x_j^{\sigma_j^i} \right),$$

- где $S_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ $(i = 1, \dots, m)$ и все $\sigma_j^i \in \{0, 1\}$.
- Здесь мы использовали следующие обозначения:

$x^1 \stackrel{\text{def}}{=} x$ и $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} \neg x$.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

- Любую булеву формулу n булевых переменных можно представить в виде *конъюнктивной нормальной формы* (КНФ):

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j \in S_i} x_j^{\sigma_j^i} \right),$$

- где $S_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ $(i = 1, \dots, m)$ и все $\sigma_j^i \in \{0, 1\}$.
- Здесь мы использовали следующие обозначения:

$x^1 \stackrel{\text{def}}{=} x$ и $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} \neg x$.

Наборы истинности КНФ

- КНФ $\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$
- принимает значение **истина** тогда и только тогда, когда
- каждый ее дизъюнкт $\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ содержит хотя бы один литерал (литералом называется переменная или ее отрицание) со значением **истина**.
- Если отождествить значения **ложь** с 0, а **истина** с 1, то операция отрицания $\neg$ превращает x в $1-x$.
- С учетом сказанного наборы истинности, на которых КНФ $\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ принимает значение **истина**, являются решениями следующей системы неравенств:

$$\sum_{j\in S_i:\,\sigma_j^i=1} x_j + \sum_{j\in S_i:\,\sigma_j^i=0} (1-x_j) \geq 1, \quad i=1,\dots,m,$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j=1,\dots,n.$$

Наборы истинности КНФ

- КНФ $\bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$
- принимает значение **истина** тогда и только тогда, когда
- каждый ее дизъюнкт $\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ содержит хотя бы один литерал (литералом называется переменная или ее отрицание) со значением **истина**.
- Если отождествить значения **ложь** с 0, а **истина** с 1, то операция отрицания $\neg$ превращает x в $1-x$.
- С учетом сказанного наборы истинности, на которых КНФ $\bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ принимает значение **истина**, являются решениями следующей системы неравенств:

$$\sum_{j\in S_i:\,\sigma_j^i=1} x_j + \sum_{j\in S_i:\,\sigma_j^i=0} (1-x_j) \ge 1, \quad i=1,\dots,m,$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j=1,\dots,n.$$

Наборы истинности КНФ

- КНФ $\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$
- принимает значение **истина** тогда и только тогда, когда
- каждый ее дизъюнкт $\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ содержит хотя бы один литерал (литералом называется переменная или ее отрицание) со значением **истина**.
- Если отождествить значения **ложь** с 0, а **истина** с 1, то операция отрицания $\neg$ превращает x в $1-x$.
- С учетом сказанного наборы истинности, на которых КНФ $\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ принимает значение **истина**, являются решениями следующей системы неравенств:

$$\sum_{j\in S_i:\,\sigma_j^i=1} x_j + \sum_{j\in S_i:\,\sigma_j^i=0} (1-x_j) \ge 1, \quad i=1,\dots,m,$$

$$x_j\in\{0,1\}, \quad j=1,\dots,n.$$

Наборы истинности КНФ

- КНФ $\bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$
- принимает значение **истина** тогда и только тогда, когда
- каждый ее дизъюнкт $\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ содержит хотя бы один литерал (литералом называется переменная или ее отрицание) со значением **истина**.
- Если отождествить значения **ложь** с 0, а **истина** с 1, то операция отрицания $\neg$ превращает x в $1-x$.
- С учетом сказанного наборы истинности, на которых КНФ $\bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ принимает значение **истина**, являются решениями следующей системы неравенств:

$$\sum_{j\in S_i:\,\sigma_j^i=1} x_j + \sum_{j\in S_i:\,\sigma_j^i=0} (1-x_j) \ge 1,\quad i=1,\dots,m,$$

$$x_j\in\{0,1\},\quad j=1,\dots,n.$$

Наборы истинности КНФ

- КНФ $\bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$
- принимает значение **истина** тогда и только тогда, когда
- каждый ее дизъюнкт $\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ содержит хотя бы один литерал (литералом называется переменная или ее отрицание) со значением **истина**.
- Если отождествить значения **ложь** с 0, а **истина** с 1, то операция отрицания $\neg$ превращает x в $1-x$.
- С учетом сказанного наборы истинности, на которых КНФ $\bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ принимает значение **истина**, являются решениями следующей системы неравенств:

$$\sum_{j\in S_i\,:\,\sigma_j^i=1} x_j + \sum_{j\in S_i\,:\,\sigma_j^i=0} (1-x_j) \geq 1, \quad i=1,\dots,m,$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j=1,\dots,n.$$

Наборы истинности КНФ

- КНФ $\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$
- принимает значение **истина** тогда и только тогда, когда
- каждый ее дизъюнкт $\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ содержит хотя бы один литерал (литералом называется переменная или ее отрицание) со значением **истина**.
- Если отождествить значения **ложь** с 0, а **истина** с 1, то операция отрицания $\neg$ превращает x в $1-x$.
- С учетом сказанного наборы истинности, на которых КНФ $\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j\in S_i} x_j^{\sigma_j^i}\right)$ принимает значение **истина**, являются решениями следующей системы неравенств:

$$\sum_{j\in S_i\,:\,\sigma_j^i=1} x_j + \sum_{j\in S_i\,:\,\sigma_j^i=0} (1-x_j) \geq 1, \quad i=1,\dots,m,$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j=1,\dots,n.$$

Наборы истинности КНФ: пример

- КНФ

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_1)$$

- принимает значение **истина** на наборах, которые являются решениями системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1 + (1 - x_2) &\geq 1, \\ x_2 + (1 - x_3) &\geq 1, \\ x_3 + (1 - x_1) &\geq 1, \\ x_1, x_2, x_3 &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Наборы истинности КНФ: пример

- КНФ

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_1)$$

- принимает значение **истина** на наборах, которые являются решениями системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1 + (1 - x_2) &\geq 1, \\ x_2 + (1 - x_3) &\geq 1, \\ x_3 + (1 - x_1) &\geq 1, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Наборы истинности КНФ: пример

- КНФ

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_1)$$

- принимает значение **истина** на наборах, которые являются решениями системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1 + (1 - x_2) &\geq 1, \\ x_2 + (1 - x_3) &\geq 1, \\ x_3 + (1 - x_1) &\geq 1, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Наборы истинности КНФ: пример

- КНФ

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_1)$$

- принимает значение **истина** на наборах, которые являются решениями системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1 + (1 - x_2) &\geq 1, \\ x_2 + (1 - x_3) &\geq 1, \\ x_3 + (1 - x_1) &\geq 1, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Наборы истинности КНФ: пример

- КНФ

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_1)$$

- принимает значение **истина** на наборах, которые являются решениями системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1 + (1 - x_2) &\geq 1, \\ x_2 + (1 - x_3) &\geq 1, \\ x_3 + (1 - x_1) &\geq 1, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Наборы истинности КНФ: пример

- КНФ

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_1)$$

- принимает значение **истина** на наборах, которые являются решениями системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1 + (1 - x_2) &\geq 1, \\ x_2 + (1 - x_3) &\geq 1, \\ x_3 + (1 - x_1) &\geq 1, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Наборы истинности КНФ: пример

- КНФ

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_1)$$

- принимает значение **истина** на наборах, которые являются решениями системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1 + (1 - x_2) &\geq 1, \\ x_2 + (1 - x_3) &\geq 1, \\ x_3 + (1 - x_1) &\geq 1, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

План лекции

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств
$$A_i x \le b_i\,, \quad i = 1, \dots, m,$$
выполнялись не менее q любых неравенств.
- Например, если два задания i и j должны выполняться на одной машине, то мы должны потребовать выполнения следующей дизъюнкции:
$$e_i - s_j \le 0 \quad \text{или} \quad e_j - s_i \le 0,$$
- где s_i и e_i есть соответственно время начала и завершения задания i.

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств

$$A_i x \le b_i\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

выполнялись не менее q любых неравенств.

- Например, если два задания i и j должны выполняться на одной машине, то мы должны потребовать выполнения следующей дизъюнкции:

$$e_i - s_j \le 0 \quad \text{или} \quad e_j - s_i \le 0,$$

- где s_i и e_i есть соответственно время начала и завершения задания i.

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств

$$A_i x \le b_i\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

выполнялись не менее q любых неравенств.

- Например, если два задания i и j должны выполняться на одной машине, то мы должны потребовать выполнения следующей дизъюнкции:

$$e_i - s_j \le 0 \quad \text{или} \quad e_j - s_i \le 0,$$

- где s_i и e_i есть соответственно время начала и завершения задания i.

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств

$$A_i x \leq b_i\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

выполнялись не менее q любых неравенств.

- Например, если два задания i и j должны выполняться на одной машине, то мы должны потребовать выполнения следующей дизъюнкции:

$$e_i - s_j \leq 0 \quad \text{или} \quad e_j - s_i \leq 0,$$

- где s_i и e_i есть соответственно время начала и завершения задания i.

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств
$$A_i x \le b_i\,, \quad i = 1, \dots, m,$$
выполнялись не менее q любых неравенств.
- Пусть M есть достаточно большое число, такое, что неравенства $A_i x \le b_i + M$ выполняются автоматически для всех допустимых векторов x решаемой задачи.
- Вводя бинарные переменные
$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если ограничение } A_i x \le b_i \text{ выполняется,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
- мы можем учесть требуемое условие след. образом:
$$A_i x \le b_i + M(1 - y_i)\,, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i \ge q, \quad y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств

$$A_i x \le b_i\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

выполнялись не менее q любых неравенств.

- Пусть M есть достаточно большое число, такое, что неравенства $A_i x \le b_i + M$ выполняются автоматически для всех допустимых векторов x решаемой задачи.
- Вводя бинарные переменные

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если ограничение } A_i x \le b_i \text{ выполняется,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

- мы можем учесть требуемое условие след. образом:

$$A_i x \le b_i + M(1 - y_i)\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \ge q, \quad y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств

$$A_i x \le b_i\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

выполнялись не менее q любых неравенств.

- Пусть M есть достаточно большое число, такое, что неравенства $A_i x \le b_i + M$ выполняются автоматически для всех допустимых векторов x решаемой задачи.
- Вводя бинарные переменные

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если ограничение } A_i x \le b_i \text{ выполняется,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

- мы можем учесть требуемое условие след. образом:

$$A_i x \le b_i + M(1 - y_i)\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \ge q, \quad y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств
$$A_i x \le b_i\,, \quad i = 1, \dots, m,$$
выполнялись не менее q любых неравенств.
- Пусть M есть достаточно большое число, такое, что неравенства $A_i x \le b_i + M$ выполняются автоматически для всех допустимых векторов x решаемой задачи.
- Вводя бинарные переменные
$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если ограничение } A_i x \le b_i \text{ выполняется}, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases}$$
- мы можем учесть требуемое условие след. образом:
$$A_i x \le b_i + M(1 - y_i)\,, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i \ge q, \quad y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств

$$A_i x \le b_i\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

выполнялись не менее q любых неравенств.

- Пусть M есть достаточно большое число, такое, что неравенства $A_i x \le b_i + M$ выполняются автоматически для всех допустимых векторов x решаемой задачи.
- Вводя бинарные переменные

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если ограничение } A_i x \le b_i \text{ выполняется}, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

- мы можем учесть требуемое условие след. образом:

$$A_i x \le b_i + M(1 - y_i)\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \ge q, \quad y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств
$$A_i x \le b_i\,, \quad i = 1,\dots,m,$$
выполнялись не менее q любых неравенств.
- Пусть M есть достаточно большое число, такое, что неравенства $A_i x \le b_i + M$ выполняются автоматически для всех допустимых векторов x решаемой задачи.
- Вводя бинарные переменные
$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если ограничение } A_i x \le b_i \text{ выполняется,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
- мы можем учесть требуемое условие след. образом:
$$A_i x \le b_i + M(1 - y_i)\,, \quad i = 1,\dots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i \ge q, \quad y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,k.$$

Задача бинарного программирования

- Требуется, чтобы из m неравенств

$$A_i x \le b_i\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

выполнялись не менее q любых неравенств.

- Пусть M есть достаточно большое число, такое, что неравенства $A_i x \le b_i + M$ выполняются автоматически для всех допустимых векторов x решаемой задачи.
- Вводя бинарные переменные

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если ограничение } A_i x \le b_i \text{ выполняется}, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

- мы можем учесть требуемое условие след. образом:

$$A_i x \le b_i + M(1 - y_i)\,, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \ge q, \quad y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

План лекции

1. Целочисленность и нелинейность
   - Задача смешанно-целочисленного программирования
   - Фиксированные доплаты
   - Дискретные переменные
   - Аппроксимация нелинейной функции

2. Логические условия
   - Булевы формулы
   - Множественные альтернативы и дизъюнкции
   - Линейная задача о дополнительности

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w - Mz = q, \quad w^T z = 0, \quad w, z \geq 0.$$

- Несмотря на свое название, ЛЗД — это нелинейная задача, поскольку она содержит нелинейное ограничение $w^T z = 0$,
- которое, в силу неотрицательности векторов w и z, эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Каждое из равенств $w_i z_i = 0$ выражает дизъюнкцию: $w_i \leq 0$ или $z_i \leq 0$.

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w - Mz = q, \quad w^T z = 0, \quad w, z \geq 0.$$

- Несмотря на свое название, ЛЗД — это нелинейная задача, поскольку она содержит нелинейное ограничение $w^T z = 0$,
- которое, в силу неотрицательности векторов w и z, эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Каждое из равенств $w_i z_i = 0$ выражает дизъюнкцию: $w_i \leq 0$ или $z_i \leq 0$.

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w - Mz = q, \quad w^T z = 0, \quad w, z \geq 0.$$

- Несмотря на свое название, ЛЗД — это нелинейная задача, поскольку она содержит нелинейное ограничение $w^T z = 0$,
- которое, в силу неотрицательности векторов w и z, эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Каждое из равенств $w_i z_i = 0$ выражает дизъюнкцию: $w_i \leq 0$ или $z_i \leq 0$.

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w - Mz = q, \quad w^T z = 0, \quad w, z \geq 0.$$

- Несмотря на свое название, ЛЗД — это нелинейная задача, поскольку она содержит нелинейное ограничение $w^T z = 0$,
- которое, в силу неотрицательности векторов w и z, эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Каждое из равенств $w_i z_i = 0$ выражает дизъюнкцию: $w_i \leq 0$ или $z_i \leq 0$.

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w - Mz = q, \quad w^T z = 0, \quad w, z \geq 0.$$

- Несмотря на свое название, ЛЗД — это нелинейная задача, поскольку она содержит нелинейное ограничение $w^T z = 0$,
- которое, в силу неотрицательности векторов w и z, эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Каждое из равенств $w_i z_i = 0$ выражает дизъюнкцию: $w_i \leq 0$ или $z_i \leq 0$.

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w - Mz = q, \quad w^T z = 0, \quad w, z \geq 0.$$

- Несмотря на свое название, ЛЗД — это нелинейная задача, поскольку она содержит нелинейное ограничение $w^T z = 0$,
- которое, в силу неотрицательности векторов w и z, эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Каждое из равенств $w_i z_i = 0$ выражает дизъюнкцию: $w_i \leq 0$ или $z_i \leq 0$.

Линейная задача о дополнительности

- В предположении, что мы знаем верхние границы изменения переменных $w_i \le g_i$ и $z_i \le h_i$,
- можно представить нелинейное равенство $w^T z = 0$ следующей системой:

$$w_i \le g_i x_i\,,\ z_i \le h_i(1 - x_i)\,,\ x_i \in \{0,1\},\quad i = 1,\dots,n.$$

- В результате, мы сводим ЛЗД к следующей задаче СЦП:

$$\begin{aligned} & c^T w + p^T z \to \max, \\ & w - Mz = q, \\ & w_i \le g_i x_i\,,\ z_i \le h_i(1 - x_i), \quad i = 1,\dots,n, \\ & w, z \ge 0,\ x \in \{0,1\}^n. \end{aligned}$$

- Заметим, что векторы c и p в целевой функции могут быть любыми.

Линейная задача о дополнительности

- В предположении, что мы знаем верхние границы изменения переменных $w_i \le g_i$ и $z_i \le h_i$,
- можно представить нелинейное равенство $w^T z = 0$ следующей системой:

$$w_i \le g_i x_i\,,\ z_i \le h_i(1 - x_i)\,,\ x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,n.$$

- В результате, мы сводим ЛЗД к следующей задаче СЦП:

$$\begin{aligned} c^T w + p^T z &\to \max,\\ w - Mz &= q,\\ w_i \le g_i x_i\,,\ z_i &\le h_i(1 - x_i), \quad i = 1,\dots,n,\\ w, z \ge 0,\ x &\in \{0,1\}^n. \end{aligned}$$

- Заметим, что векторы c и p в целевой функции могут быть любыми.

Линейная задача о дополнительности

- В предположении, что мы знаем верхние границы изменения переменных $w_i \le g_i$ и $z_i \le h_i$,
- можно представить нелинейное равенство $w^T z = 0$ следующей системой:

$$w_i \le g_i x_i\,,\ z_i \le h_i(1 - x_i)\,,\ x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- В результате, мы сводим ЛЗД к следующей задаче СЦП:

$$\begin{aligned} c^T w + p^T z &\to \max, \\ w - Mz &= q, \\ w_i \le g_i x_i\,,\ z_i \le h_i(1 - x_i)&, \quad i = 1, \dots, n, \\ w, z \ge 0,\ x &\in \{0, 1\}^n. \end{aligned}$$

- Заметим, что векторы c и p в целевой функции могут быть любыми.

Линейная задача о дополнительности

- В предположении, что мы знаем верхние границы изменения переменных $w_i \le g_i$ и $z_i \le h_i$,
- можно представить нелинейное равенство $w^T z = 0$ следующей системой:

$$w_i \le g_i x_i\,,\; z_i \le h_i(1 - x_i)\,,\; x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- В результате, мы сводим ЛЗД к следующей задаче СЦП:

$$\begin{aligned} c^T w + p^T z &\to \max, \\ w - Mz &= q, \\ w_i \le g_i x_i\,,\; z_i \le h_i(1 - x_i), &\quad i = 1, \dots, n, \\ w, z \ge 0,\; x \in \{0, 1\}^n. \end{aligned}$$

- Заметим, что векторы c и p в целевой функции могут быть любыми.

Линейная задача о дополнительности

- В предположении, что мы знаем верхние границы изменения переменных $w_i \le g_i$ и $z_i \le h_i$,
- можно представить нелинейное равенство $w^T z = 0$ следующей системой:

$$w_i \le g_i x_i \,,\; z_i \le h_i(1 - x_i)\,,\; x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- В результате, мы сводим ЛЗД к следующей задаче СЦП:

$$\begin{aligned} c^T w + p^T z &\to \max, \\ w - Mz &= q, \\ w_i \le g_i x_i \,,\; z_i \le h_i(1 - x_i)&, \quad i = 1, \dots, n, \\ w, z \ge 0,\; x &\in \{0,1\}^n. \end{aligned}$$

- Заметим, что векторы c и p в целевой функции могут быть любыми.