Предмет исследования операций

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2014

План лекции

1. Предмет исследования операций
   - Общая задача ИСО
   - Детерминированный эквивалент задачи ИСО
2. Мультикритериальные задачи
   - Оптимальность по Паретто
   - Скаляризация векторного критерия
   - Лексикографическая оптимизация

ИСО

Исследование операций (сокращенно *ИСО*)

- изучает применения количественных методов для управления сложными системами людей, машин, материалов, денег и информации;
- позволяет понять сущность управленческих проблем и разработать модели для оценки последствий принимаемых решений;
- используется в *операционном менеджменте*, который можно определить как управление ресурсами.

ИСО

Исследование операций (сокращенно *ИСО*)

- изучает применения количественных методов для управления сложными системами людей, машин, материалов, денег и информации;
- позволяет понять сущность управленческих проблем и разработать модели для оценки последствий принимаемых решений;
- используется в *операционном менеджменте*, который можно определить как управление ресурсами.

ИСО

Исследование операций (сокращенно *ИСО*)

- изучает применения количественных методов для управления сложными системами людей, машин, материалов, денег и информации;
- позволяет понять сущность управленческих проблем и разработать модели для оценки последствий принимаемых решений;
- используется в *операционном менеджменте*, который можно определить как управление ресурсами.

План лекции

1. Предмет исследования операций
   - Общая задача ИСО
   - Детерминированный эквивалент задачи ИСО
2. Мультикритериальные задачи
   - Оптимальность по Паретто
   - Скаляризация векторного критерия
   - Лексикографическая оптимизация

Общая задача ИСО

$$
\begin{aligned}
& f(x,y,z) \to \min \\
& g_i(x,y,z) \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \\
& x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где

- X, Y, Z — подмножества векторных пространств,
- x — вектор *контролируемых* факторов,
- y — вектор *случайных* факторов,
- z — вектор *неопределенных* факторов,

▸ Показать детерминированный эквивалент ▸ Показать сценарную модель

Общая задача ИСО

$$
\begin{aligned}
& f(x,y,z) \to \min \\
& g_i(x,y,z) \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \\
& x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где

- X, Y, Z — подмножества векторных пространств,
- x — вектор *контролируемых* факторов,
- y — вектор *случайных* факторов,
- z — вектор *неопределенных* факторов,

Показать детерминированный эквивалент Показать сценарную модель

Общая задача ИСО

$$
\begin{aligned}
& f(x,y,z) \to \min \\
& g_i(x,y,z) \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \\
& x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где

- X, Y, Z — подмножества векторных пространств,
- x — вектор *контролируемых* факторов,
- y — вектор *случайных* факторов,
- z — вектор *неопределенных* факторов,

Показать детерминированный эквивалент   Показать сценарную модель

Общая задача ИСО

$$\begin{aligned} & f(x,y,z) \to \min \\ & g_i(x,y,z) \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \\ & x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z, \end{aligned} \tag{1}$$

где

- X, Y, Z — подмножества векторных пространств,
- x — вектор *контролируемых* факторов,
- y — вектор *случайных* факторов,
- z — вектор *неопределенных* факторов,

Показать детерминированный эквивалент   Показать сценарную модель

Общая задача ИСО

$$
\begin{aligned}
& f(x,y,z) \to \min \\
& g_i(x,y,z) \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \\
& x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где

- X, Y, Z — подмножества векторных пространств,
- x — вектор *контролируемых* факторов,
- y — вектор *случайных* факторов,
- z — вектор *неопределенных* факторов,

Показать детерминированный эквивалент

Показать сценарную модель

Контролируемые и неконтролируемые факторы

1. Значения контролируемых факторов выбирается теми, кто принимает решение (оперирующей стороной).
2. Случайные и неопределенные факторы — это *неконтролируемые факторы* для оперирующей стороны.
3. Оперирующей стороне известны
   1. законы распределения случайных факторов, например, y_5 есть нормальная случайная величина с матожиданием $m \in [m_1, m_2]$ и стандартным отклонением $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$;
   2. только области значений неопределенных факторов, например, переменная z_3 принимает значения из отрезка $[1, 7]$.

Контролируемые и неконтролируемые факторы

1. Значения контролируемых факторов выбирается теми, кто принимает решение (оперирующей стороной).
2. Случайные и неопределенные факторы — это *неконтролируемые факторы* для оперируюшей стороны.
3. Оперирующей стороне известны
   1. законы распределения случайных факторов, например, y_5 есть нормальная случайная величина с матожиданием $m \in [m_1, m_2]$ и стандартным отклонением $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$;
   2. только области значений неопределенных факторов, например, переменная z_3 принимает значения из отрезка $[1, 7]$.

Контролируемые и неконтролируемые факторы

1. Значения контролируемых факторов выбирается теми, кто принимает решение (оперирующей стороной).
2. Случайные и неопределенные факторы — это *неконтролируемые факторы* для оперируюшей стороны.
3. Оперирующей стороне известны
   1. законы распределения случайных факторов, например, y_5 есть нормальная случайная величина с матожиданием $m \in [m_1, m_2]$ и стандартным отклонением $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$;
   2. только области значений неопределенных факторов, например, переменная z_3 принимает значения из отрезка $[1, 7]$.

Контролируемые и неконтролируемые факторы

1. Значения контролируемых факторов выбирается теми, кто принимает решение (оперирующей стороной).
2. Случайные и неопределенные факторы — это *неконтролируемые факторы* для оперирующей стороны.
3. Оперирующей стороне известны
   1. законы распределения случайных факторов, например, y_5 есть нормальная случайная величина с матожиданием $m \in [m_1, m_2]$ и стандартным отклонением $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$;
   2. только области значений неопределенных факторов, например, переменная z_3 принимает значения из отрезка $[1, 7]$.

Контролируемые и неконтролируемые факторы

1. Значения контролируемых факторов выбирается теми, кто принимает решение (оперирующей стороной).
2. Случайные и неопределенные факторы — это *неконтролируемые факторы* для оперируюшей стороны.
3. Оперирующей стороне известны
   1. законы распределения случайных факторов, например, y_5 есть нормальная случайная величина с матожиданием $m \in [m_1, m_2]$ и стандартным отклонением $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$;
   2. только области значений неопределенных факторов, например, переменная z_3 принимает значения из отрезка $[1, 7]$.

Разделы исследования операций

- математическое программирование: $X \neq \emptyset$, $Y = Z = \emptyset$;
- стохастическое программирование: $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $Z = \emptyset$;
- теория игр и робастная оптимизация: $X \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$.

Разделы исследования операций

- математическое программирование: $X \neq \emptyset$, $Y = Z = \emptyset$;
- стохастическое программирование: $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $Z = \emptyset$;
- теория игр и робастная оптимизация: $X \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$.

Разделы исследования операций

- математическое программирование: $X \neq \emptyset$, $Y = Z = \emptyset$;
- стохастическое программирование: $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $Z = \emptyset$;
- теория игр и робастная оптимизация: $X \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$.

План лекции

1. Предмет исследования операций
   - Общая задача ИСО
   - Детерминированный эквивалент задачи ИСО
2. Мультикритериальные задачи
   - Оптимальность по Паретто
   - Скаляризация векторного критерия
   - Лексикографическая оптимизация

Детерминированный эквивалент задачи ИСО

- Если предположить, что для заданного распределения случайного вектора y
  - $f(x, y, z)$ — случайная величина для всех $x \in X$ и $z \in Z$,
- то детерминированный эквивалент для общей задачи ИСО записывается следующим образом:

$$\sup_{z \in Z} E_y f(x, y, z) \to \min$$
$$\sup_{z \in Z} \sup_{y \in Y} g_i(x, y, z) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2}$$
$$x \in X,$$

где E_y обозначает математическое ожидание случайной величины относительно распределения случайного вектора y.

Показать задачу ИСО

Детерминированный эквивалент задачи ИСО

- Если предположить, что для заданного распределения случайного вектора y
  - $f(x,y,z)$ — случайная величина для всех $x \in X$ и $z \in Z$,
- то детерминированный эквивалент для общей задачи ИСО записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sup_{z\in Z} E_y f(x,y,z) \to \min \\ &\sup_{z\in Z}\sup_{y\in Y} g_i(x,y,z) \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \\ &x \in X, \end{aligned} \tag{2}$$

где E_y обозначает математическое ожидание случайной величины относительно распределения случайного вектора y.

Показать задачу ИСО

Сценарный подход

- Сценарий $k = 1, \ldots, K$ реализуется с вероятностью $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$.
- Случайный вектор y принимает значение y^k, если реализуется сценарий k.
- Детерминтрованный эквивалент переписывается следующим образом:

$$\begin{gathered}
\sup_{z \in Z} \sum_{k=1}^{K} p_k f(x, y^k, z) \to \min \\
\sup_{z \in Z} g_i(x, y^k, z) \leq 0, \quad k = 1, \ldots, K;\ i = 1, \ldots, m, \\
x \in X.
\end{gathered} \tag{3}$$

▸ Показать задачу ИСО

Сценарный подход

- Сценарий $k = 1, \dots, K$ реализуется с вероятностью $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$.
- Случайный вектор y принимает значение y^k, если реализуется сценарий k.
- Детерминтрованный эквивалент переписывается следующим образом:

$$\sup_{z \in Z} \sum_{k=1}^{K} p_k f(x, y^k, z) \to \min$$
$$\sup_{z \in Z} g_i(x, y^k, z) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K; \; i = 1, \dots, m, \tag{3}$$
$$x \in X.$$

▸ Показать задачу ИСО

Сценарный подход

- Сценарий $k = 1, \ldots, K$ реализуется с вероятностью $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$.
- Случайный вектор y принимает значение y^k, если реализуется сценарий k.
- Детерминтрованный эквивалент переписывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{z\in Z} \sum_{k=1}^{K} p_k f(x, y^k, z) \to \min \\
&\qquad \sup_{z\in Z} g_i(x, y^k, z) \leq 0, \quad k = 1, \ldots, K;\ i = 1, \ldots, m, \\
&\qquad\qquad\qquad x \in X.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Показать задачу ИСО

Задача многокритериальной оптимизации

$$\min\{f(x) : x \in X\}, \tag{4}$$

где

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$;
- $f : X \to \mathbb{R}^m$ — m-мерная вектор-функция, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$.

Задача многокритериальной оптимизации

$$\min\{f(x) : x \in X\}, \tag{4}$$

где

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$;
- $f : X \to \mathbb{R}^m$ — m-мерная вектор-функция, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$.

Задача многокритериальной оптимизации

$$\min\{f(x) : x \in X\}, \tag{4}$$

где

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$;
- $f : X \to \mathbb{R}^m$ — m-мерная вектор-функция, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$.

План лекции

1. Предмет исследования операций
   - Общая задача ИСО
   - Детерминированный эквивалент задачи ИСО
2. Мультикритериальные задачи
   - Оптимальность по Паретто
   - Скаляризация векторного критерия
   - Лексикографическая оптимизация

Сравнение решений

- Для пары допустимых решений $x, y \in X$ разделим наши m критериев на три группы:
  - $L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) < f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x лучше решения y;
  - $G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) > f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x хуже решения y;
  - $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) = f_i(y)\}$ — множество критериев, относительно которых решения x и y равноценны.
- Если
  - $E(x,y) = \{1,\dots,m\}$, то решения x и y равноценны;
  - $G(x,y) = \emptyset$, то говорят, что решение x не *хуже по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) = \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то решение x *лучше по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) \neq \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то говорят, что решения x и y *несравнимы по Паретто*.

Сравнение решений

- Для пары допустимых решений $x, y \in X$ разделим наши m критериев на три группы:
  - $L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) < f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x лучше решения y;
  - $G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) > f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x хуже решения y;
  - $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) = f_i(y)\}$ — множество критериев, относительно которых решения x и y равноценны.
- Если
  - $E(x,y) = \{1, \dots, m\}$, то решения x и y равноценны;
  - $G(x,y) = \emptyset$, то говорят, что решение x не *хуже по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) = \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то решение x *лучше по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) \neq \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то говорят, что решения x и y *несравнимы по Паретто*.

Сравнение решений

- Для пары допустимых решений $x, y \in X$ разделим наши m критериев на три группы:
  - $L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) < f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x лучше решения y;
  - $G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) > f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x хуже решения y;
  - $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) = f_i(y)\}$ — множество критериев, относительно которых решения x и y равноценны.
- Если
  - $E(x,y) = \{1,\dots,m\}$, то решения x и y равноценны;
  - $G(x,y) = \emptyset$, то говорят, что решение x не *хуже по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) = \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то решение x *лучше по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) \neq \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то говорят, что решения x и y *несравнимы по Паретто*.

Сравнение решений

- Для пары допустимых решений $x, y \in X$ разделим наши m критериев на три группы:
  - $L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) < f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x лучше решения y;
  - $G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) > f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x хуже решения y;
  - $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) = f_i(y)\}$ — множество критериев, относительно которых решения x и y равноценны.
- Если
  - $E(x,y) = \{1,\dots,m\}$, то решения x и y равноценны;
  - $G(x,y) = \emptyset$, то говорят, что решение x не *хуже по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) = \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то решение x *лучше по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) \neq \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то говорят, что решения x и y *несравнимы по Паретто*.

Сравнение решений

- Для пары допустимых решений $x, y \in X$ разделим наши m критериев на три группы:
  - $L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) < f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x лучше решения y;
  - $G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) > f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x хуже решения y;
  - $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) = f_i(y)\}$ — множество критериев, относительно которых решения x и y равноценны.
- Если
  - $E(x,y) = \{1,\dots,m\}$, то решения x и y равноценны;
  - $G(x,y) = \emptyset$, то говорят, что решение x не *хуже по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) = \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то решение x *лучше по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) \neq \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то говорят, что решения x и y *несравнимы по Паретто*.

Сравнение решений

- Для пары допустимых решений $x, y \in X$ разделим наши m критериев на три группы:
    - $L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) < f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x лучше решения y;
    - $G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) > f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x хуже решения y;
    - $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) = f_i(y)\}$ — множество критериев, относительно которых решения x и y равноценны.
- Если
    - $E(x,y) = \{1,\dots,m\}$, то решения x и y равноценны;
    - $G(x,y) = \emptyset$, то говорят, что решение x не *хуже по Паретто*, чем решение y;
    - $G(x,y) = \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то решение x *лучше по Паретто*, чем решение y;
    - $G(x,y) \neq \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то говорят, что решения x и y *несравнимы по Паретто*.

Сравнение решений

- Для пары допустимых решений $x, y \in X$ разделим наши m критериев на три группы:
  - $L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) < f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x лучше решения y;
  - $G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) > f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x хуже решения y;
  - $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) = f_i(y)\}$ — множество критериев, относительно которых решения x и y равноценны.
- Если
  - $E(x,y) = \{1,\dots,m\}$, то решения x и y равноценны;
  - $G(x,y) = \emptyset$, то говорят, что решение x не *хуже по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) = \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то решение x *лучше по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) \neq \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то говорят, что решения x и y *несравнимы по Паретто*.

Сравнение решений

- Для пары допустимых решений $x, y \in X$ разделим наши m критериев на три группы:
  - $L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) < f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x лучше решения y;
  - $G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) > f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x хуже решения y;
  - $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) = f_i(y)\}$ — множество критериев, относительно которых решения x и y равноценны.
- Если
  - $E(x,y) = \{1,\ldots,m\}$, то решения x и y равноценны;
  - $G(x,y) = \emptyset$, то говорят, что решение x не *хуже по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) = \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то решение x *лучше по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) \neq \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то говорят, что решения x и y *несравнимы по Паретто*.

Сравнение решений

- Для пары допустимых решений $x, y \in X$ разделим наши m критериев на три группы:
  - $L(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) < f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x лучше решения y;
  - $G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) > f_i(y)\}$ — множество критериев, для которых решение x хуже решения y;
  - $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \{i : f_i(x) = f_i(y)\}$ — множество критериев, относительно которых решения x и y равноценны.
- Если
  - $E(x,y) = \{1, \dots, m\}$, то решения x и y равноценны;
  - $G(x,y) = \emptyset$, то говорят, что решение x не *хуже по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) = \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то решение x *лучше по Паретто*, чем решение y;
  - $G(x,y) \neq \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$, то говорят, что решения x и y *несравнимы по Паретто*.

Оптимальность по Паретто

- Решение $x \in X$ называется *оптимальным по Паретто* для задачи (4), если в X нет другого решения, которое лучше по Паретто, чем решение x.
- Целью в задаче (4) может быть поиск всех оптимальных по Паретто решений.

Оптимальность по Паретто

- Решение $x \in X$ называется *оптимальным по Паретто* для задачи (4), если в X нет другого решения, которое лучше по Паретто, чем решение x.
- Целью в задаче (4) может быть поиск всех оптимальных по Паретто решений.

Пример многокритериальной задачи

Пример

Найти все оптимальные по Паретто решения в следующей двухкритериальной задаче оптимизации:

$$\min\left\{\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+x_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\}.$$

Решение.

Вычислим значения векторного критерия для всех решений:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Оптимальными по Паретто являются следующие два решения: $(1,3)^T$ и $(2,2)^T$. □

Пример многокритериальной задачи

Пример

Найти все оптимальные по Паретто решения в следующей двухкритериальной задаче оптимизации:

$$\min\left\{\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+x_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\}.$$

Решение.

Вычислим значения векторного критерия для всех решений:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Оптимальными по Паретто являются следующие два решения: $(1,3)^T$ и $(2,2)^T$. □

Цели при решении многокритериальных задач на практике

- При решении реальных практических задач «выписать» все оптимальные по Паретто решения чаще всего невозможно, из-за огромного числа таких решений. К тому же, при наличии нескольких решений нам все равно нужно будет выбрать одно из них для реализации на практике.
- Поэтому на практике изначально ставится более скромная задача — найти одно оптимальное по Паретто решение задачи (4), которое
  1. оптимально для некоторого скалярного критерия,
  2. или является лексикографически оптимальным для некоторого упорядочения критериев $f_1, \ldots, f_m$.

Цели при решении многокритериальных задач на практике

- При решении реальных практических задач «выписать» все оптимальные по Паретто решения чаще всего невозможно, из-за огромного числа таких решений. К тому же, при наличии нескольких решений нам все равно нужно будет выбрать одно из них для реализации на практике.
- Поэтому на практике изначально ставится более скромная задача — найти одно оптимальное по Паретто решение задачи (4), которое
    1. оптимально для некоторого скалярного критерия,
    2. или является лексикографически оптимальным для некоторого упорядочения критериев $f_1, \ldots, f_m$.

Цели при решении многокритериальных задач на практике

- При решении реальных практических задач «выписать» все оптимальные по Паретто решения чаще всего невозможно, из-за огромного числа таких решений. К тому же, при наличии нескольких решений нам все равно нужно будет выбрать одно из них для реализации на практике.
- Поэтому на практике изначально ставится более скромная задача — найти одно оптимальное по Паретто решение задачи (4), которое
  1. оптимально для некоторого скалярного критерия,
  2. или является лексикографически оптимальным для некоторого упорядочения критериев $f_1, \ldots, f_m$.

Цели при решении многокритериальных задач на практике

- При решении реальных практических задач «выписать» все оптимальные по Паретто решения чаще всего невозможно, из-за огромного числа таких решений. К тому же, при наличии нескольких решений нам все равно нужно будет выбрать одно из них для реализации на практике.
- Поэтому на практике изначально ставится более скромная задача — найти одно оптимальное по Паретто решение задачи (4), которое
  1. оптимально для некоторого скалярного критерия,
  2. или является лексикографически оптимальным для некоторого упорядочения критериев $f_1, \dots, f_m$.

План лекции

Свертка критериев

- Каждому критерию $i = 1, \ldots, m$ приписывается некоторый вес $\lambda_i \geq 0$ и затем решается оптимизационная задача с одним критерием:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) : \, x \in X \right\}. \tag{5}$$

- Свертку критериев можно использовать тогда, когда значения всех критериев можно выразить в одной единице измерения.

Свертка критериев

- Каждому критерию $i = 1, \ldots, m$ приписывается некоторый вес $\lambda_i \geq 0$ и затем решается оптимизационная задача с одним критерием:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) : \ x \in X\right\}. \tag{5}$$

- Свертку критериев можно использовать тогда, когда значения всех критериев можно выразить в одной единице измерения.

Свертка критериев и Паретто оптимальность

Утверждение 1

Если все $\lambda_i > 0$, *то оптимальное решение* x^0 *задачи* (5) *является оптимальным по Паретто для задачи* (4).

Доказательство.

- Пусть существует точка $x^1 \in X$, которая лучше x^0: $f_i(x^1) \le f_i(x^0)$ для $i = 1, \dots, m$, и $f_{i_0}(x^1) < f_{i_0}(x^0)$ для некотрого i_0.
- Складывая неравенства $\lambda_i f_i(x^1) \le \lambda_i f_i(x^0)$ $(i = 1, \dots, m)$, получим неравенство $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^1) < \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^0)$, которое противоречит тому, что x^0 есть оптимальное решение задачи (5).

□

Свертка критериев и Паретто оптимальность

Утверждение 1

Если все $\lambda_i > 0$, *то оптимальное решение* x^0 *задачи* (5) *является оптимальным по Паретто для задачи* (4).

Доказательство.

- Пусть существует точка $x^1 \in X$, которая лучше x^0: $f_i(x^1) \le f_i(x^0)$ для $i = 1, \dots, m$, и $f_{i_0}(x^1) < f_{i_0}(x^0)$ для некотрого i_0.
- Складывая неравенства $\lambda_i f_i(x^1) \le \lambda_i f_i(x^0)$ $(i = 1, \dots, m)$, получим неравенство $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^1) < \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^0)$, которое противоречит тому, что x^0 есть оптимальное решение задачи (5).

□

Свертка критериев и Паретто оптимальность

Утверждение 1

Если все $\lambda_i > 0$, то оптимальное решение x^0 задачи (5) является оптимальным по Паретто для задачи (4).

Доказательство.

- Пусть существует точка $x^1 \in X$, которая лучше x^0: $f_i(x^1) \le f_i(x^0)$ для $i = 1, \dots, m$, и $f_{i_0}(x^1) < f_{i_0}(x^0)$ для некотрого i_0.
- Складывая неравенства $\lambda_i f_i(x^1) \le \lambda_i f_i(x^0)$ $(i = 1, \dots, m)$, получим неравенство $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^1) < \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^0)$, которое противоречит тому, что x^0 есть оптимальное решение задачи (5).

□

Свертка критериев и Паретто оптимальность

Но верно ли обратное:

можно ли подобрать веса таким образом, чтобы оптимальным в задаче (5) оказалось любое заданное оптимальное по Паретто решение задачи (4)?

В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный, что продемонстрировано на следующем рисунке.

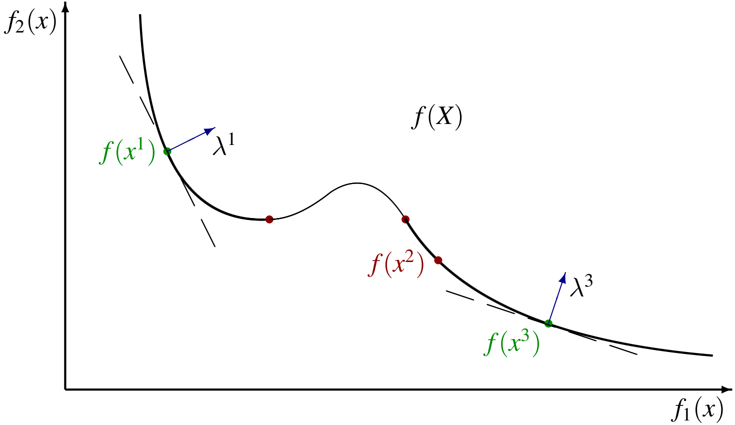
Свертка критериев и Паретто оптимальность

Но верно ли обратное:

можно ли подобрать веса таким образом, чтобы оптимальным в задаче (5) оказалось любое заданное оптимальное по Паретто решение задачи (4)?

В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный, что продемонстрировано на следующем рисунке.

Геометрическая интерпретация свертки критериев



Свертка критериев для выпуклых задач

Утверждение 2

Когда X — выпуклое множество и все критерии $f_1, \ldots, f_m$ — выпуклые на X функции, можно подобрать веса таким образом, чтобы оптимальным в задаче (5) оказалось любое заданное оптимальное по Паретто решение задачи (4).

Доказательство.

- Если $x^0 \in X$ есть оптимальное по Паретто решение задачи (4), то $f(x^0)$ — граничная точка множества $f(X)$.
- По теореме об отделении выпуклых множеств существует гиперплоскость $a^T y = b$, такая, что $a^T f(x) \geq b$ для всех $x \in X$ и $a^T f(x^0) \leq b$.
- Последнее означает, что для $\lambda = a$ точка x^0 является оптимальным решением задачи (5).

Свертка критериев для выпуклых задач

Утверждение 2

Когда X — выпуклое множество и все критерии $f_1, \ldots, f_m$ — выпуклые на X функции, можно подобрать веса таким образом, чтобы оптимальным в задаче (5) оказалось любое заданное оптимальное по Паретто решение задачи (4).

Доказательство.

- Если $x^0 \in X$ есть оптимальное по Паретто решение задачи (4), то $f(x^0)$ — граничная точка множества $f(X)$.
- По теореме об отделении выпуклых множеств существует гиперплоскость $a^T y = b$, такая, что $a^T f(x) \geq b$ для всех $x \in X$ и $a^T f(x^0) \leq b$.
- Последнее означает, что для $\lambda = a$ точка x^0 является оптимальным решением задачи (5).

□

Свертка критериев для выпуклых задач

Утверждение 2

Когда X — выпуклое множество и все критерии $f_1, \ldots, f_m$ — выпуклые на X функции, можно подобрать веса таким образом, чтобы оптимальным в задаче (5) *оказалось любое заданное оптимальное по Паретто решение задачи* (4).

Доказательство.

- Если $x^0 \in X$ есть оптимальное по Паретто решение задачи (4), то $f(x^0)$ — граничная точка множества $f(X)$.
- По теореме об отделении выпуклых множеств существует гиперплоскость $a^T y = b$, такая, что $a^T f(x) \geq b$ для всех $x \in X$ и $a^T f(x^0) \leq b$.
- Последнее означает, что для $\lambda = a$ точка x^0 является оптимальным решением задачи (5).

□

Свертка критериев для выпуклых задач

Утверждение 2

Когда X — выпуклое множество и все критерии $f_1, \ldots, f_m$ — выпуклые на X функции, можно подобрать веса таким образом, чтобы оптимальным в задаче (5) оказалось любое заданное оптимальное по Паретто решение задачи (4).

Доказательство.

- Если $x^0 \in X$ есть оптимальное по Паретто решение задачи (4), то $f(x^0)$ — граничная точка множества $f(X)$.
- По теореме об отделении выпуклых множеств существует гиперплоскость $a^T y = b$, такая, что $a^T f(x) \geq b$ для всех $x \in X$ и $a^T f(x^0) \leq b$.
- Последнее означает, что для $\lambda = a$ точка x^0 является оптимальным решением задачи (5).

$\square$

Целевое программирование

Когда единицы измерения критериев разные скаляризация векторного критерия осуществляется иначе.

- Нам известны *целевые* значения $g_1, \ldots, g_m$ для всех критериев $f_1, \ldots, f_m$, отклонения от которых в большую сторону нежелательны.
- Например, мы хотели бы разместить несколько дополнительных станций скорой помощи, чтобы достичь следующих целей:
  1. среднее время отклика (от звонка больного до момента прибытия к нему скорой помощи) не должно превосходить 5 минут;
  2. количество потенциальных больных, которые не смогут получить помощь в течении 10 минут, не должно превосходить 10 процентов от их общего количества;
  3. как можно меньше отклониться от бюджета в 250 тыс. долларов.

Целевое программирование

Когда единицы измерения критериев разные скаляризация векторного критерия осуществляется иначе.

- Нам известны *целевые* значения $g_1, \ldots, g_m$ для всех критериев $f_1, \ldots, f_m$, отклонения от которых в большую сторону нежелательны.
- Например, мы хотели бы разместить несколько дополнительных станций скорой помощи, чтобы достичь следующих целей:
  1. среднее время отклика (от звонка больного до момента прибытия к нему скорой помощи) не должно превосходить 5 минут;
  2. количество потенциальных больных, которые не смогут получить помощь в течении 10 минут, не должно превосходить 10 процентов от их общего количества;
  3. как можно меньше отклониться от бюджета в 250 тыс. долларов.

Целевое программирование

Когда единицы измерения критериев разные скаляризация векторного критерия осуществляется иначе.

- Нам известны *целевые* значения $g_1, \ldots, g_m$ для всех критериев $f_1, \ldots, f_m$, отклонения от которых в большую сторону нежелательны.
- Например, мы хотели бы разместить несколько дополнительных станций скорой помощи, чтобы достичь следующих целей:
    1. среднее время отклика (от звонка больного до момента прибытия к нему скорой помощи) не должно превосходить 5 минут;
    2. количество потенциальных больных, которые не смогут получить помощь в течении 10 минут, не должно превосходить 10 процентов от их общего количества;
    3. как можно меньше отклониться от бюджета в 250 тыс. долларов.

Целевое программирование

Когда единицы измерения критериев разные скаляризация векторного критерия осуществляется иначе.

- Нам известны *целевые* значения $g_1, \dots, g_m$ для всех критериев $f_1, \dots, f_m$, отклонения от которых в большую сторону нежелательны.
- Например, мы хотели бы разместить несколько дополнительных станций скорой помощи, чтобы достичь следующих целей:
  1. среднее время отклика (от звонка больного до момента прибытия к нему скорой помощи) не должно превосходить 5 минут;
  2. количество потенциальных больных, которые не смогут получить помощь в течении 10 минут, не должно превосходить 10 процентов от их общего количества;
  3. как можно меньше отклониться от бюджета в 250 тыс. долларов.

Целевое программирование

Когда единицы измерения критериев разные скаляризация векторного критерия осуществляется иначе.

- Нам известны *целевые* значения $g_1, \ldots, g_m$ для всех критериев $f_1, \ldots, f_m$, отклонения от которых в большую сторону нежелательны.
- Например, мы хотели бы разместить несколько дополнительных станций скорой помощи, чтобы достичь следующих целей:
  1. среднее время отклика (от звонка больного до момента прибытия к нему скорой помощи) не должно превосходить 5 минут;
  2. количество потенциальных больных, которые не смогут получить помощь в течении 10 минут, не должно превосходить 10 процентов от их общего количества;
  3. как можно меньше отклониться от бюджета в 250 тыс. долларов.

Целевое программирование

Когда единицы измерения критериев разные скаляризация векторного критерия осуществляется иначе.

- Нам известны *целевые* значения $g_1, \ldots, g_m$ для всех критериев $f_1, \ldots, f_m$, отклонения от которых в большую сторону нежелательны.
- Например, мы хотели бы разместить несколько дополнительных станций скорой помощи, чтобы достичь следующих целей:
  1. среднее время отклика (от звонка больного до момента прибытия к нему скорой помощи) не должно превосходить 5 минут;
  2. количество потенциальных больных, которые не смогут получить помощь в течении 10 минут, не должно превосходить 10 процентов от их общего количества;
  3. как можно меньше отклониться от бюджета в 250 тыс. долларов.

Целевое программирование

- Задача многокритериальной оптимизации (4) заменяется следующей задачей:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} w_i h_i(s_i) \to \min, \\ &f_i(x) - s_i \le g_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &s \in \mathbb{R}_+^m,\ x \in X, \end{aligned} \tag{6}$$

  где $h_i(s_i)$ — это штраф за превышение критерием i его целевого значения на величину s_i.
- На практике наиболее часто используются *линейные* $h_i(s_i) = s_i$ и *квадратичные* $h_i(s_i) = s_i^2$ штрафные функции.
- Целью в задаче (6) является минимизация взвешенной суммы штрафов за отклонение компонент векторного критерия от их целевых значений.

Целевое программирование

- Задача многокритериальной оптимизации (4) заменяется следующей задачей:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} w_i h_i(s_i) \to \min, \\ &f_i(x) - s_i \le g_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &s \in \mathbb{R}^m_+, \; x \in X, \end{aligned} \tag{6}$$

  где $h_i(s_i)$ — это штраф за превышение критерием i его целевого значения на величину s_i.
- На практике наиболее часто используются *линейные* $h_i(s_i) = s_i$ и *квадратичные* $h_i(s_i) = s_i^2$ штрафные функции.
- Целью в задаче (6) является минимизация взвешенной суммы штрафов за отклонение компонент векторного критерия от их целевых значений.

Целевое программирование

- Задача многокритериальной оптимизации (4) заменяется следующей задачей:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} w_i h_i(s_i) \to \min, \\ &f_i(x) - s_i \le g_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ &s \in \mathbb{R}^m_+, \; x \in X, \end{aligned} \tag{6}$$

  где $h_i(s_i)$ — это штраф за превышение критерием i его целевого значения на величину s_i.
- На практике наиболее часто используются *линейные* $h_i(s_i) = s_i$ и *квадратичные* $h_i(s_i) = s_i^2$ штрафные функции.
- Целью в задаче (6) является минимизация взвешенной суммы штрафов за отклонение компонент векторного критерия от их целевых значений.

План лекции

1. Предмет исследования операций
   - Общая задача ИСО
   - Детерминированный эквивалент задачи ИСО
2. Мультикритериальные задачи
   - Оптимальность по Паретто
   - Скаляризация векторного критерия
   - Лексикографическая оптимизация

Задача лексикографической оптимизации

Определение

Говорят, что $u \in \mathbb{R}^m$ *лексикографически меньше* чем $v \in \mathbb{R}^m$ и записывается $u \prec_{\text{lex}} v$, если для некоторого k, $1 \le k < m$, выполняются условия $u_i = v_i$ для $i = 1, \ldots, k-1$ и $u_k < v_k$. Обозначение $u \preceq_{\text{lex}} v$ означает, что $u \prec_{\text{lex}} v$ или $u = v$.

- Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}^m$. Критерии $f_1, \ldots, f_m$ пронумерованы в порядке убывания их значимости.
- В задаче *лексикографической оптимизации*

$$\text{lexmin}\{f(x) : \ x \in X\} \tag{7}$$

нужно найти точку $x^0 \in X$, что $f(x^0) \preceq_{\text{lex}} f(x) \ \forall \, x \in X$.
- x^0 называется *точкой лексикографического минимума*, которая также являются оптимальной по Паретто для задачи многокритериальной оптимизации (4).

Задача лексикографической оптимизации

Определение

Говорят, что $u \in \mathbb{R}^m$ *лексикографически меньше* чем $v \in \mathbb{R}^m$ и записывается $u \prec_{\text{lex}} v$, если для некоторого k, $1 \le k < m$, выполняются условия $u_i = v_i$ для $i = 1, \dots, k-1$ и $u_k < v_k$. Обозначение $u \preceq_{\text{lex}} v$ означает, что $u \prec_{\text{lex}} v$ или $u = v$.

- Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}^m$. Критерии $f_1, \dots, f_m$ пронумерованы в порядке убывания их значимости.
- В задаче *лексикографической оптимизации*

$$\text{lexmin}\{f(x) : \ x \in X\} \tag{7}$$

нужно найти точку $x^0 \in X$, что $f(x^0) \preceq_{\text{lex}} f(x) \ \forall \, x \in X$.

- x^0 называется *точкой лексикографического минимума*, которая также являются оптимальной по Паретто для задачи многокритериальной оптимизации (4).

Задача лексикографической оптимизации

Определение

Говорят, что $u \in \mathbb{R}^m$ *лексикографически меньше* чем $v \in \mathbb{R}^m$ и записывается $u \prec_{\text{lex}} v$, если для некоторого k, $1 \le k < m$, выполняются условия $u_i = v_i$ для $i = 1, \dots, k-1$ и $u_k < v_k$. Обозначение $u \preceq_{\text{lex}} v$ означает, что $u \prec_{\text{lex}} v$ или $u = v$.

- Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}^m$. Критерии $f_1, \dots, f_m$ пронумерованы в порядке убывания их значимости.
- В задаче *лексикографической оптимизации*

$$\text{lexmin}\{f(x) :\ x \in X\} \tag{7}$$

нужно найти точку $x^0 \in X$, что $f(x^0) \preceq_{\text{lex}} f(x)\ \forall\, x \in X$.

- x^0 называется *точкой лексикографического минимума*, которая также являются оптимальной по Паретто для задачи многокритериальной оптимизации (4).

Задача лексикографической оптимизации

- Мы можем найти лексикографический минимум в задаче лексикографической оптимизации (7), для $k = 1, \dots, m$ последовательно решив m оптимизационных задач:

$$\begin{aligned} f_k^* &= \min f_k(x), \\ f_i(x) &\le f_i^*, \quad i = 1, \dots, k-1, \\ x &\in X. \end{aligned} \tag{8}$$

- Решение x^* последней задачи (при $k = m$) и будет точкой лексикографического минимума в задаче (7).

Задача лексикографической оптимизации

- Мы можем найти лексикографический минимум в задаче лексикографической оптимизации (7), для $k = 1, \ldots, m$ последовательно решив m оптимизационных задач:

$$\begin{aligned} f_k^* &= \min f_k(x), \\ f_i(x) &\le f_i^*, \quad i = 1, \ldots, k-1, \\ x &\in X. \end{aligned} \tag{8}$$

- Решение x^* последней задачи (при $k = m$) и будет точкой лексикографического минимума в задаче (7).