Квадратичное программирование

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2014

План лекции

1. Задача квадратичного программирования
    - Алгоритм Лемке
    - Числовой пример
2. Приложения квадратичного программирования
    - Модель Марковица оптимизации портфеля
    - Регрессия с ограничениями на коэффициенты

Задача квадратичного программирования

Будем рассматривать *задачу квадратичного программирования* (КП) следующего вида

$$Q(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min,$$
$$Ax \geq b,$$
$$x \geq 0,$$

где

- A есть матрица размера $m \times n$,
- D — симметричная матрица размера $n \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.
- Если D не симметрична, то D нужно заменить на $\bar{D} = \frac{1}{2}(D + D^T)$.

Задача квадратичного программирования

Будем рассматривать *задачу квадратичного программирования* (КП) следующего вида

$$Q(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min,$$
$$Ax \geq b,$$
$$x \geq 0,$$

где

- A есть матрица размера $m \times n$,
- D — симметричная матрица размера $n \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.
- Если D не симметрична, то D нужно заменить на $\bar{D} = \frac{1}{2}(D + D^T)$.

Задача квадратичного программирования

Будем рассматривать *задачу квадратичного программирования* (КП) следующего вида

$$Q(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min,$$
$$Ax \geq b,$$
$$x \geq 0,$$

где

- A есть матрица размера $m \times n$,
- D — симметричная матрица размера $n \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.
- Если D не симметрична, то D нужно заменить на $\bar{D} = \frac{1}{2}(D + D^T)$.

Задача квадратичного программирования

Будем рассматривать *задачу квадратичного программирования* (КП) следующего вида

$$\begin{aligned} Q(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min, \\ Ax \geq b, \\ x \geq 0, \end{aligned}$$

где

- A есть матрица размера $m \times n$,
- D — симметричная матрица размера $n \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.
- Если D не симметрична, то D нужно заменить на $\bar{D} = \frac{1}{2}(D + D^T)$.

Задача квадратичного программирования

Будем рассматривать *задачу квадратичного программирования* (КП) следующего вида

$$Q(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min,$$
$$Ax \geq b,$$
$$x \geq 0,$$

где

- A есть матрица размера $m \times n$,
- D — симметричная матрица размера $n \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.
- Если D не симметрична, то D нужно заменить на $\bar{D} = \frac{1}{2}(D + D^T)$.

Задача квадратичного программирования

Будем рассматривать *задачу квадратичного программирования* (КП) следующего вида

$$\begin{aligned} Q(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min, \\ Ax \geq b, \\ x \geq 0, \end{aligned}$$

где

- A есть матрица размера $m \times n$,
- D — симметричная матрица размера $n \times n$,
- $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.
- Если D не симметрична, то D нужно заменить на $\bar{D} = \frac{1}{2}(D + D^T)$.

План лекции

1. Задача квадратичного программирования
    - Алгоритм Лемке
    - Числовой пример
2. Приложения квадратичного программирования
    - Модель Марковица оптимизации портфеля
    - Регрессия с ограничениями на коэффициенты

Условия оптимальности Куна - Таккера

- Припишем ограничениям задачи КП

$$\begin{aligned} & c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min, \\ y: \quad & -Ax \le -b, \\ u: \quad & -x \le 0, \end{aligned}$$

  множители $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ и $u = (u_1, \dots, u_n)^T$.

- Запишем необходимые условия оптимальности Куна — Таккера:

$$\begin{aligned} c + Dx - A^T y - u = 0, \\ y^T (Ax - b) = 0, \\ u^T x = 0, \\ Ax - b \ge 0, \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ u \ge 0. \end{aligned}$$

Условия оптимальности Куна - Таккера

- Припишем ограничениям задачи КП
$$\begin{array}{rr} & c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min, \\ y: & -Ax \le -b, \\ u: & -x \le 0, \end{array}$$
множители $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ и $u = (u_1, \dots, u_n)^T$.
- Запишем необходимые условия оптимальности Куна — Таккера:
$$\begin{array}{r} c + Dx - A^T y - u = 0, \\ y^T (Ax - b) = 0, \\ u^T x = 0, \\ Ax - b \ge 0, \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ u \ge 0. \end{array}$$

Условия оптимальности Куна - Таккера

- Припишем ограничениям задачи КП

$$\begin{aligned} & c^Tx+\frac{1}{2}x^TDx\to\min,\\ y:\quad & -Ax\le -b,\\ u:\quad & -x\le 0,\end{aligned}$$

  множители $y=(y_1,\ldots,y_m)^T$ и $u=(u_1,\ldots,u_n)^T$.

- Запишем необходимые условия оптимальности Куна — Таккера:

$$\begin{aligned} c+Dx-A^Ty-u=0,\\ y^T(Ax-b)=0,\\ u^Tx=0,\\ Ax-b\ge 0,\\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ u\ge 0.\end{aligned}$$

Условия оптимальности Куна - Таккера

- Припишем ограничениям задачи КП

$$\begin{aligned} & c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min, \\ y: \quad & -Ax \leq -b, \\ u: \quad & -x \leq 0, \end{aligned}$$

множители $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ и $u = (u_1, \dots, u_n)^T$.

- Запишем необходимые условия оптимальности Куна — Таккера:

$$\begin{aligned} c + Dx - A^T y - u = 0, \\ y^T (Ax - b) = 0, \\ u^T x = 0, \\ Ax - b \geq 0, \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; u \geq 0. \end{aligned}$$

Условия оптимальности Куна - Таккера

- Припишем ограничениям задачи КП

$$\begin{aligned} & c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min, \\ y: \quad & -Ax \le -b, \\ u: \quad & -x \le 0, \end{aligned}$$

множители $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ и $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$.

- Запишем необходимые условия оптимальности Куна — Таккера:

$$\begin{aligned} c + Dx - A^T y - u &= 0, \\ y^T (Ax - b) &= 0, \\ u^T x &= 0, \\ Ax - b &\ge 0, \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ u &\ge 0. \end{aligned}$$

Условия оптимальности Куна - Таккера

- Припишем ограничениям задачи КП
$$\begin{aligned} & c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min, \\ y: \quad & -Ax \le -b, \\ u: \quad & -x \le 0, \end{aligned}$$
множители $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ и $u = (u_1, \dots, u_n)^T$.
- Запишем необходимые условия оптимальности Куна — Таккера:
$$\begin{aligned} c + Dx - A^T y - u = 0, \\ y^T (Ax - b) = 0, \\ u^T x = 0, \\ Ax - b \ge 0, \\ x \ge 0, \ y \ge 0, \ u \ge 0. \end{aligned}$$

Условия оптимальности Куна - Таккера

- Припишем ограничениям задачи КП

$$\begin{aligned} & c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min, \\ y: \quad & -Ax \leq -b, \\ u: \quad & -x \leq 0, \end{aligned}$$

множители $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ и $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$.

- Запишем необходимые условия оптимальности Куна — Таккера:

$$\begin{aligned} c + Dx - A^T y - u = 0, \\ y^T (Ax - b) = 0, \\ u^T x = 0, \\ Ax - b \geq 0, \\ x \geq 0, \ y \geq 0, \ u \geq 0. \end{aligned}$$

Условия оптимальности Куна - Таккера

- Припишем ограничениям задачи КП

$$\begin{aligned} & c^T x + \frac{1}{2} x^T D x \to \min, \\ y: \quad & -Ax \leq -b, \\ u: \quad & -x \leq 0, \end{aligned}$$

множители $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ и $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$.

- Запишем необходимые условия оптимальности Куна — Таккера:

$$\begin{aligned} c + Dx - A^T y - u = 0, \\ y^T (Ax - b) = 0, \\ u^T x = 0, \\ Ax - b \geq 0, \\ x \geq 0, \ y \geq 0, \ u \geq 0. \end{aligned}$$

Сведение к линейной задаче о дополнительности

- Вводя переменные избытка $v = Ax - b$, перепишем условия оптимальности в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Данная задача является частным случаем линейной задачи о дополнительности.

Сведение к линейной задаче о дополнительности

- Вводя переменные избытка $v = Ax - b$, перепишем условия оптимальности в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Данная задача является частным случаем линейной задачи о дополнительности.

Сведение к линейной задаче о дополнительности

- Вводя переменные избытка $v = Ax - b$, перепишем условия оптимальности в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Данная задача является частным случаем линейной задачи о дополнительности.

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть квадратная матрица размера n, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Определение

Допустимый базис для ЛЗД, в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть квадратная матрица размера n, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Определение

Допустимый базис для ЛЗД, в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым*.

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть квадратная матрица размера n, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w - Mz = q,$$

$$w^T z = 0,$$

$$w, z \geq 0.$$

Определение

Допустимый базис для ЛЗД, в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть квадратная матрица размера n, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
w - Mz &= q, \\
w^T z &= 0, \\
w, z &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Определение

Допустимый базис для ЛЗД, в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым*.

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть квадратная матрица размера n, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Определение

Допустимый базис для ЛЗД, в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым*.

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть квадратная матрица размера n, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Определение

Допустимый базис для ЛЗД, в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть квадратная матрица размера n, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Определение

Допустимый базис для ЛЗД, в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*

Линейная задача о дополнительности

- Пусть M есть квадратная матрица размера n, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (ЛЗД) нужно найти векторы $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Определение

Допустимый базис для ЛЗД, в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*

Алгоритм Лемке

- Алгоритм начинает работу с *почти дополняюще-допустимого базиса* (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением 1-й, на которой строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
  - (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
  - выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке

- Алгоритм начинает работу с *почти дополняюще-допустимого базиса* (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением 1-й, на которой строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
  - (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
  - выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке

- Алгоритм начинает работу с *почти дополняюще-допустимого базиса* (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением 1-й, на которой строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
  - (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
  - выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке

- Алгоритм начинает работу с *почти дополняюще-допустимого базиса* (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением 1-й, на которой строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
    - (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
    - выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке

- Алгоритм начинает работу с *почти дополняюще-допустимого базиса* (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением 1-й, на которой строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
    - (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
    - выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке: начальная таблица

При решении задачи квадратичного программирования алгоритмом Лемке начальная симплекс-таблица имеет следующий вид:

Базис	q	u	v	x	y	Отношения
u	c	I_n	$\mathbf{0}$	$-D$	A^T	
v	$-b$	$\mathbf{0}$	I_m	$-A$	$\mathbf{0}$	

.

План лекции

1. Задача квадратичного программирования
   - Алгоритм Лемке
   - Числовой пример
2. Приложения квадратичного программирования
   - Модель Марковица оптимизации портфеля
   - Регрессия с ограничениями на коэффициенты

Постановка задачи

- Решим задачу квадратичного программирования:

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 3x_2 - \tfrac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 &\to \max,\\
x_1 + x_2 &\le 4,\\
x_1 &\le 2,\\
x_1, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

- Сначала перепишем эту задачу следующим образом:

$$
\begin{aligned}
-6x_1 - 3x_2 + \tfrac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) &\to \min,\\
-x_1 - x_2 &\ge -4,\\
-x_1 &\ge -2,\\
x_1, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

- Здесь $c = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Постановка задачи

- Решим задачу квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 - \tfrac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 &\to \max, \\ x_1 + x_2 &\le 4, \\ x_1 &\le 2, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

- Сначала перепишем эту задачу следующим образом:

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 + \tfrac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) &\to \min, \\ -x_1 - x_2 &\ge -4, \\ -x_1 &\ge -2, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

- Здесь $c = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Постановка задачи

- Решим задачу квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 - \tfrac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 &\to \max, \\ x_1 + x_2 &\le 4, \\ x_1 &\le 2, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

- Сначала перепишем эту задачу следующим образом:

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 + \tfrac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) &\to \min, \\ -x_1 - x_2 &\ge -4, \\ -x_1 &\ge -2, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

- Здесь $c = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Почти дополняюще-допустимый базис

Заполним начальную симплекс-таблицу:

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
u_1	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

Почти дополняюще-допустимый базис

Заполним начальную симплекс-таблицу:

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
u_1	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

Почти дополняюще-допустимый базис

Заполним начальную симплекс-таблицу:

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
u_1	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- Чтобы построить начальный почти дополняюще-допустимый базис, нужно ввести дополнительный столбец, соответствующий новой переменной s, которую будем вводить в базис.
- Выбираем строку $u_1 = 1$ с минимальным элементом -6 в столбце q и объявляем строку u_1 ведущей.

Почти дополняюще-допустимый базис

Заполним начальную симплекс-таблицу:

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
u_1	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- Чтобы построить начальный почти дополняюще-допустимый базис, нужно ввести дополнительный столбец, соответствующий новой переменной s, которую будем вводить в базис.
- Выбираем строку $u_1 = 1$ с минимальным элементом -6 в столбце q и объявляем строку u_1 ведущей.

Почти дополняюще-допустимый базис

Заполним начальную симплекс-таблицу:

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
u_1	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- Чтобы построить начальный почти дополняюще-допустимый базис, нужно ввести дополнительный столбец, соответствующий новой переменной s, которую будем вводить в базис.
- Выбираем строку $u_1 = 1$ с минимальным элементом -6 в столбце q и объявляем строку u_1 ведущей.

Почти дополняюще-допустимый базис

Заполним начальную симплекс-таблицу:

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
u_1	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- Чтобы построить начальный почти дополняюще-допустимый базис, нужно ввести дополнительный столбец, соответствующий новой переменной s, которую будем вводить в базис.
- Выбираем строку $u_1 = 1$ с минимальным элементом -6 в столбце q и объявляем строку u_1 ведущей.

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
u_1	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- В базисе u_1 заменяем на s.
- Делим строку s на -1
- и складываем результат со строками u_2, v_1 и v_2.

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- В базисе u_1 заменяем на s.
- Делим строку s на -1
- и складываем результат со строками u_2, v_1 и v_2.

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- В базисе u_1 заменяем на s.
- Делим строку s на -1
- и складываем результат со строками u_2, v_1 и v_2.

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- В базисе u_1 заменяем на s.
- Делим строку s на -1
- и складываем результат со строками u_2, v_1 и v_2.

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- В базисе u_1 заменяем на s.
- Делим строку s на -1
- и складываем результат со строками u_2, v_1 и v_2.

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- В базисе u_1 заменяем на s.
- Делим строку s на -1
- и складываем результат со строками u_2, v_1 и v_2.

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- В базисе u_1 заменяем на s.
- Делим строку s на -1
- и складываем результат со строками u_2, v_1 и v_2.

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0

- В базисе u_1 заменяем на s.
- Делим строку s на -1
- и складываем результат со строками u_2, v_1 и v_2.

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0

- Так как в столбце q нет отрицательных элементов,
  - то теперь мы имеем допустимый базис,
  - в котором не представлена дополняющая пара (u_1, x_1).
  - Такой базис называется *почти дополняюще-допустимым.*

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0

- Так как в столбце q нет отрицательных элементов,
  - то теперь мы имеем допустимый базис,
  - в котором не представлена дополняющая пара (u_1, x_1).
  - Такой базис называется *почти дополняюще-допустимым.*

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0

- Так как в столбце q нет отрицательных элементов,
  - то теперь мы имеем допустимый базис,
  - в котором не представлена дополняющая пара (u_1, x_1).
  - Такой базис называется *почти дополняюще-допустимым.*

Почти дополняюще-допустимый базис

Выполняем операцию замещения.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0

- Так как в столбце q нет отрицательных элементов,
    - то теперь мы имеем допустимый базис,
    - в котором не представлена дополняющая пара (u_1, x_1).
    - Такой базис называется *почти дополняюще-допустимым.*

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	$\frac{6}{1} = 6$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	$\frac{10}{2} = 5$
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	$\frac{8}{2} = 4$

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	$\frac{6}{1} = 6$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	$\frac{10}{2} = 5$
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	$\frac{8}{2} = 4$

- В базис вводим переменную x_1 (дополнение переменной u_1, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_1.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 4 в строке 4, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	$\frac{6}{1} = 6$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	$\frac{10}{2} = 5$
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	$\frac{8}{2} = 4$

- В базис вводим переменную x_1 (дополнение переменной u_1, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_1.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 4 в строке 4, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	$\frac{6}{1} = 6$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	$\frac{10}{2} = 5$
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	$\frac{8}{2} = 4$

- В базис вводим переменную x_1 (дополнение переменной u_1, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_1.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 4 в строке 4, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	$\frac{6}{1} = 6$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	$\frac{10}{2} = 5$
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	$\frac{8}{2} = 4$

- В базис вводим переменную x_1 (дополнение переменной u_1, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_1.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 4 в строке 4, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	$\frac{6}{1} = 6$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	$\frac{10}{2} = 5$
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	$\frac{8}{2} = 4$

- В базис вводим переменную x_1 (дополнение переменной u_1, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_1.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 4 в строке 4, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	$\frac{6}{1} = 6$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	$\frac{10}{2} = 5$
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	$\frac{8}{2} = 4$

- В базис вводим переменную x_1 (дополнение переменной u_1, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_1.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 4 в строке 4, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	$\frac{6}{1} = 6$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	$\frac{10}{2} = 5$
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	$\frac{8}{2} = 4$

- В базис вводим переменную x_1 (дополнение переменной u_1, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_1.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 4 в строке 4, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	
x_1	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	

- Переменная x_1 заменяет в базисе переменную v_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 4 и столбцом x_1:
    - делим ведущую строку на 2,
    - отнимем ведущую строку от строки 1,
    - умножим ведущую строку на 2 и отнимем от строки 3,
- Итерация 1 завершена.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	
x_1	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	

- Переменная x_1 заменяет в базисе переменную v_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 4 и столбцом x_1:
  - делим ведущую строку на 2,
  - отнимем ведущую строку от строки 1,
  - умножим ведущую строку на 2 и отнимем от строки 3,
- Итерация 1 завершена.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	
x_1	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	

- Переменная x_1 заменяет в базисе переменную v_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 4 и столбцом x_1:
  - делим ведущую строку на 2,
  - отнимем ведущую строку от строки 1,
  - умножим ведущую строку на 2 и отнимем от строки 3,
- Итерация 1 завершена.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная x_1 заменяет в базисе переменную v_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 4 и столбцом x_1:
    - делим ведущую строку на 2,
    - отнимем ведущую строку от строки 1,
    - умножим ведущую строку на 2 и отнимем от строки 3,
- Итерация 1 завершена.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная x_1 заменяет в базисе переменную v_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 4 и столбцом x_1:
  - делим ведущую строку на 2,
  - отнимем ведущую строку от строки 1,
  - умножим ведущую строку на 2 и отнимем от строки 3,
- Итерация 1 завершена.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная x_1 заменяет в базисе переменную v_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 4 и столбцом x_1:
  - делим ведущую строку на 2,
  - отнимем ведущую строку от строки 1,
  - умножим ведущую строку на 2 и отнимем от строки 3,
- Итерация 1 завершена.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная x_1 заменяет в базисе переменную v_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 4 и столбцом x_1:
  - делим ведущую строку на 2,
  - отнимем ведущую строку от строки 1,
  - умножим ведущую строку на 2 и отнимем от строки 3,
- Итерация 1 завершена.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная x_1 заменяет в базисе переменную v_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 4 и столбцом x_1:
  - делим ведущую строку на 2,
  - отнимем ведущую строку от строки 1,
  - умножим ведущую строку на 2 и отнимем от строки 3,
- Итерация 1 завершена.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная x_1 заменяет в базисе переменную v_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 4 и столбцом x_1:
  - делим ведущую строку на 2,
  - отнимем ведущую строку от строки 1,
  - умножим ведущую строку на 2 и отнимем от строки 3,
- Итерация 1 завершена.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1/2} = 4$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{1} = 3$
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	∞
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{7}{1/2} = 8$

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1/2}=4$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{1}=3$
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	∞
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{7}{1/2}=8$

- На предыдущей итерации из базиса вышла переменная v_2, поэтому ее дополнение y_2 вводим в базис.
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и y_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 3 в строке 2, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1/2} = 4$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{1} = 3$
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	∞
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{7}{1/2} = 8$

- На предыдущей итерации из базиса вышла переменная v_2, поэтому ее дополнение y_2 вводим в базис.
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и y_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 3 в строке 2, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1/2} = 4$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{1} = 3$
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	∞
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{7}{1/2} = 8$

- На предыдущей итерации из базиса вышла переменная v_2, поэтому ее дополнение y_2 вводим в базис.
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и y_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 3 в строке 2, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1/2} = 4$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{1} = 3$
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	∞
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{7}{1/2} = 8$

- На предыдущей итерации из базиса вышла переменная v_2, поэтому ее дополнение y_2 вводим в базис.
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и y_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 3 в строке 2, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1/2} = 4$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{1} = 3$
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	∞
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{7}{1/2} = 8$

- На предыдущей итерации из базиса вышла переменная v_2, поэтому ее дополнение y_2 вводим в базис.
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и y_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 3 в строке 2, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1/2}=4$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{1}=3$
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	∞
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{7}{1/2}=8$

- На предыдущей итерации из базиса вышла переменная v_2, поэтому ее дополнение y_2 вводим в базис.
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и y_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 3 в строке 2, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1/2}=4$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{1}=3$
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	∞
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{1/2}=8$

- На предыдущей итерации из базиса вышла переменная v_2, поэтому ее дополнение y_2 вводим в базис.
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и y_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 3 в строке 2, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная y_2 заменяет в базисе переменную u_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 2 и столбцом y_2:
  - ведущую строку, разделенную на 2, отнимем от строки 1 и от строки 4.
- Итерация 2 завершена.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная y_2 заменяет в базисе переменную u_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 2 и столбцом y_2:
  - ведущую строку, разделенную на 2, отнимем от строки 1 и от строки 4.
- Итерация 2 завершена.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная y_2 заменяет в базисе переменную u_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 2 и столбцом y_2:
  - ведущую строку, разделенную на 2, отнимем от строки 1 и от строки 4.
- Итерация 2 завершена.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная y_2 заменяет в базисе переменную u_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 2 и столбцом y_2:
  - ведущую строку, разделенную на 2, отнимем от строки 1 и от строки 4.
- Итерация 2 завершена.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

- Переменная y_2 заменяет в базисе переменную u_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 2 и столбцом y_2:
  - ведущую строку, разделенную на 2, отнимем от строки 1 и от строки 4.
- Итерация 2 завершена.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	

- Переменная y_2 заменяет в базисе переменную u_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 2 и столбцом y_2:
  - ведущую строку, разделенную на 2, отнимем от строки 1 и от строки 4.
- Итерация 2 завершена.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	

- Переменная y_2 заменяет в базисе переменную u_2.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 2 и столбцом y_2:
  - ведущую строку, разделенную на 2, отнимем от строки 1 и от строки 4.
- Итерация 2 завершена.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	$\frac{2}{1} = 2$
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	$\frac{2}{1} = 2$
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$

- В базис вводим переменную x_2 (дополнение переменной u_2, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 1/2 в строке 1, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	$\frac{2}{1} = 2$
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$

- В базис вводим переменную x_2 (дополнение переменной u_2, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 1/2 в строке 1, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	$\frac{2}{1} = 2$
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$

- В базис вводим переменную x_2 (дополнение переменной u_2, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент $1/2$ в строке 1, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	$\frac{2}{1} = 2$
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$

- В базис вводим переменную x_2 (дополнение переменной u_2, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 1/2 в строке 1, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	$\frac{2}{1} = 2$
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$

- В базис вводим переменную x_2 (дополнение переменной u_2, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 1/2 в строке 1, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	$\frac{2}{1} = 2$
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$

- В базис вводим переменную x_2 (дополнение переменной u_2, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 1/2 в строке 1, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	$\frac{2}{1} = 2$
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$

- В базис вводим переменную x_2 (дополнение переменной u_2, покинувшей базис на предыдущей итерации).
- Вычисляем отношения элементов столбцов q и x_2.
- Среди этих отношений выбираем минимальный элемент $1/2$ в строке 1, которую объявляем ведущей строкой.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	

- Переменная x_2 заменяет в базисе переменную s.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 1 и столбцом x_2:
  - ведущую строку складываем со строкой 2,
  - отнимаем от строки 3 и строки 4.
- Итерация 3 завершена.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	

- Переменная x_2 заменяет в базисе переменную s.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 1 и столбцом x_2:
    - ведущую строку складываем со строкой 2,
    - отнимаем от строки 3 и строки 4.
- Итерация 3 завершена.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	

- Переменная x_2 заменяет в базисе переменную s.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 1 и столбцом x_2:
  - ведущую строку складываем со строкой 2,
  - отнимаем от строки 3 и строки 4.
- Итерация 3 завершена.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	

- Переменная x_2 заменяет в базисе переменную s.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 1 и столбцом x_2:
  - ведущую строку складываем со строкой 2,
  - отнимаем от строки 3 и строки 4.
- Итерация 3 завершена.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	

- Переменная x_2 заменяет в базисе переменную s.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 1 и столбцом x_2:
  - ведущую строку складываем со строкой 2,
  - отнимаем от строки 3 и строки 4.
- Итерация 3 завершена.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	
v_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	

- Переменная x_2 заменяет в базисе переменную s.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 1 и столбцом x_2:
  - ведущую строку складываем со строкой 2,
  - отнимаем от строки 3 и строки 4.
- Итерация 3 завершена.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	
v_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	

- Переменная x_2 заменяет в базисе переменную s.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 1 и столбцом x_2:
  - ведущую строку складываем со строкой 2,
  - отнимаем от строки 3 и строки 4.
- Итерация 3 завершена.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	
v_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	
x_1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	

- Переменная x_2 заменяет в базисе переменную s.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 1 и столбцом x_2:
    - ведущую строку складываем со строкой 2,
    - отнимаем от строки 3 и строки 4.
- Итерация 3 завершена.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отн-ния
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	
y_2	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	
v_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	
x_1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	

- Переменная x_2 заменяет в базисе переменную s.
- Выполняем операцию замещения с ведущими строкой 1 и столбцом x_2:
    - ведущую строку складываем со строкой 2,
    - отнимаем от строки 3 и строки 4.
- Итерация 3 завершена.

Оптимальная симплекс-таблица

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1
y_2	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1
v_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1
x_1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- Как только базис покинула переменная s,
- мы получили дополняюще-допустимый базис с ненулевыми базисными компонентами $v_1 = 3/2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$ и $y_2 = 7/2$.
- Поэтому $x = (2, 1/2)^T$ — оптимальное решение нашего примера.

Оптимальная симплекс-таблица

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1
y_2	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1
v_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1
x_1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- Как только базис покинула переменная s,
- мы получили дополняюще-допустимый базис с ненулевыми базисными компонентами $v_1 = 3/2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$ и $y_2 = 7/2$.
- Поэтому $x = (2, 1/2)^T$ — оптимальное решение нашего примера.

Оптимальная симплекс-таблица

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1
y_2	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1
v_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1
x_1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

- Как только базис покинула переменная s,
- мы получили дополняюще-допустимый базис с ненулевыми базисными компонентами $v_1 = 3/2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$ и $y_2 = 7/2$.
- Поэтому $x = (2, 1/2)^T$ — оптимальное решение нашего примера.

План лекции

1. Задача квадратичного программирования
   - Алгоритм Лемке
   - Числовой пример

2. Приложения квадратичного программирования
   - Модель Марковица оптимизации портфеля
   - Регрессия с ограничениями на коэффициенты

Оптимизация портфеля

Х. Марковиц (H. Markowitz) получил Нобелевскую премию 1990 года в области экономики за его *модель оптимизации портфеля* в которой

- *возврат портфеля* — это случайная величина,
- а *риск* определяется как дисперсия (вариация) этой случайной величины.

Оптимизация портфеля

Х. Марковиц (H. Markowitz) получил Нобелевскую премию 1990 года в области экономики за его *модель оптимизации портфеля* в которой

- *возврат портфеля* — это случайная величина,
- а *риск* определяется как дисперсия (вариация) этой случайной величины.

Оптимизация портфеля

Х. Марковиц (H. Markowitz) получил Нобелевскую премию 1990 года в области экономики за его *модель оптимизации портфеля* в которой

- *возврат портфеля* — это случайная величина,
- а *риск* определяется как дисперсия (вариация) этой случайной величины.

Оптимизация портфеля: постановка задачи

- Мы хотим инвестировать сумму B в некоторые из n активов (акций, облигаций и т. д.).
- Пусть p_i есть *относительное изменение цены* актива i в течении планового периода, т. е. p_i есть изменение цены актива за плановый период, деленное на его цену в начале периода (*возврат* на один вложенный рубль).
- *Портфелем* называют вектор $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, где x_i есть сумма, инвестированная в актив i ($i = 1, \dots, n$), $\sum_{i=1}^{n} x_i = B$,
- Если $x_i \geq 0$, то мы имеем нормальную длинную позицию в актив i;
- если $x_i < 0$, то мы имеем короткую позицию (т. е. обязательство в течении планового периода купить активы i на сумму $-x_i$) в актив i.

Оптимизация портфеля: постановка задачи

- Мы хотим инвестировать сумму B в некоторые из n активов (акций, облигаций и т. д.).
- Пусть p_i есть *относительное изменение цены* актива i в течении планового периода, т. е. p_i есть изменение цены актива за плановый период, деленное на его цену в начале периода (*возврат* на один вложенный рубль).
- *Портфелем* называют вектор $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, где x_i есть сумма, инвестированная в актив i ($i = 1, \dots, n$), $\sum_{i=1}^{n} x_i = B$,
- Если $x_i \geq 0$, то мы имеем нормальную длинную позицию в актив i;
- если $x_i < 0$, то мы имеем короткую позицию (т. е. обязательство в течении планового периода купить активы i на сумму $-x_i$) в актив i.

Оптимизация портфеля: постановка задачи

- Мы хотим инвестировать сумму B в некоторые из n активов (акций, облигаций и т. д.).
- Пусть p_i есть *относительное изменение цены* актива i в течении планового периода, т. е. p_i есть изменение цены актива за плановый период, деленное на его цену в начале периода (*возврат* на один вложенный рубль).
- *Портфелем* называют вектор $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, где x_i есть сумма, инвестированная в актив i ($i = 1, \dots, n$), $\sum_{i=1}^n x_i = B$,
- Если $x_i \geq 0$, то мы имеем нормальную длинную позицию в актив i;
- если $x_i < 0$, то мы имеем короткую позицию (т. е. обязательство в течении планового периода купить активы i на сумму $-x_i$) в актив i.

Оптимизация портфеля: постановка задачи

- Мы хотим инвестировать сумму B в некоторые из n активов (акций, облигаций и т. д.).
- Пусть p_i есть *относительное изменение цены* актива i в течении планового периода, т. е. p_i есть изменение цены актива за плановый период, деленное на его цену в начале периода (*возврат* на один вложенный рубль).
- *Портфелем* называют вектор $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, где x_i есть сумма, инвестированная в актив i ($i = 1, \dots, n$), $\sum_{i=1}^n x_i = B$,
- Если $x_i \geq 0$, то мы имеем нормальную длинную позицию в актив i;
- если $x_i < 0$, то мы имеем короткую позицию (т. е. обязательство в течении планового периода купить активы i на сумму $-x_i$) в актив i.

Оптимизация портфеля: постановка задачи

- Мы хотим инвестировать сумму B в некоторые из n активов (акций, облигаций и т. д.).
- Пусть p_i есть *относительное изменение цены* актива i в течении планового периода, т. е. p_i есть изменение цены актива за плановый период, деленное на его цену в начале периода (*возврат* на один вложенный рубль).
- *Портфелем* называют вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, где x_i есть сумма, инвестированная в актив i ($i = 1, \ldots, n$), $\sum_{i=1}^{n} x_i = B$,
- Если $x_i \geq 0$, то мы имеем нормальную длинную позицию в актив i;
- если $x_i < 0$, то мы имеем короткую позицию (т. е. обязательство в течении планового периода купить активы i на сумму $-x_i$) в актив i.

Предположения о возвратах активов

- Портфель формируется, чтобы оставаться неизменным в течение заданного планового периода.
- Считаем, что $p_1, \ldots, p_n$ есть зависимые нормальные случайные величины,
- а $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ есть случайный вектор цен с известными матожиданием $\bar{p}$ и коварicционной матрицей Σ.
- Поэтому возврат портфеля x в течение планового периода есть случайная величина $p^T x$ со средним значением (матожиданием) $\bar{p}^T x$ и вариацией (дисперсией) $x^T \Sigma x$.

Предположения о возвратах активов

- Портфель формируется, чтобы оставаться неизменным в течение заданного планового периода.
- Считаем, что $p_1, \ldots, p_n$ есть зависимые нормальные случайные величины,
- а $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ есть случайный вектор цен с известными матожиданием $\bar{p}$ и коварицонной матрицей Σ.
- Поэтому возврат портфеля x в течение планового периода есть случайная величина $p^T x$ со средним значением (матожиданием) $\bar{p}^T x$ и вариацией (дисперсией) $x^T \Sigma x$.

Предположения о возвратах активов

- Портфель формируется, чтобы оставаться неизменным в течение заданного планового периода.
- Считаем, что $p_1, \dots, p_n$ есть зависимые нормальные случайные величины,
- а $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ есть случайный вектор цен с известными матожиданием $\bar{p}$ и коварционной матрицей Σ.
- Поэтому возврат портфеля x в течение планового периода есть случайная величина $p^T x$ со средним значением (матожиданием) $\bar{p}^T x$ и вариацией (дисперсией) $x^T \Sigma x$.

Предположения о возвратах активов

- Портфель формируется, чтобы оставаться неизменным в течение заданного планового периода.
- Считаем, что $p_1, \ldots, p_n$ есть зависимые нормальные случайные величины,
- а $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ есть случайный вектор цен с известными матожиданием $\bar{p}$ и коварицонной матрицей Σ.
- Поэтому возврат портфеля x в течение планового периода есть случайная величина $p^T x$ со средним значением (матожиданием) $\bar{p}^T x$ и вариацией (дисперсией) $x^T \Sigma x$.

Модель Марковица

Х. Марковиц сформулировал задачу оптимизации портфеля как следующую задачу квадратичного программирования:

$$
\begin{aligned}
& x^T \Sigma x \to \min, \\
& \bar{p}^T x \geq r_{\min}, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i \leq B, \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

- В этой задаче мы минимизируем риск портфеля,
- который определяется равным вариации портфеля,
- при гарантированном среднем возврате $r_{\min}$
- и выполнении бюджетного ограничения.
- В базовой модели короткие позиции не допускаются.

Модель Марковица

Х. Марковиц сформулировал задачу оптимизации портфеля как следующую задачу квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} & x^T \Sigma x \to \min, \\ & \bar{p}^T x \geq r_{\min}, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i \leq B, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

- В этой задаче мы минимизируем риск портфеля,
- который определяется равным вариации портфеля,
- при гарантированном среднем возврате $r_{\min}$
- и выполнении бюджетного ограничения.
- В базовой модели короткие позиции не допускаются.

Модель Марковица

Х. Марковиц сформулировал задачу оптимизации портфеля как следующую задачу квадратичного программирования:

$$x^T \Sigma x \to \min,$$

$$\bar{p}^T x \geq r_{\min},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq B,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- В этой задаче мы минимизируем риск портфеля,
- который определяется равным вариации портфеля,
- при гарантированном среднем возврате $r_{\min}$
- и выполнении бюджетного ограничения.
- В базовой модели короткие позиции не допускаются.

Модель Марковица

Х. Марковиц сформулировал задачу оптимизации портфеля как следующую задачу квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} & x^T \Sigma x \to \min, \\ & \bar{p}^T x \geq r_{\min}, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i \leq B, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

- В этой задаче мы минимизируем риск портфеля,
- который определяется равным вариации портфеля,
- при гарантированном среднем возврате $r_{\min}$
- и выполнении бюджетного ограничения.
- В базовой модели короткие позиции не допускаются.

Модель Марковица

Х. Марковиц сформулировал задачу оптимизации портфеля как следующую задачу квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} & x^T \Sigma x \to \min, \\ & \bar{p}^T x \geq r_{\min}, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i \leq B, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

- В этой задаче мы минимизируем риск портфеля,
- который определяется равным вариации портфеля,
- при гарантированном среднем возврате $r_{\min}$
- и выполнении бюджетного ограничения.
- В базовой модели короткие позиции не допускаются.

Модель Марковица

Х. Марковиц сформулировал задачу оптимизации портфеля как следующую задачу квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} & x^T \Sigma x \to \min, \\ & \bar{p}^T x \geq r_{\min}, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i \leq B, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

- В этой задаче мы минимизируем риск портфеля,
- который определяется равным вариации портфеля,
- при гарантированном среднем возврате $r_{\min}$
- и выполнении бюджетного ограничения.
- В базовой модели короткие позиции не допускаются.

Модель Марковица

Х. Марковиц сформулировал задачу оптимизации портфеля как следующую задачу квадратичного программирования:

$$x^T \Sigma x \to \min,$$

$$\bar{p}^T x \geq r_{\min},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq B,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- В этой задаче мы минимизируем риск портфеля,
- который определяется равным вариации портфеля,
- при гарантированном среднем возврате $r_{\min}$
- и выполнении бюджетного ограничения.
- В базовой модели короткие позиции не допускаются.

Короткие позиции

$$
\begin{aligned}
& x^T \Sigma x \to \min, \\
& \bar{p}^T x \geq r_{\min}, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i \leq B, \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

- Чтобы разрешить короткие позиции, неравенства $x_i \geq 0$ нужно заменить системой неравенств, где
  - x_i^l есть стоимость длинных позиций в актив i,
  - а x_i^s есть стоимость коротких позиций в актив i.
- Последнее неравенство ограничивает общий объем рискованных коротких позиций долей η (например, $\eta = 0.25$) от общего объема длинных позиций.

Короткие позиции

$$x^T\Sigma x \to \min,$$

$$\bar{p}^T x \geq r_{\min},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq B,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Чтобы разрешить короткие позиции, неравенства $x_i \geq 0$ нужно заменить системой неравенств, где
  - x_i^l есть стоимость длинных позиций в актив i,
  - а x_i^s есть стоимость коротких позиций в актив i.
- Последнее неравенство ограничивает общий объем рискованных коротких позиций долей η (например, $\eta = 0.25$) от общего объема длинных позиций.

Короткие позиции

$$
\begin{aligned}
& x^T \Sigma x \to \min, \\
& \bar{p}^T x \ge r_{\min}, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i \le B, \\
& x_i^l \ge 0,\ x_i^s \ge 0,\ x_i = x_i^l - x_i^s, \quad i = 1, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i^s \le \eta \sum_{i=1}^{n} x_i^l.
\end{aligned}
$$

- Чтобы разрешить короткие позиции, неравенства $x_i \ge 0$ нужно заменить системой неравенств, где
  - x_i^l есть стоимость длинных позиций в актив i,
  - а x_i^s есть стоимость коротких позиций в актив i.
- Последнее неравенство ограничивает общий объем рискованных коротких позиций долей η (например, $\eta = 0.25$) от общего объема длинных позиций.

Короткие позиции

$$\begin{aligned}
&x^T \Sigma x \to \min,\\
&\bar{p}^T x \geq r_{\min},\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i \leq B,\\
&x_i^l \geq 0,\ x_i^s \geq 0,\ x_i = x_i^l - x_i^s, \quad i = 1, \dots, n,\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i^s \leq \eta \sum_{i=1}^{n} x_i^l.
\end{aligned}$$

- Чтобы разрешить короткие позиции, неравенства $x_i \geq 0$ нужно заменить системой неравенств, где
  - x_i^l есть стоимость длинных позиций в актив i,
  - а x_i^s есть стоимость коротких позиций в актив i.
- Последнее неравенство ограничивает общий объем рискованных коротких позиций долей η (например, $\eta = 0.25$) от общего объема длинных позиций.

Короткие позиции

$$
\begin{aligned}
& x^T \Sigma x \to \min, \\
& \bar{p}^T x \geq r_{\min}, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i \leq B, \\
& x_i^l \geq 0,\ x_i^s \geq 0,\ x_i = x_i^l - x_i^s, \quad i = 1, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i^s \leq \eta \sum_{i=1}^{n} x_i^l.
\end{aligned}
$$

- Чтобы разрешить короткие позиции, неравенства $x_i \geq 0$ нужно заменить системой неравенств, где
  - x_i^l есть стоимость длинных позиций в актив i,
  - а x_i^s есть стоимость коротких позиций в актив i.
- Последнее неравенство ограничивает общий объем рискованных коротких позиций долей η (например, $\eta = 0.25$) от общего объема длинных позиций.

Короткие позиции

$$
\begin{aligned}
& x^T \Sigma x \to \min, \\
& \bar{p}^T x \geq r_{\min}, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i \leq B, \\
& x_i^l \geq 0,\ x_i^s \geq 0,\ x_i = x_i^l - x_i^s, \quad i = 1, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i^s \leq \eta \sum_{i=1}^{n} x_i^l.
\end{aligned}
$$

- Чтобы разрешить короткие позиции, неравенства $x_i \geq 0$ нужно заменить системой неравенств, где
  - x_i^l есть стоимость длинных позиций в актив i,
  - а x_i^s есть стоимость коротких позиций в актив i.
- Последнее неравенство ограничивает общий объем рискованных коротких позиций долей η (например, $\eta = 0.25$) от общего объема длинных позиций.

Линейные стоимости транзакций

- Начиная с заданного начального портфеля x^0, мы покупаем и продаем активы, чтобы сформировать оптимальный портфель x.
- Мы знаем стоимости покупки f_i^b и продажи f_i^s доли актива i стоимостью 1 ($i = 1, \dots, n$).
- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \ge 0,\ y_i^s \ge 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Линейные стоимости транзакций

- Начиная с заданного начального портфеля x^0, мы покупаем и продаем активы, чтобы сформировать оптимальный портфель x.
- Мы знаем стоимости покупки f_i^b и продажи f_i^s доли актива i стоимостью 1 $(i = 1, \dots, n)$.
- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \geq 0,\ y_i^s \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Линейные стоимости транзакций

- Начиная с заданного начального портфеля x^0, мы покупаем и продаем активы, чтобы сформировать оптимальный портфель x.
- Мы знаем стоимости покупки f_i^b и продажи f_i^s доли актива i стоимостью 1 $(i = 1, \dots, n)$.
- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \geq 0,\ y_i^s \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Линейные стоимости транзакций

- Начиная с заданного начального портфеля x^0, мы покупаем и продаем активы, чтобы сформировать оптимальный портфель x.
- Мы знаем стоимости покупки f_i^b и продажи f_i^s доли актива i стоимостью 1 $(i = 1, \ldots, n)$.
- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \geq 0,\ y_i^s \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Линейные стоимости транзакций

- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \geq 0,\ y_i^s \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Бюджетное огр. $\sum_{i=1}^n x_i \leq B$ заменяем равенством

$$\sum_{i=1}^n (1 + f_i^b) y_i^b = B + \sum_{i=1}^n (1 - f_i^s) y_i^s,$$

- которое означает, что
  - кол-во денег, потраченное на покупку новых активов,
  - должна быть равно
  - кол-ву денег, выделенных на изменение портфеля,
  - плюс кол-во денег, полученных от продажи активов.

Линейные стоимости транзакций

- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \geq 0,\ y_i^s \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Бюджетное огр. $\sum_{i=1}^n x_i \leq B$ заменяем равенством

$$\sum_{i=1}^n (1 + f_i^b) y_i^b = B + \sum_{i=1}^n (1 - f_i^s) y_i^s,$$

- которое означает, что
  - кол-во денег, потраченное на покупку новых активов,
  - должна быть равно
  - кол-ву денег, выделенных на изменение портфеля,
  - плюс кол-во денег, полученных от продажи активов.

Линейные стоимости транзакций

- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \geq 0,\ y_i^s \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Бюджетное огр. $\sum_{i=1}^n x_i \leq B$ заменяем равенством

$$\sum_{i=1}^n (1 + f_i^b) y_i^b = B + \sum_{i=1}^n (1 - f_i^s) y_i^s,$$

- которое означает, что
  - кол-во денег, потраченное на покупку новых активов,
  - должна быть равно
  - кол-ву денег, выделенных на изменение портфеля,
  - плюс кол-во денег, полученных от продажи активов.

Линейные стоимости транзакций

- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \geq 0,\ y_i^s \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Бюджетное огр. $\sum_{i=1}^n x_i \leq B$ заменяем равенством

$$\sum_{i=1}^n (1 + f_i^b) y_i^b = B + \sum_{i=1}^n (1 - f_i^s) y_i^s,$$

- которое означает, что
    - кол-во денег, потраченное на покупку новых активов,
    - должна быть равно
    - кол-ву денег, выделенных на изменение портфеля,
    - плюс кол-во денег, полученных от продажи активов.

Линейные стоимости транзакций

- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \geq 0,\ y_i^s \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Бюджетное огр. $\sum_{i=1}^n x_i \leq B$ заменяем равенством

$$\sum_{i=1}^{n} (1 + f_i^b) y_i^b = B + \sum_{i=1}^{n} (1 - f_i^s) y_i^s,$$

- которое означает, что
  - кол-во денег, потраченное на покупку новых активов,
  - должна быть равно
  - кол-ву денег, выделенных на изменение портфеля,
  - плюс кол-во денег, полученных от продажи активов.

Линейные стоимости транзакций

- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \geq 0,\ y_i^s \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Бюджетное огр. $\sum_{i=1}^n x_i \leq B$ заменяем равенством

$$\sum_{i=1}^n (1 + f_i^b) y_i^b = B + \sum_{i=1}^n (1 - f_i^s) y_i^s,$$

- которое означает, что
  - кол-во денег, потраченное на покупку новых активов,
  - должна быть равно
  - кол-ву денег, выделенных на изменение портфеля,
  - плюс кол-во денег, полученных от продажи активов.

Линейные стоимости транзакций

- Вводя для каждого актива i две новые переменные y_i^b и y_i^s, которые определяют объемы покупки и продажи этого актива при формировании портфеля x,
- мы добавляем к модели следующие ограничения:

$$x_i = x_i^0 + y_i^b - y_i^s,\ y_i^b \geq 0,\ y_i^s \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Бюджетное огр. $\sum_{i=1}^n x_i \leq B$ заменяем равенством

$$\sum_{i=1}^n (1 + f_i^b) y_i^b = B + \sum_{i=1}^n (1 - f_i^s) y_i^s,$$

- которое означает, что
  - кол-во денег, потраченное на покупку новых активов,
  - должна быть равно
  - кол-ву денег, выделенных на изменение портфеля,
  - плюс кол-во денег, полученных от продажи активов.

Портфель из 4-х активов без коротких позиций

Средние возвраты активов и стандартные отклонения представлены в следующей таблице

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Здесь актив 4 — это безрисковый актив с возвратом 3 %.
- Коэффициенты корреляции между рискованными активами следующие:

$$\rho_{12} = 0.03,\ \rho_{13} = -0.04 \text{ и } \rho_{23} = 0.$$

- Используя равенства $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $\Sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ и тот факт, что $\sigma_4 = 0$, вычислим ковариционную матрицу Σ.

Портфель из 4-х активов без коротких позиций

Средние возвраты активов и стандартные отклонения представлены в следующей таблице

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Здесь актив 4 — это безрисковый актив с возвратом 3 %.
- Коэффициенты корреляции между рискованными активами следующие:

$$\rho_{12} = 0.03,\ \ \rho_{13} = -0.04 \text{ и } \rho_{23} = 0.$$

- Используя равенства $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $\Sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ и тот факт, что $\sigma_4 = 0$, вычислим ковариционную матрицу Σ.

Портфель из 4-х активов без коротких позиций

Средние возвраты активов и стандартные отклонения представлены в следующей таблице

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Здесь актив 4 — это безрисковый актив с возвратом 3 %.
- Коэффициенты корреляции между рискованными активами следующие:
$$\rho_{12} = 0.03,\ \rho_{13} = -0.04 \text{ и } \rho_{23} = 0.$$
- Используя равенства $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $\Sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ и тот факт, что $\sigma_4 = 0$, вычислим ковариционную матрицу Σ.

Портфель из 4-х активов без коротких позиций

Средние возвраты активов и стандартные отклонения представлены в следующей таблице

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Здесь актив 4 — это безрисковый актив с возвратом 3 %.
- Коэффициенты корреляции между рискованными активами следующие:

$$\rho_{12} = 0.03, \ \rho_{13} = -0.04 \text{ и } \rho_{23} = 0.$$

- Используя равенства $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $\Sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ и тот факт, что $\sigma_4 = 0$, вычислим ковариционную матрицу Σ.

Портфель из 4-х активов без коротких позиций

Средние возвраты активов и стандартные отклонения представлены в следующей таблице

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Здесь актив 4 — это безрисковый актив с возвратом 3 %.
- Коэффициенты корреляции между рискованными активами следующие:

$$\rho_{12} = 0.03,\ \rho_{13} = -0.04 \text{ и } \rho_{23} = 0.$$

- Используя равенства $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $\Sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ и тот факт, что $\sigma_4 = 0$, вычислим коварционную матрицу Σ.

Портфель из 4-х активов без коротких позиций

Средние возвраты активов и стандартные отклонения представлены в следующей таблице

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Здесь актив 4 — это безрисковый актив с возвратом 3 %.
- Коэффициенты корреляции между рискованными активами следующие:

$$\rho_{12} = 0.03,\ \rho_{13} = -0.04 \text{ и } \rho_{23} = 0.$$

- Используя равенства $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $\Sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ и тот факт, что $\sigma_4 = 0$, вычислим коварионную матрицу Σ.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$
$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \dots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$\begin{aligned} & 0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min, \\ & 1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min}, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \dots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$
$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \ldots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$
$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \dots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$

$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \dots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$

$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i ($i = 1, \dots, n$).

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$\begin{aligned} & 0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min, \\ & 1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min}, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \ldots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$\begin{aligned} & 0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min, \\ & 1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min}, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i ($i = 1, \dots, n$).

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$

$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \ldots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$

$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i ($i = 1, \ldots, n$).

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$

$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0,\; x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \dots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$

$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \ldots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$\begin{aligned} &0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min, \\ &1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min}, \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i ($i = 1, \dots, n$).

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$
$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \dots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min,$$

$$1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \ldots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$\begin{aligned} & 0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min, \\ & 1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min}, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \ldots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$\begin{aligned} & 0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min, \\ & 1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min}, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \dots, n)$.

Портфель из 4-х активов: модель Марковица

По исходным данным

Актив	$\bar{p}_i$	σ_i
1	1.12	0.2
2	1.1	0.1
3	1.07	0.05
4	1.03	0

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0006 & -0.0004 & 0 \\ 0.0006 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0004 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

мы можем записать задачу КП:

$$\begin{aligned} & 0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min, \\ & 1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 + 1.03x_4 \geq r_{\min}, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что, полагая $B = 1$, мы вычислим долю x_i средств, вложенных в актив i $(i = 1, \ldots, n)$.

План лекции

1. Задача квадратичного программирования
   - Алгоритм Лемке
   - Числовой пример
2. Приложения квадратичного программирования
   - Модель Марковица оптимизации портфеля
   - Регрессия с ограничениями на коэффициенты

Регрессия с ограничениями на коэффициенты

- Чтобы приспособить свои учебные программы к потребностям практики, экономический факультет университета решил определить долю своих студентов, работающих в различных отраслях народного хозяйства.
- В результате опроса студентов прошлых выпусков получены следующие данные:
  - N_t — количество выпускников в году $t = 1, \dots, T$;
  - q_{it} — количество выпускников года t, работающих в отрасли i, $i = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, T$.
- Чтобы предсказать долю λ_i будущих выпускников, которые будут работать в отрасли $i = 1, \dots, m$, можно воспользоваться методом наименьших квадратов и решить следующую задачу КП:

Регрессия с ограничениями на коэффициенты

- В результате опроса студентов прошлых выпусков получены следующие данные:
    - N_t — количество выпускников в году $t = 1, \dots, T$;
    - q_{it} — количество выпускников года t, работающих в отрасли i, $i = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, T$.
- Чтобы предсказать долю λ_i будущих выпускников, которые будут работать в отрасли $i = 1, \dots, m$, можно воспользоваться методом наименьших квадратов и решить следующую задачу КП:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} (q_{it} - \lambda_i N_t)^2 \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Регрессия с ограничениями на коэффициенты

- В результате опроса студентов прошлых выпусков получены следующие данные:
  - N_t — количество выпускников в году $t = 1, \dots, T$;
  - q_{it} — количество выпускников года t, работающих в отрасли i, $i = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, T$.
- Чтобы предсказать долю λ_i будущих выпускников, которые будут работать в отрасли $i = 1, \dots, m$, можно воспользоваться методом наименьших квадратов и решить следующую задачу КП:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}(q_{it} - \lambda_i N_t)^2 \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Регрессия с ограничениями на коэффициенты

- В результате опроса студентов прошлых выпусков получены следующие данные:
  - N_t — количество выпускников в году $t = 1, \ldots, T$;
  - q_{it} — количество выпускников года t, работающих в отрасли i, $i = 1, \ldots, m$, $t = 1, \ldots, T$.
- Чтобы предсказать долю λ_i будущих выпускников, которые будут работать в отрасли $i = 1, \ldots, m$, можно воспользоваться методом наименьших квадратов и решить следующую задачу КП:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} (q_{it} - \lambda_i N_t)^2 \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Регрессия с ограничениями на коэффициенты

- В результате опроса студентов прошлых выпусков получены следующие данные:
  - N_t — количество выпускников в году $t = 1, \dots, T$;
  - q_{it} — количество выпускников года t, работающих в отрасли i, $i = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, T$.
- Чтобы предсказать долю λ_i будущих выпускников, которые будут работать в отрасли $i = 1, \dots, m$, можно воспользоваться методом наименьших квадратов и решить следующую задачу КП:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} (q_{it} - \lambda_i N_t)^2 \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Регрессия с ограничениями на коэффициенты

- В результате опроса студентов прошлых выпусков получены следующие данные:
  - N_t — количество выпускников в году $t = 1, \dots, T$;
  - q_{it} — количество выпускников года t, работающих в отрасли i, $i = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, T$.
- Чтобы предсказать долю λ_i будущих выпускников, которые будут работать в отрасли $i = 1, \dots, m$, можно воспользоваться методом наименьших квадратов и решить следующую задачу КП:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} (q_{it} - \lambda_i N_t)^2 \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$