Применения выпуклого программирования в экономике

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2014

План лекции

1. Производственная задача
   - Математическая модель
   - Условия Куна — Таккера
2. Неоклассическая задача потребления
   - Математическая модель
   - Условия Куна — Таккера
3. Модель равновесия Фишера
   - Модель рынка
   - Задача Эйзенберга — Гейла

План лекции

1. Производственная задача
   - Математическая модель
   - Условия Куна — Таккера
2. Неоклассическая задача потребления
   - Математическая модель
   - Условия Куна — Таккера
3. Модель равновесия Фишера
   - Модель рынка
   - Задача Эйзенберга — Гейла

Постановка производственной задачи

- Фирма использует n производственных процесса для производства n продуктов.
- Процес j ($j = 1, \dots, n$) описывается производственной функцией f_j:

$$x_j = f_j(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

где

  - переменная x_j обозначает количество единиц продукта j, производимого j-м процессом,
  - а переменная x_i^j обозначает количество единиц ресурса i ($i = 1, \dots, m$), используемого в j-м процессе.

- В наличии имеется a_i единиц ресурса i, $i = 1, \dots, m$. Задан вектор цен $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ выпускаемых продуктов.
- Нужно найти производственный план $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$, стоимость которого $p^T x^*$ максимальна.

Постановка производственной задачи

- Фирма использует n производственных процесса для производства n продуктов.
- Процес j $(j = 1, \ldots, n)$ описывается производственной функцией f_j:

$$x_j = f_j(x_1^j, \ldots, x_m^j),$$

где

  - переменная x_j обозначает количество единиц продукта j, производимого j-м процессом,
  - а переменная x_i^j обозначает количество единиц ресурса i $(i = 1, \ldots, m)$, используемого в j-м процессе.

- В наличии имеется a_i единиц ресурса i, $i = 1, \ldots, m$. Задан вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ выпускаемых продуктов.
- Нужно найти производственный план $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^T$, стоимость которого $p^T x^*$ максимальна.

Постановка производственной задачи

- Фирма использует n производственных процесса для производства n продуктов.
- Процес j ($j = 1, \dots, n$) описывается производственной функцией f_j:

$$x_j = f_j(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

где
  - переменная x_j обозначает количество единиц продукта j, производимого j-м процессом,
  - а переменная x_i^j обозначает количество единиц ресурса i ($i = 1, \dots, m$), используемого в j-м процессе.
- В наличии имеется a_i единиц ресурса i, $i = 1, \dots, m$. Задан вектор цен $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ выпускаемых продуктов.
- Нужно найти производственный план $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$, стоимость которого $p^T x^*$ максимальна.

Постановка производственной задачи

- Фирма использует n производственных процесса для производства n продуктов.
- Процес j $(j = 1, \dots, n)$ описывается производственной функцией f_j:

$$x_j = f_j(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

  где
  - переменная x_j обозначает количество единиц продукта j, производимого j-м процессом,
  - а переменная x_i^j обозначает количество единиц ресурса i $(i = 1, \dots, m)$, используемого в j-м процессе.
- В наличии имеется a_i единиц ресурса i, $i = 1, \dots, m$. Задан вектор цен $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ выпускаемых продуктов.
- Нужно найти производственный план $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$, стоимость которого $p^T x^*$ максимальна.

Постановка производственной задачи

- Фирма использует n производственных процесса для производства n продуктов.
- Процес j $(j = 1, \ldots, n)$ описывается производственной функцией f_j:

$$x_j = f_j(x_1^j, \ldots, x_m^j),$$

где
  - переменная x_j обозначает количество единиц продукта j, производимого j-м процессом,
  - а переменная x_i^j обозначает количество единиц ресурса i $(i = 1, \ldots, m)$, используемого в j-м процессе.
- В наличии имеется a_i единиц ресурса i, $i = 1, \ldots, m$. Задан вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ выпускаемых продуктов.
- Нужно найти производственный план $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^T$, стоимость которого $p^T x^*$ максимальна.

Постановка производственной задачи

- Фирма использует n производственных процесса для производства n продуктов.
- Процес j $(j = 1, \dots, n)$ описывается производственной функцией f_j:

$$x_j = f_j(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

где

  - переменная x_j обозначает количество единиц продукта j, производимого j-м процессом,
  - а переменная x_i^j обозначает количество единиц ресурса i $(i = 1, \dots, m)$, используемого в j-м процессе.
- В наличии имеется a_i единиц ресурса i, $i = 1, \dots, m$. Задан вектор цен $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ выпускаемых продуктов.
- Нужно найти производственный план $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$, стоимость которого $p^T x^*$ максимальна.

Математическая формулировка

$$p^T x \to \max, \tag{1a}$$

$$\lambda_j : \quad x_j - f_j(x_1^j, \dots, x_m^j) \le 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1b}$$

$$\mu_i : \quad \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1c}$$

$$\nu_j : \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1d}$$

$$\rho_i^j : \quad x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n. \tag{1e}$$

Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Математическая формулировка

$$p^T x \to \max, \tag{1a}$$

$$\lambda_j : \quad x_j - f_j(x_1^j, \dots, x_m^j) \le 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1b}$$

$$\mu_i : \quad \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1c}$$

$$\nu_j : \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1d}$$

$$\rho_i^j : \quad x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n. \tag{1e}$$

Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Математическая формулировка

$$p^T x \to \max, \tag{1a}$$

$$\lambda_j: \quad x_j - f_j(x_1^j, \dots, x_m^j) \le 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1b}$$

$$\mu_i: \quad \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1c}$$

$$\nu_j: \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1d}$$

$$\rho_i^j: \quad x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n. \tag{1e}$$

Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Математическая формулировка

$$p^T x \to \max, \tag{1a}$$

$$\lambda_j: \quad x_j - f_j(x_1^j, \dots, x_m^j) \le 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1b}$$

$$\mu_i: \quad \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1c}$$

$$\nu_j: \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1d}$$

$$\rho_i^j: \quad x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n. \tag{1e}$$

Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Математическая формулировка

$$p^T x \to \max, \tag{1a}$$

$$\lambda_j: \quad x_j - f_j(x_1^j, \ldots, x_m^j) \le 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1b}$$

$$\mu_i: \quad \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1c}$$

$$\nu_j: \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1d}$$

$$\rho_i^j: \quad x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \tag{1e}$$

Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Математическая формулировка

$$p^T x \to \max, \tag{1a}$$

$$\lambda_j: \quad x_j - f_j(x_1^j, \dots, x_m^j) \le 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1b}$$

$$\mu_i: \quad \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1c}$$

$$\nu_j: \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1d}$$

$$\rho_i^j: \quad x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n. \tag{1e}$$

Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Математическая формулировка

$$p^T x \to \max, \tag{1a}$$

$$\lambda_j: \quad x_j - f_j(x_1^j, \dots, x_m^j) \le 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1b}$$

$$\mu_i: \quad \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1c}$$

$$\nu_j: \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1d}$$

$$\rho_i^j: \quad x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n. \tag{1e}$$

Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Математическая формулировка

$$
\begin{aligned}
& p^T x \to \max, && \text{(1a)}\\
\lambda_j: \quad & x_j - f_j(x_1^j, \ldots, x_m^j) \le 0, \quad j = 1, \ldots, n, && \text{(1b)}\\
\mu_i: \quad & \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, && \text{(1c)}\\
\nu_j: \quad & x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, && \text{(1d)}\\
\rho_i^j: \quad & x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. && \text{(1e)}
\end{aligned}
$$

Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Математическая формулировка

$$p^T x \to \max, \tag{1a}$$

$$\lambda_j : \quad x_j - f_j(x_1^j, \ldots, x_m^j) \le 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1b}$$

$$\mu_i : \quad \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1c}$$

$$\nu_j : \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1d}$$

$$\rho_i^j : \quad x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n. \tag{1e}$$

Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Математическая формулировка

$$
\begin{aligned}
& p^T x \to \max, && \text{(1a)}\\
\lambda_j: \quad & x_j - f_j(x_1^j, \dots, x_m^j) \le 0, \quad j = 1, \dots, n, && \text{(1b)}\\
\mu_i: \quad & \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \dots, m, && \text{(1c)}\\
\nu_j: \quad & x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, && \text{(1d)}\\
\rho_i^j: \quad & x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n. && \text{(1e)}
\end{aligned}
$$

Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Условия Куна - Таккера для задачи (1)

$$-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2a}$$

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) + \rho_i^j = 0, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{array} \tag{2b}$$

$$\lambda_j \left(x_j - f_j(x_1^j, \dots, x_m^j) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2c}$$

$$\mu_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2d}$$

$$\nu_j \le 0, \quad \nu_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2e}$$

$$\rho_i^j \le 0, \quad \rho_i^j x_i^j = 0, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{array} \tag{2f}$$

План лекции

1. Производственная задача
   - Математическая модель
   - Условия Куна — Таккера
2. Неоклассическая задача потребления
   - Математическая модель
   - Условия Куна — Таккера
3. Модель равновесия Фишера
   - Модель рынка
   - Задача Эйзенберга — Гейла

Следствия из условий Куна - Таккера

- Если продукт j производится $(x_j > 0)$, то
  - из $\nu_j x_j = 0$ имеем, что $\nu_j = 0$,
  - а из $-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0$ следует, что $\lambda_j = p_j$.
- Если ресурс i не используется полностью $\left(\sum_{j=1}^n x_i^j < a_i\right)$, то из $\mu_i \left(\sum_{j=1}^n x_i^j - a_i\right) = 0$ имеем, что $\mu_i = 0$.
- Если ресурс i используется в j-м процессе $(x_i^j > 0)$, то
  - из $\rho_i^j x_i^j = 0$ вытекает, что $\rho_i^j = 0$,
  - а так как продукт j производится, то

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) + \rho_i^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

  - и поскольку $p_j > 0$ и $\frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) > 0$, то $\mu_i > 0$ и ресурс i должен использоваться полностью.

Следствия из условий Куна - Таккера

- Если продукт j производится $(x_j > 0)$, то
  - из $\nu_j x_j = 0$ имеем, что $\nu_j = 0$,
  - а из $-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0$ следует, что $\lambda_j = p_j$.
- Если ресурс i не используется полностью $\left(\sum_{j=1}^n x_i^j < a_i\right)$, то из $\mu_i \left(\sum_{j=1}^n x_i^j - a_i\right) = 0$ имеем, что $\mu_i = 0$.
- Если ресурс i используется в j-м процессе $(x_i^j > 0)$, то
  - из $\rho_i^j x_i^j = 0$ вытекает, что $\rho_i^j = 0$,
  - а так как продукт j производится, то

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) + \rho_i^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

  - и поскольку $p_j > 0$ и $\frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) > 0$, то $\mu_i > 0$ и ресурс i должен использоваться полностью.

Следствия из условий Куна - Таккера

- Если продукт j производится $(x_j > 0)$, то
  - из $\nu_j x_j = 0$ имеем, что $\nu_j = 0$,
  - а из $-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0$ следует, что $\lambda_j = p_j$.
- Если ресурс i не используется полностью $\left(\sum_{j=1}^{n} x_i^j < a_i\right)$, то из $\mu_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i\right) = 0$ имеем, что $\mu_i = 0$.
- Если ресурс i используется в j-м процессе $(x_i^j > 0)$, то
  - из $\rho_i^j x_i^j = 0$ вытекает, что $\rho_i^j = 0$,
  - а так как продукт j производится, то

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \ldots, x_m^j) + \rho_i^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \ldots, x_m^j),$$

  - и поскольку $p_j > 0$ и $\frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \ldots, x_m^j) > 0$, то $\mu_i > 0$ и ресурс i должен использоваться полностью.

Следствия из условий Куна - Таккера

- Если продукт j производится ($x_j > 0$), то
  - из $\nu_j x_j = 0$ имеем, что $\nu_j = 0$,
  - а из $-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0$ следует, что $\lambda_j = p_j$.
- Если ресурс i не используется полностью $\left(\sum_{j=1}^n x_i^j < a_i\right)$, то из $\mu_i \left(\sum_{j=1}^n x_i^j - a_i\right) = 0$ имеем, что $\mu_i = 0$.
- Если ресурс i используется в j-м процессе ($x_i^j > 0$), то
  - из $\rho_i^j x_i^j = 0$ вытекает, что $\rho_i^j = 0$,
  - а так как продукт j производится, то

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) + \rho_i^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

  - и поскольку $p_j > 0$ и $\frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) > 0$, то $\mu_i > 0$ и ресурс i должен использоваться полностью.

Следствия из условий Куна - Таккера

- Если продукт j производится $(x_j > 0)$, то
  - из $\nu_j x_j = 0$ имеем, что $\nu_j = 0$,
  - а из $-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0$ следует, что $\lambda_j = p_j$.
- Если ресурс i не используется полностью $\left(\sum_{j=1}^n x_i^j < a_i\right)$, то из $\mu_i \left(\sum_{j=1}^n x_i^j - a_i\right) = 0$ имеем, что $\mu_i = 0$.
- Если ресурс i используется в j-м процессе $(x_i^j > 0)$, то
  - из $\rho_i^j x_i^j = 0$ вытекает, что $\rho_i^j = 0$,
  - а так как продукт j производится, то

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) + \rho_i^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

  - и поскольку $p_j > 0$ и $\frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) > 0$, то $\mu_i > 0$ и ресурс i должен использоваться полностью.

Следствия из условий Куна - Таккера

- Если продукт j производится $(x_j > 0)$, то
  - из $\nu_j x_j = 0$ имеем, что $\nu_j = 0$,
  - а из $-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0$ следует, что $\lambda_j = p_j$.
- Если ресурс i не используется полностью $\left(\sum_{j=1}^n x_i^j < a_i\right)$, то из $\mu_i \left(\sum_{j=1}^n x_i^j - a_i\right) = 0$ имеем, что $\mu_i = 0$.
- Если ресурс i используется в j-м процессе $(x_i^j > 0)$, то
  - из $\rho_i^j x_i^j = 0$ вытекает, что $\rho_i^j = 0$,
  - а так как продукт j производится, то

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) + \rho_i^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

  - и поскольку $p_j > 0$ и $\frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) > 0$, то $\mu_i > 0$ и ресурс i должен использоваться полностью.

Следствия из условий Куна - Таккера

- Если продукт j производится $(x_j > 0)$, то
  - из $\nu_j x_j = 0$ имеем, что $\nu_j = 0$,
  - а из $-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0$ следует, что $\lambda_j = p_j$.
- Если ресурс i не используется полностью $\left(\sum_{j=1}^n x_i^j < a_i\right)$, то из $\mu_i \left(\sum_{j=1}^n x_i^j - a_i\right) = 0$ имеем, что $\mu_i = 0$.
- Если ресурс i используется в j-м процессе $(x_i^j > 0)$, то
  - из $\rho_i^j x_i^j = 0$ вытекает, что $\rho_i^j = 0$,
  - а так как продукт j производится, то

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) + \rho_i^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

  - и поскольку $p_j > 0$ и $\frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) > 0$, то $\mu_i > 0$ и ресурс i должен использоваться полностью.

Следствия из условий Куна - Таккера

- Если продукт j производится $(x_j > 0)$, то
  - из $\nu_j x_j = 0$ имеем, что $\nu_j = 0$,
  - а из $-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0$ следует, что $\lambda_j = p_j$.
- Если ресурс i не используется полностью $\left(\sum_{j=1}^n x_i^j < a_i\right)$, то из $\mu_i \left(\sum_{j=1}^n x_i^j - a_i\right) = 0$ имеем, что $\mu_i = 0$.
- Если ресурс i используется в j-м процессе $(x_i^j > 0)$, то
  - из $\rho_i^j x_i^j = 0$ вытекает, что $\rho_i^j = 0$,
  - а так как продукт j производится, то

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) + \rho_i^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j),$$

  - и поскольку $p_j > 0$ и $\frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \dots, x_m^j) > 0$, то $\mu_i > 0$ и ресурс i должен использоваться полностью.

Свойства множителей ресурсных ограничений

Утверждение 1

- *Множитель ресурса, который не использутся ни в одном технологическом процессе, производящем продукт, равен нулю.*
- *Если ресурс i используется в технологическом процессе, производящем некоторый продукт j, то соответствующий этому ресурсу множитель μ_i равен стоимости предельного продукта j относительно ресурса i.*

Свойства множителей ресурсных ограничений

Утверждение 1

- *Множитель ресурса, который не использутся ни в одном технологическом процессе, производящем продукт, равен нулю.*
- *Если ресурс i используется в технологическом процессе, производящем некоторый продукт j, то соответствующий этому ресурсу множитель μ_i равен стоимости предельного продукта j относительно ресурса i.*

План лекции

Постановка задачи

- Имеется n *благ* (товаров и услуг).
- Набор благ — это любой вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$, где x_j есть количество блага j в наборе x.
- Потребитель описывается его функцией полезности $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая
  1. дважды непрерывно дифференцируема по всем n аргументам;
  2. неубывающая: $\frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \geq 0$ для всех $j = 1, \dots, n$;
  3. вогнутая: в любой точке $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ матрица вторых производных $\nabla^2 U(x)$ неположительно определена.
- Известны бюджет (доход) I потребителя и вектор цен $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, где p_j есть цена блага j.

Постановка задачи

- Имеется n *благ* (товаров и услуг).
- Набор благ — это любой вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$, где x_j есть количество блага j в наборе x.
- Потребитель описывается его функцией полезности $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая
  1. дважды непрерывно дифференцируема по всем n аргументам;
  2. неубывающая: $\frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \geq 0$ для всех $j = 1, \dots, n$;
  3. вогнутая: в любой точке $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ матрица вторых производных $\nabla^2 U(x)$ неположительно определена.
- Известны бюджет (доход) I потребителя и вектор цен $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, где p_j есть цена блага j.

Постановка задачи

- Имеется n *благ* (товаров и услуг).
- Набор благ — это любой вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$, где x_j есть количество блага j в наборе x.
- Потребитель описывается его функцией полезности $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая
  1. дважды непрерывно дифференцируема по всем n аргументам;
  2. неубывающая: $\frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \geq 0$ для всех $j = 1, \ldots .n$;
  3. вогнутая: в любой точке $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ матрица вторых производных $\nabla^2 U(x)$ неположительно определена.
- Известны бюджет (доход) I потребителя и вектор цен $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, где p_j есть цена блага j.

Постановка задачи

- Имеется n *благ* (товаров и услуг).
- Набор благ — это любой вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$, где x_j есть количество блага j в наборе x.
- Потребитель описывается его функцией полезности $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая
  1. дважды непрерывно дифференцируема по всем n аргументам;
  2. неубывающая: $\frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \geq 0$ для всех $j = 1, \ldots .n$;
  3. вогнутая: в любой точке $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ матрица вторых производных $\nabla^2 U(x)$ неположительно определена.
- Известны бюджет (доход) I потребителя и вектор цен $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, где p_j есть цена блага j.

Постановка задачи

- Имеется n *благ* (товаров и услуг).
- Набор благ — это любой вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$, где x_j есть количество блага j в наборе x.
- Потребитель описывается его функцией полезности $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая
  1. дважды непрерывно дифференцируема по всем n аргументам;
  2. неубывающая: $\frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \geq 0$ для всех $j = 1, \ldots .n$;
  3. вогнутая: в любой точке $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ матрица вторых производных $\nabla^2 U(x)$ неположительно определена.
- Известны бюджет (доход) I потребителя и вектор цен $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, где p_j есть цена блага j.

Постановка задачи

- Имеется n *благ* (товаров и услуг).
- Набор благ — это любой вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$, где x_j есть количество блага j в наборе x.
- Потребитель описывается его функцией полезности $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая
  1. дважды непрерывно дифференцируема по всем n аргументам;
  2. неубывающая: $\frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \geq 0$ для всех $j = 1, \ldots .n$;
  3. вогнутая: в любой точке $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ матрица вторых производных $\nabla^2 U(x)$ неположительно определена.
- Известны бюджет (доход) I потребителя и вектор цен $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, где p_j есть цена блага j.

Постановка задачи

- Имеется n *благ* (товаров и услуг).
- Набор благ — это любой вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$, где x_j есть количество блага j в наборе x.
- Потребитель описывается его функцией полезности $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая
  1. дважды непрерывно дифференцируема по всем n аргументам;
  2. неубывающая: $\frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \geq 0$ для всех $j = 1, \ldots .n$;
  3. вогнутая: в любой точке $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ матрица вторых производных $\nabla^2 U(x)$ неположительно определена.
- Известны бюджет (доход) I потребителя и вектор цен $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, где p_j есть цена блага j.

Формулировка задачи

- *Задача потребления*

$$\max\{U(x) : p^T x \le I,\ x \ge 0\}. \tag{3}$$

состоит в поиске такого набора благ,

  - на котором достигает максимума функции полезности,
  - при условии, что стоимость набора благ не должна превосходить бюджета потребителя.

- Перепишем (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &-U(x) \to \min, \\ &\lambda_0 : \sum_{j=1}^{n} p_j \le I, \\ &\lambda_j : -x_j \le 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

- Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Формулировка задачи

- *Задача потребления*

$$\max\{U(x) : p^T x \le I,\ x \ge 0\}. \tag{3}$$

состоит в поиске такого набора благ,

  - на котором достигает максимума функции полезности,
  - при условии, что стоимость набора благ не должна превосходить бюджета потребителя.

- Перепишем (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &-U(x) \to \min, \\ &\lambda_0 : \sum_{j=1}^{n} p_j \le I, \\ &\lambda_j : -x_j \le 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

- Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Формулировка задачи

- *Задача потребления*

$$\max\{U(x) : p^T x \le I,\ x \ge 0\}. \qquad (3)$$

состоит в поиске такого набора благ,

  - на котором достигает максимума функции полезности,
  - при условии, что стоимость набора благ не должна превосходить бюджета потребителя.

- Перепишем (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -U(x) \to \min, \\ & \lambda_0 : \sum_{j=1}^{n} p_j \le I, \\ & \lambda_j : -x_j \le 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \qquad (4)$$

- Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Формулировка задачи

- *Задача потребления*

$$\max\{U(x) : p^T x \leq I,\ x \geq 0\}. \tag{3}$$

состоит в поиске такого набора благ,

- на котором достигает максимума функции полезности,
- при условии, что стоимость набора благ не должна превосходить бюджета потребителя.

- Перепишем (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -U(x) \to \min, \\ \lambda_0 :\ & \sum_{j=1}^{n} p_j \leq I, \\ \lambda_j :\ & -x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

- Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Формулировка задачи

- *Задача потребления*

$$\max\{U(x) : p^T x \leq I,\ x \geq 0\}. \tag{3}$$

состоит в поиске такого набора благ,
  - на котором достигает максимума функции полезности,
  - при условии, что стоимость набора благ не должна превосходить бюджета потребителя.
- Перепишем (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -U(x) \to \min, \\ \lambda_0 :\ & \sum_{j=1}^{n} p_j \leq I, \\ \lambda_j :\ & -x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

- Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Формулировка задачи

- *Задача потребления*

$$\max\{U(x) : p^T x \le I,\ x \ge 0\}. \tag{3}$$

состоит в поиске такого набора благ,
  - на котором достигает максимума функции полезности,
  - при условии, что стоимость набора благ не должна превосходить бюджета потребителя.
- Перепишем (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -U(x) \to \min, \\ \lambda_0 : \ & \sum_{j=1}^{n} p_j \le I, \\ \lambda_j : \ & -x_j \le 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

- Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

Формулировка задачи

- *Задача потребления*

$$\max\{U(x) : p^T x \le I,\ x \ge 0\}. \tag{3}$$

состоит в поиске такого набора благ,

  - на котором достигает максимума функции полезности,
  - при условии, что стоимость набора благ не должна превосходить бюджета потребителя.

- Перепишем (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -U(x) \to \min, \\ \lambda_0 :\ & \sum_{j=1}^{n} p_j \le I, \\ \lambda_j :\ & -x_j \le 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

- Припишем ограничениям множители Куна — Таккера.

План лекции

Свойства множителей Куна-Таккера

- Запишем условия Куна — Таккера для оптимального решения x^0 задачи потребления (3):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U(x^0)}{\partial x_j} &= \lambda_0 p_j + \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
\lambda_0 (I - p^T x^0) &= 0, \\
\lambda_j x_j^0 &= 0, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

- Если $x_j^0 > 0$, то из $\lambda_j x_j^0 = 0$ следует, что $\lambda_j = 0$ и тогда
  - $\frac{1}{p_j}\frac{\partial U(x^0)}{\partial x_j} = \lambda_0 > 0$, т. е. отношения *предельной полезности* к цене должно быть одинаковым для всех потребляемых благ j;
  - $p^T x^0 = I$, т. е. весь бюджет должен быть израсходован.

Свойства множителей Куна-Таккера

- Запишем условия Куна — Таккера для оптимального решения x^0 задачи потребления (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x^0)}{\partial x_j} &= \lambda_0 p_j + \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ \lambda_0 (I - p^T x^0) &= 0, \\ \lambda_j x_j^0 &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

- Если $x_j^0 > 0$, то из $\lambda_j x_j^0 = 0$ следует, что $\lambda_j = 0$ и тогда
  - $\frac{1}{p_j} \frac{\partial U(x^0)}{\partial x_j} = \lambda_0 > 0$, т. е. отношения *предельной полезности* к цене должно быть одинаковым для всех потребляемых благ j;
  - $p^T x^0 = I$, т. е. весь бюджет должен быть израсходован.

Свойства множителей Куна-Таккера

- Запишем условия Куна — Таккера для оптимального решения x^0 задачи потребления (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x^0)}{\partial x_j} &= \lambda_0 p_j + \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ \lambda_0(I - p^T x^0) &= 0, \\ \lambda_j x_j^0 &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

- Если $x_j^0 > 0$, то из $\lambda_j x_j^0 = 0$ следует, что $\lambda_j = 0$ и тогда
  - $\frac{1}{p_j} \frac{\partial U(x^0)}{\partial x_j} = \lambda_0 > 0$, т. е. отношения *предельной полезности* к цене должно быть одинаковым для всех потребляемых благ j;
  - $p^T x^0 = I$, т. е. весь бюджет должен быть израсходован.

Потребитель покупает все виды товаров и услуг

В таком случае условия Куна — Таккера (5) примут вид

$$\nabla U(x^0) - \lambda_0 p = 0, \quad I - p^T x^0 = 0. \tag{6}$$

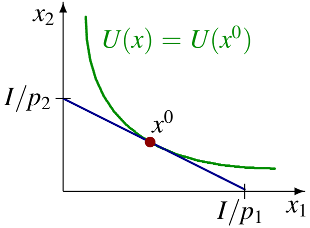
- Геометрическая иллюстрация условий (6) для $n = 2$ приведена на рисунке справа.
- Мы видим, что оптимальное решение x^0 задачи потребления является точкой касания бюджетной гиперплоскости $p^T x = I$ с поверхностью безраличия $U(x) = U(x^0)$.

Потребитель покупает все виды товаров и услуг

В таком случае условия Куна — Таккера (5) примут вид

$$\nabla U(x^0) - \lambda_0 p = 0, \quad I - p^T x^0 = 0. \tag{6}$$

- Геометрическая иллюстрация условий (6) для $n = 2$ приведена на рисунке справа.
- Мы видим, что оптимальное решение x^0 задачи потребления является точкой касания бюджетной гиперплоскости $p^T x = I$ с поверхностью безразличия $U(x) = U(x^0)$.

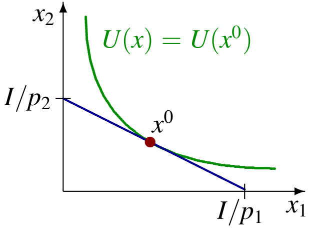


Потребитель покупает все виды товаров и услуг

В таком случае условия Куна — Таккера (5) примут вид

$$\nabla U(x^0) - \lambda_0 p = 0, \quad I - p^T x^0 = 0. \tag{6}$$

- Геометрическая иллюстрация условий (6) для $n = 2$ приведена на рисунке справа.
- Мы видим, что оптимальное решение x^0 задачи потребления является точкой касания бюджетной гиперплоскости $p^T x = I$ с поверхностью безраличия $U(x) = U(x^0)$.



План лекции

1. Производственная задача
   - Математическая модель
   - Условия Куна — Таккера
2. Неоклассическая задача потребления
   - Математическая модель
   - Условия Куна — Таккера
3. Модель равновесия Фишера
   - Модель рынка
   - Задача Эйзенберга — Гейла

Исходные данные

- Рассмотрим рынок с n делимыми *продуктами* и m *потребителями*.
- На рынке имеется b_j единиц продукта j,
- а потребитель i обладает суммой денег a_i,
- и $U_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ есть его функция полезности, которая является неубывающей и вогнутой.

Исходные данные

- Рассмотрим рынок с n делимыми *продуктами* и m *потребителями*.
- На рынке имеется b_j единиц продукта j,
- а потребитель i обладает суммой денег a_i,
- и $U_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ есть его функция полезности, которая является неубывающей и вогнутой.

Исходные данные

- Рассмотрим рынок с n делимыми *продуктами* и m *потребителями*.
- На рынке имеется b_j единиц продукта j,
- а потребитель i обладает суммой денег a_i,
- и $U_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ есть его функция полезности, которая является неубывающей и вогнутой.

Исходные данные

- Рассмотрим рынок с n делимыми *продуктами* и m *потребителями*.
- На рынке имеется b_j единиц продукта j,
- а потребитель i обладает суммой денег a_i,
- и $U_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ есть его функция полезности, которая является неубывающей и вогнутой.

Равновесные цены

Говорят, что вектор цен $p = (p_1, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}^n_+$ *освобождает рынок*, если

- для оптимальных векторов потребления

$$\bar{x}^i \in \arg\max \left\{ U_i(x) : \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le a_i,\ x \in \mathbb{R}^n_+ \right\}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{7}$$

- каждый потребитель полностью тратит все свои деньги

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}^i_j = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{8}$$

- и все продукты потребляются полностью

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i_j = b_j\,, \quad j = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Равновесные цены

Говорят, что вектор цен $p = (p_1, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}^n_+$ *освобождает рынок*, если

- для оптимальных векторов потребления

$$\bar{x}^i \in \arg\max \left\{ U_i(x) : \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le a_i,\ x \in \mathbb{R}^n_+ \right\}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{7}$$

- каждый потребитель полностью тратит все свои деньги

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}^i_j = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{8}$$

- и все продукты потребляются полностью

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i_j = b_j\,, \quad j = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Равновесные цены

Говорят, что вектор цен $p = (p_1, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}^n_+$ *освобождает рынок*, если

- для оптимальных векторов потребления
$$\bar{x}^i \in \arg\max \left\{ U_i(x) : \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le a_i,\ x \in \mathbb{R}^n_+ \right\}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{7}$$
- каждый потребитель полностью тратит все свои деньги
$$\sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}^i_j = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{8}$$
- и все продукты потребляются полностью
$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i_j = b_j\,, \quad j = 1, \dots, n. \tag{9}$$

План лекции

1. Производственная задача
   - Математическая модель
   - Условия Куна — Таккера
2. Неоклассическая задача потребления
   - Математическая модель
   - Условия Куна — Таккера
3. Модель равновесия Фишера
   - Модель рынка
   - Задача Эйзенберга — Гейла

Сведение к задаче выпуклого программирования

При выполнении определенных условий, задача поиска равновесия в модели Фишера сводится к решению задачи выпуклого программирования Эйзенберга — Гейла:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \log U_i(x^i) \to \max, \tag{10a}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_j^i \le b_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{10b}$$

$$x_j^i \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \ \ i = 1, \dots, m, \tag{10c}$$

где $x^i \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^i, \dots, x_n^i)^T$ есть вектор переменных, компонента x_j^i которого — это количество продукта j, покупаемое потребителем i.

Как найти равновесие

Теорема 2

1. *В модели Фишера существует равновесие, если*
   - *все функции полезностей* $U_i(x)$ *являются однородными* ($U_i(tx) = tU_i(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n_+$) *и непрерывно дифференцируемыми,*
   - *для каждого продукта* j *хотя бы одна из функций* $U_i(x)$ *строго возрастает по* x_j $\left(\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_j} > 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}^n_+\right)$.
2. *Если набор векторов* $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m)$ *образует оптимальное решение задачи* (10) *и* $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n_+$ *есть вектор множителей Куна — Таккера, который соответствует решению* $\bar{x}$, *то*
   - $p = \bar{\lambda}$ *есть вектор равновесных цен,*
   - $\bar{x}^i$ *есть оптимальный вектор потребления для потребителя* $i = 1, \ldots, n$.

Перейти к доказательству

Как найти равновесие

Теорема 2

1. *В модели Фишера существует равновесие, если*
   - *все функции полезностей $U_i(x)$ являются однородными $(U_i(tx) = tU_i(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n_+)$ и непрерывно дифференцируемыми,*
   - *для каждого продукта j хотя бы одна из функций $U_i(x)$ строго возрастает по x_j $\left(\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_j} > 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+\right)$.*
2. *Если набор векторов $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m)$ образует оптимальное решение задачи (10) и $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n_+$ есть вектор множителей Куна — Таккера, который соответствует решению $\bar{x}$, то*
   - *$p = \bar{\lambda}$ есть вектор равновесных цен,*
   - *$\bar{x}^i$ есть оптимальный вектор потребления для потребителя $i = 1, \ldots, n$.*

Перейти к доказательству

Как найти равновесие

Теорема 2

1. *В модели Фишера существует равновесие, если*
   - *все функции полезностей $U_i(x)$ являются однородными ($U_i(tx) = tU_i(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$) и непрерывно дифференцируемыми,*
   - *для каждого продукта j хотя бы одна из функций $U_i(x)$ строго возрастает по x_j $\left(\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_j} > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+\right)$.*
2. *Если набор векторов $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m)$ образует оптимальное решение задачи (10) и $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n_+$ есть вектор множителей Куна — Таккера, который соответствует решению $\bar{x}$, то*
   - *$p = \bar{\lambda}$ есть вектор равновесных цен,*
   - *$\bar{x}^i$ есть оптимальный вектор потребления для потребителя $i = 1, \ldots, n$.*

Перейти к доказательству

Как найти равновесие

Теорема 2

1. *В модели Фишера существует равновесие, если*
   - *все функции полезностей* $U_i(x)$ *являются однородными* ($U_i(tx) = tU_i(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n_+$) *и непрерывно дифференцируемыми,*
   - *для каждого продукта* j *хотя бы одна из функций* $U_i(x)$ *строго возрастает по* x_j $\left(\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_j} > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+\right)$.
2. *Если набор векторов* $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m)$ *образует оптимальное решение задачи* (10) *и* $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n_+$ *есть вектор множителей Куна — Таккера, который соответствует решению* $\bar{x}$, *то*
   - $p = \bar{\lambda}$ *есть вектор равновесных цен,*
   - $\bar{x}^i$ *есть оптимальный вектор потребления для потребителя* $i = 1, \ldots, n$.

Перейти к доказательству

Как найти равновесие

Теорема 2

1. *В модели Фишера существует равновесие, если*
   - *все функции полезностей* $U_i(x)$ *являются однородными* ($U_i(tx) = tU_i(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n_+$) *и непрерывно дифференцируемыми,*
   - *для каждого продукта* j *хотя бы одна из функций* $U_i(x)$ *строго возрастает по* x_j $\left(\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_j} > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+\right)$.
2. *Если набор векторов* $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m)$ *образует оптимальное решение задачи* (10) *и* $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n_+$ *есть вектор множителей Куна — Таккера, который соответствует решению* $\bar{x}$, *то*
   - $p = \bar{\lambda}$ *есть вектор равновесных цен,*
   - $\bar{x}^i$ *есть оптимальный вектор потребления для потребителя* $i = 1, \dots, n$.

Перейти к доказательству

Как найти равновесие

Теорема 2

1. *В модели Фишера существует равновесие, если*
   - *все функции полезностей $U_i(x)$ являются однородными ($U_i(tx) = tU_i(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$) и непрерывно дифференцируемыми,*
   - *для каждого продукта j хотя бы одна из функций $U_i(x)$ строго возрастает по x_j $\left(\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_j} > 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+\right)$.*
2. *Если набор векторов $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m)$ образует оптимальное решение задачи (10) и $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n_+$ есть вектор множителей Куна — Таккера, который соответствует решению $\bar{x}$, то*
   - *$p = \bar{\lambda}$ есть вектор равновесных цен,*
   - *$\bar{x}^i$ есть оптимальный вектор потребления для потребителя $i = 1, \dots, n$.*

Перейти к доказательству

Линейные функции полезности

Условия теоремы 2 выполняются для *линейных функций полезности*

$$U_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} u_j^i x_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

где u_j^i есть полезность потребителя i от обладания единицей продукта j, если предположить, что любой продукт j полезен хотя бы для одного потребителя i ($u_j^i > 0$).

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- Обозначив множители Куна — Таккера, соответствующие ограничениям (10b), через p_j, а ограничениям (10c) — через μ_j^i, Запишем условия оптимальности Куна — Таккера:

$$\bar{x}_j^i \times \frac{a_i}{U_i(\bar{x}^i)} \times \frac{\partial U_i(\bar{x}^i)}{\partial x_j^i} = p_j - \mu_j^i, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, n, \\ i = 1, \dots, m, \end{matrix} \tag{11a}$$

$$p_j \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j^i - b_j \right) = 0, \quad p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{11b}$$

$$\mu_j^i \bar{x}_j^i = 0, \quad \mu_j^i \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \tag{11c}$$

- Для фикфированного i умножим j-е равенство в (11a) на $\bar{x}_j^i$ и затем сложим n равенств.

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- Обозначив множители Куна — Таккера, соответствующие ограничениям (10b), через p_j, а ограничениям (10c) — через μ_j^i, Запишем условия оптимальности Куна — Таккера:

$$\bar{x}_j^i \times \frac{a_i}{U_i(\bar{x}^i)} \times \frac{\partial U_i(\bar{x}^i)}{\partial x_j^i} = p_j - \mu_j^i, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, n, \\ i = 1, \dots, m, \end{matrix} \tag{11a}$$

$$p_j \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j^i - b_j \right) = 0, \quad p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{11b}$$

$$\mu_j^i \bar{x}_j^i = 0, \quad \mu_j^i \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \tag{11c}$$

- Для фикфированного i умножим j-е равенство в (11a) на $\bar{x}_j^i$ и затем сложим n равенств.

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- В результате получим равенства

$$\frac{a_i}{U_i(\bar{x}^i)}\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j^i\frac{\partial U_i(\bar{x}^i)}{\partial x_j^i}=\sum_{j=1}^{n}(p_j-\mu_j^i)\bar{x}_j^i\,,\quad i=1,\dots,m.$$

- Используя формулу Эйлера $U_i(x^i)=\sum_{j=1}^{n}x_j^i\frac{\partial U_i(x^i)}{\partial x_j^i}$, справедливую в силу однородности функции U_i, преобразуем эти равенства в следующие:

$$a_i=\sum_{j=1}^{n}p_j\bar{x}_j^i,\quad i=1,\dots,m,$$

которые означают, что все потребители тратят свои деньги полностью.

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- В результате получим равенства

$$\frac{a_i}{U_i(\bar{x}^i)} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^i \frac{\partial U_i(\bar{x}^i)}{\partial x_j^i} = \sum_{j=1}^{n} (p_j - \mu_j^i)\bar{x}_j^i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Используя формулу Эйлера $U_i(x^i) = \sum_{j=1}^{n} x_j^i \frac{\partial U_i(x^i)}{\partial x_j^i}$, справедливую в силу однородности функции U_i, преобразуем эти равенства в следующие:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}_j^i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

которые означают, что все потребители тратят свои деньги полностью.

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- Пусть x — произв. вектор потребления потребителя i: $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le a_i$. Покажем, что $U_i(x) \le U_i(\bar{x}^i)$. Это означает, что $\bar{x}^i$ есть наилучший набор потребления для потреб. i.
- В силу вогнутости U_i, используя рав-ва (11а), имеем

$$U_i(x) - U_i(\bar{x}^i) \le \left(\nabla U_i(\bar{x}^i)\right)^T (x - \bar{x}^i)$$

$$= \frac{U_i(\bar{x}^i)}{a_i} \sum_{j=1}^{n} (p_j - \mu_j^i)(x_j - \bar{x}_j^i) = \frac{U_i(\bar{x}^i)}{a_i} \left(\sum_{j=1}^{n} (p_j x_j - \mu_j^i x_j) - a_i \right)$$

$$\le \frac{U_i(\bar{x}^i)}{a_i} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j - a_i \right) \le 0.$$

□

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- Пусть x — произв. вектор потребления потребителя i: $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le a_i$. Покажем, что $U_i(x) \le U_i(\bar{x}^i)$. Это означает, что $\bar{x}^i$ есть наилучший набор потребления для потреб. i.
- В силу вогнутости U_i, используя рав-ва (11a), имеем

$$U_i(x) - U_i(\bar{x}^i) \le \left(\nabla U_i(\bar{x}^i)\right)^T (x - \bar{x}^i)$$

$$= \frac{U_i(\bar{x}^i)}{a_i} \sum_{j=1}^{n} (p_j - \mu_j^i)(x_j - \bar{x}_j^i) = \frac{U_i(\bar{x}^i)}{a_i} \left(\sum_{j=1}^{n} (p_j x_j - \mu_j^i x_j) - a_i \right)$$

$$\le \frac{U_i(\bar{x}^i)}{a_i} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j - a_i \right) \le 0.$$

$\square$

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- Нам осталось показать, что все продукты потребляются полностью.
- Из условия (11b) следует, что все продукты с ненулевой ценой $p_j > 0$ потребляются полностью: $\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^i = b_j$.
- Поэтому, если предположить, что какой-то продукт j используется не полностью, т. е. $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j^i < b_j$, то его цена $p_j = 0$.
- Пусть i есть тот потребитель, функция полезности которого строго возрастает по переменной x_j^i.

□

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- Нам осталось показать, что все продукты потребляются полностью.
- Из условия (11b) следует, что все продукты с ненулевой ценой $p_j > 0$ потребляются полностью: $\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^i = b_j$.
- Поэтому, если предположить, что какой-то продукт j используется не полностью, т. е. $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j^i < b_j$, то его цена $p_j = 0$.
- Пусть i есть тот потребитель, функция полезности которого строго возрастает по переменной x_j^i.

□

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- Нам осталось показать, что все продукты потребляются полностью.
- Из условия (11b) следует, что все продукты с ненулевой ценой $p_j > 0$ потребляются полностью: $\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^i = b_j$.
- Поэтому, если предположить, что какой-то продукт j используется не полностью, т. е. $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j^i < b_j$, то его цена $p_j = 0$.
- Пусть i есть тот потребитель, функция полезности которого строго возрастает по переменной x_j^i.

$\square$

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- Нам осталось показать, что все продукты потребляются полностью.
- Из условия (11b) следует, что все продукты с ненулевой ценой $p_j > 0$ потребляются полностью: $\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^i = b_j$.
- Поэтому, если предположить, что какой-то продукт j используется не полностью, т. е. $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j^i < b_j$, то его цена $p_j = 0$.
- Пусть i есть тот потребитель, функция полезности которого строго возрастает по переменной x_j^i.

□

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- Из условия (11b) следует, что все продукты с ненулевой ценой $p_j > 0$ потребляются полностью: $\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^i = b_j$.
- Поэтому, если предположить, что какой-то продукт j используется не полностью, т. е. $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j^i < b_j$, то его цена $p_j = 0$.
- Пусть i есть тот потребитель, функция полезности которого строго возрастает по переменной x_j^i.
- Тогда потребитель i мог бы увеличить свою полезность, купив за нулевую сумму весь остаток $b_j - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j^i$ продукта j.

$\square$

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

- Поэтому, если предположить, что какой-то продукт j используется не полностью, т. е. $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j^i < b_j$, то его цена $p_j = 0$.
- Пусть i есть тот потребитель, функция полезности которого строго возрастает по переменной x_j^i.
- Тогда потребитель i мог бы увеличить свою полезность, купив за нулевую сумму весь остаток $b_j - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_j^i$ продукта j.
- Но это противоречило бы тому, что $\bar{x}^i$ — оптимальный набор потребления для потребителя i.

$\square$

Вернуться к формулировке