Оптимизация с ограничениями: функция Лагранжа, достаточные условия оптимальности

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2015

План лекции

1. Функция Лагранжа, достаточные условия оптимальности
   - Функции Лагранжа и седловые точки
   - Достаточное условие оптимальности
2. Выпуклое программирование
   - Существование седловой точки для задач выпуклого программирования
   - Связь с условиями Куна — Таккера

Задача оптимизации

Будем рассматривать задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ g_i(x) &\le 0, \quad i \in I = \{1, \ldots, m\}, \\ x &\in S \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Заметим, что

- (1) — это очень общая задача, поскольку не накладывается никаких ограничений на множество S;
- если $S \subseteq \mathbb{Z}^n$, то (1) — это задача *целочисленного программирования*.

К задаче выпуклого программирования

К условиям Куна — Таккера для выпуклого программирования

Задача оптимизации

Будем рассматривать задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ g_i(x) &\le 0, \quad i \in I = \{1, \ldots, m\}, \\ x &\in S \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Заметим, что

- (1) — это очень общая задача, поскольку не накладывается никаких ограничений на множество S;
- если $S \subseteq \mathbb{Z}^n$, то (1) — это задача *целочисленного программирования.*

Задача оптимизации

Будем рассматривать задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ g_i(x) &\le 0, \quad i \in I = \{1, \dots, m\}, \\ x &\in S \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Заметим, что

- (1) — это очень общая задача, поскольку не накладывается никаких ограничений на множество S;
- если $S \subseteq \mathbb{Z}^n$, то (1) — это задача *целочисленного программирования*.

Задача оптимизации

Будем рассматривать задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ g_i(x) &\le 0, \quad i \in I = \{1, \dots, m\}, \\ x &\in S \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Заметим, что

- (1) — это очень общая задача, поскольку не накладывается никаких ограничений на множество S;
- если $S \subseteq \mathbb{Z}^n$, то (1) — это задача *целочисленного программирования.*

План лекции

1. Функция Лагранжа, достаточные условия оптимальности
   - Функции Лагранжа и седловые точки
   - Достаточное условие оптимальности
2. Выпуклое программирование
   - Существование седловой точки для задач выпуклого программирования
   - Связь с условиями Куна — Таккера

Функции Лагранжа и седловые точки

- Поставим в соответствие i-му ограничению $(i \in I)$ неотрицательное действительное число λ_i, называемое *множителем Лагранжа*.
- Определим *функцию Лагранжа* по правилу:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x).$$

Определение

Говорят, что точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ есть *седловая точка* функции $L(x, \lambda)$, если

$$L(\bar{x}, \lambda) \le L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \le L(x, \bar{\lambda}), \quad x \in S, \ \lambda \in \mathbb{R}^m_+.$$

Функции Лагранжа и седловые точки

- Поставим в соответствие i-му ограничению $(i \in I)$ неотрицательное действительное число λ_i, называемое *множителем Лагранжа*.
- Определим *функцию Лагранжа* по правилу:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x).$$

Определение

Говорят, что точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ есть *седловая точка* функции $L(x, \lambda)$, если

$$L(\bar{x}, \lambda) \le L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \le L(x, \bar{\lambda}), \quad x \in S, \ \lambda \in \mathbb{R}^m_+.$$

Функции Лагранжа и седловые точки

- Поставим в соответствие i-му ограничению $(i \in I)$ неотрицательное действительное число λ_i, называемое *множителем Лагранжа*.
- Определим *функцию Лагранжа* по правилу:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x).$$

Определение

Говорят, что точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ есть *седловая точка функции* $L(x, \lambda)$, если

$$L(\bar{x}, \lambda) \le L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \le L(x, \bar{\lambda}), \quad x \in S,\ \lambda \in \mathbb{R}^m_+.$$

Функции Лагранжа и седловые точки

- Поставим в соответствие i-му ограничению $(i \in I)$ неотрицательное действительное число λ_i, называемое *множителем Лагранжа*.
- Определим *функцию Лагранжа* по правилу:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x).$$

Определение

Говорят, что точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ есть *седловая точка* функции $L(x, \lambda)$, если

$$L(\bar{x}, \lambda) \le L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \le L(x, \bar{\lambda}), \quad x \in S, \ \lambda \in \mathbb{R}^m_+.$$

Иллюстрация понятия седловой точки

Пример седловой точки для функции двух переменных приведен на следующем рисунке.

- Здесь $\bar{x}$ есть точка минимума функции $L(x, \bar{\lambda})$ по $x \in S$,
- а $\bar{\lambda}$ есть точка максимума функции $L(\bar{x}, \lambda)$ по $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- Можно представить, что трехмерная точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}, L(\bar{x}, \bar{\lambda}))$ находится в центре поверхности седла для верховой езды на лошади.

Иллюстрация понятия седловой точки

Пример седловой точки для функции двух переменных приведен на следующем рисунке.

- Здесь $\bar{x}$ есть точка минимума функции $L(x, \bar{\lambda})$ по $x \in S$,
- а $\bar{\lambda}$ есть точка максимума функции $L(\bar{x}, \lambda)$ по $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- Можно представить, что трехмерная точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}, L(\bar{x}, \bar{\lambda}))$ находится в центре поверхности седла для верховой езды на лошади.

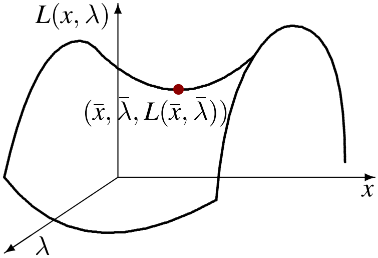


Иллюстрация понятия седловой точки

Пример седловой точки для функции двух переменных приведен на следующем рисунке.

- Здесь $\bar{x}$ есть точка минимума функции $L(x, \bar{\lambda})$ по $x \in S$,
- а $\bar{\lambda}$ есть точка максимума функции $L(\bar{x}, \lambda)$ по $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- Можно представить, что трехмерная точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}, L(\bar{x}, \bar{\lambda}))$ находится в центре поверхности седла для верховой езды на лошади.

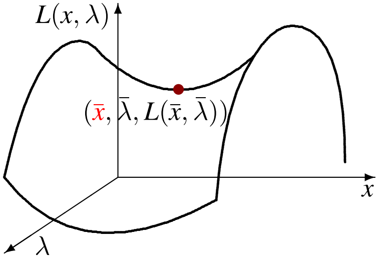


Иллюстрация понятия седловой точки

Пример седловой точки для функции двух переменных приведен на следующем рисунке.

- Здесь $\bar{x}$ есть точка минимума функции $L(x, \bar{\lambda})$ по $x \in S$,
- а $\bar{\lambda}$ есть точка максимума функции $L(\bar{x}, \lambda)$ по $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- Можно представить, что трехмерная точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}, L(\bar{x}, \bar{\lambda}))$ находится в центре поверхности седла для верховой езды на лошади.

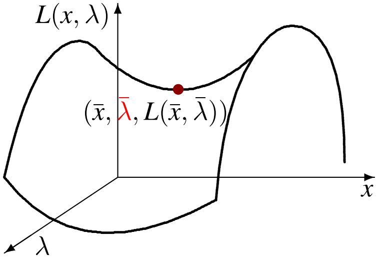
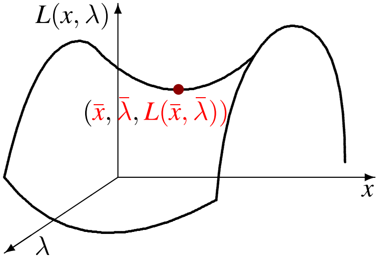


Иллюстрация понятия седловой точки

Пример седловой точки для функции двух переменных приведен на следующем рисунке.

- Здесь $\bar{x}$ есть точка минимума функции $L(x, \bar{\lambda})$ по $x \in S$,
- а $\bar{\lambda}$ есть точка максимума функции $L(\bar{x}, \lambda)$ по $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- Можно представить, что трехмерная точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}, L(\bar{x}, \bar{\lambda}))$ находится в центре поверхности седла для верховой езды на лошади.



Свойства седловых точек

Теорема

Точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ является седловой для функции $L(x, \lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min_{x \in S} L(x, \bar{\lambda}), \tag{2a}$$

$$g_i(\bar{x}) \le 0, \quad i \in I, \tag{2b}$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in I. \tag{2c}$$

Перейти к доказательству

Свойства седловых точек

Теорема

Точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ *является седловой для функции* $L(x, \lambda)$ *тогда и только тогда, когда*

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min_{x \in S} L(x, \bar{\lambda}), \tag{2a}$$

$$g_i(\bar{x}) \le 0, \quad i \in I, \tag{2b}$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in I. \tag{2c}$$

Перейти к доказательству

Свойства седловых точек

Теорема

Точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ *является седловой для функции* $L(x, \lambda)$ *тогда и только тогда, когда*

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min_{x \in S} L(x, \bar{\lambda}), \tag{2a}$$

$$g_i(\bar{x}) \le 0, \quad i \in I, \tag{2b}$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in I. \tag{2c}$$

Перейти к доказательству

Свойства седловых точек

Теорема

Точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ *является седловой для функции* $L(x, \lambda)$ *тогда и только тогда, когда*

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min_{x \in S} L(x, \bar{\lambda}), \tag{2a}$$

$$g_i(\bar{x}) \le 0, \quad i \in I, \tag{2b}$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in I. \tag{2c}$$

Перейти к доказательству

Свойства седловых точек

Теорема

Точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ *является седловой для функции* $L(x, \lambda)$ *тогда и только тогда, когда*

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min_{x \in S} L(x, \bar{\lambda}), \tag{2a}$$

$$g_i(\bar{x}) \le 0, \quad i \in I, \tag{2b}$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in I. \tag{2c}$$

Перейти к доказательству

План лекции

1. Функция Лагранжа, достаточные условия оптимальности
   - Функции Лагранжа и седловые точки
   - Достаточное условие оптимальности
2. Выпуклое программирование
   - Существование седловой точки для задач выпуклого программирования
   - Связь с условиями Куна — Таккера

Достаточное условие оптимальности

Теорема (Лагранжа)

Если пара $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$, то $\bar{x}$ является глобальным минимумом в задаче (1).

Доказательство.

Для любого $x \in S$, удовлетворяющего условию $g_i(x) \leq 0$ $(i \in I)$, из условий (2a)–(2c) с учетом того, что $\bar{\lambda}_i \geq 0$, имеем

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda})$$

$$\leq L(x, \bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(x) \leq f(x).$$

$\square$

Достаточное условие оптимальности

Теорема (Лагранжа)

Если пара $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ *есть седловая точка функции* $L(x, \lambda)$, *то* $\bar{x}$ *является глобальным минимумом в задаче* (1).

Доказательство.

Для любого $x \in S$, удовлетворяющего условию $g_i(x) \le 0$ $(i \in I)$, из условий (2a)–(2c) с учетом того, что $\bar{\lambda}_i \ge 0$, имеем

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \le L(x, \bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(x) \le f(x).$$

□

Достаточное условие оптимальности

Теорема (Лагранжа)

Если пара $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ *есть седловая точка функции* $L(x, \lambda)$, *то* $\bar{x}$ *является глобальным минимумом в задаче* (1).

Доказательство.

Для любого $x \in S$, удовлетволяющего условию $g_i(x) \le 0$ $(i \in I)$, из условий (2a)–(2c) с учетом того, что $\bar{\lambda}_i \ge 0$, имеем

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda})$$

$$\le L(x, \bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(x) \le f(x).$$

□

Достаточное условие оптимальности

Теорема (Лагранжа)

Если пара $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ *есть седловая точка функции* $L(x, \lambda)$, *то* $\bar{x}$ *является глобальным минимумом в задаче* (1).

Доказательство.

Для любого $x \in S$, удовлетволяющего условию $g_i(x) \le 0$ $(i \in I)$, из условий (2a)–(2c) с учетом того, что $\bar{\lambda}_i \ge 0$, имеем

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda})$$

$$\le L(x, \bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(x) \le f(x).$$

$\square$

Седловые точки существуют не всегда

- Теорема 2 — это весьма общий результат, который применим к любым задачам вида (1):
  - выпуклым и невыпуклым,
  - с дифференцируемыми и недифференцируемыми функциями f и g_i,
  - непрерывными и дискретными множествами S.
- Неудивительно, что имеются задачи, для которых функция Лагранжа не имеет седловых точек.

Седловые точки существуют не всегда

- Теорема 2 — это весьма общий результат, который применим к любым задачам вида (1):
  - выпуклым и невыпуклым,
  - с дифференцируемыми и недифференцируемыми функциями f и g_i,
  - непрерывными и дискретными множествами S.
- Неудивительно, что имеются задачи, для которых функция Лагранжа не имеет седловых точек.

Седловые точки существуют не всегда

- Теорема 2 — это весьма общий результат, который применим к любым задачам вида (1):
  - выпуклым и невыпуклым,
  - с дифференцируемыми и недифференцируемыми функциями f и g_i,
  - непрерывными и дискретными множествами S.
- Неудивительно, что имеются задачи, для которых функция Лагранжа не имеет седловых точек.

Седловые точки существуют не всегда

- Теорема 2 — это весьма общий результат, который применим к любым задачам вида (1):
  - выпуклым и невыпуклым,
  - с дифференцируемыми и недифференцируемыми функциями f и g_i,
  - непрерывными и дискретными множествами S.
- Неудивительно, что имеются задачи, для которых функция Лагранжа не имеет седловых точек.

Седловые точки существуют не всегда

- Теорема 2 — это весьма общий результат, который применим к любым задачам вида (1):
  - выпуклым и невыпуклым,
  - с дифференцируемыми и недифференцируемыми функциями f и g_i,
  - непрерывными и дискретными множествами S.
- Неудивительно, что имеются задачи, для которых функция Лагранжа не имеет седловых точек.

Функция Лагранжа может не иметь седловой точки

Пример

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \to \min, \\ g_1(x) &= 2x - 1 \le 0, \\ S &= \{x \in \mathbb{R} :\ 0 \le x \le 1\}. \end{aligned} \tag{3}$$

- Так как $L(x, \lambda) = -x^2 + \lambda(2x - 1)$ строго вогнута по x,
- то $\min\limits_{x \in [0,1]} L(x, \lambda)$ при любом фиксированном λ достигается либо в точке $x = 0$, либо в точке $x = 1$.
- Так как единственный глобальный минимум в нашей задаче $x^* = 1/2$ не является минимумом функции $L(x, \lambda)$ ни при каком значении λ,
- то $L(x, \lambda)$ не имеет седловой точки.

Функция Лагранжа может не иметь седловой точки

Пример

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \to \min, \\ g_1(x) &= 2x - 1 \le 0, \\ S &= \{x \in \mathbb{R} :\ 0 \le x \le 1\}. \end{aligned} \quad (3)$$

- Так как $L(x, \lambda) = -x^2 + \lambda(2x - 1)$ строго вогнута по x,
- то $\min\limits_{x \in [0,1]} L(x, \lambda)$ при любом фиксированном λ достигается либо в точке $x = 0$, либо в точке $x = 1$.
- Так как единственный глобальный минимум в нашей задаче $x^* = 1/2$ не является минимумом функции $L(x, \lambda)$ ни при каком значении λ,
- то $L(x, \lambda)$ не имеет седловой точки.

Функция Лагранжа может не иметь седловой точки

Пример

$$f(x) = -x^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = 2x - 1 \le 0, \tag{3}$$
$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \le x \le 1\}.$$

- Так как $L(x, \lambda) = -x^2 + \lambda(2x - 1)$ строго вогнута по x,
- то $\min\limits_{x \in [0,1]} L(x, \lambda)$ при любом фиксированном λ достигается либо в точке $x = 0$, либо в точке $x = 1$.
- Так как единственный глобальный минимум в нашей задаче $x^* = 1/2$ не является минимумом функции $L(x, \lambda)$ ни при каком значении λ,
- то $L(x, \lambda)$ не имеет седловой точки.

Функция Лагранжа может не иметь седловой точки

Пример

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \to \min, \\ g_1(x) &= 2x - 1 \le 0, \\ S &= \{x \in \mathbb{R} : \; 0 \le x \le 1\}. \end{aligned} \tag{3}$$

- Так как $L(x, \lambda) = -x^2 + \lambda(2x - 1)$ строго вогнута по x,
- то $\min\limits_{x \in [0,1]} L(x, \lambda)$ при любом фиксированном λ достигается либо в точке $x = 0$, либо в точке $x = 1$.
- Так как единственный глобальный минимум в нашей задаче $x^* = 1/2$ не является минимумом функции $L(x, \lambda)$ ни при каком значении λ,
- то $L(x, \lambda)$ не имеет седловой точки.

Функция Лагранжа может не иметь седловой точки

Пример

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \to \min, \\ g_1(x) &= 2x - 1 \le 0, \\ S &= \{x \in \mathbb{R} :\ 0 \le x \le 1\}. \end{aligned} \tag{3}$$

- Так как $L(x,\lambda) = -x^2 + \lambda(2x-1)$ строго вогнута по x,
- то $\min\limits_{x\in[0,1]} L(x,\lambda)$ при любом фиксированном λ достигается либо в точке $x=0$, либо в точке $x=1$.
- Так как единственный глобальный минимум в нашей задаче $x^* = 1/2$ не является минимумом функции $L(x,\lambda)$ ни при каком значении λ,
- то $L(x,\lambda)$ не имеет седловой точки.

План лекции

1. Функция Лагранжа, достаточные условия оптимальности
   - Функции Лагранжа и седловые точки
   - Достаточное условие оптимальности
2. Выпуклое программирование
   - Существование седловой точки для задач выпуклого программирования
   - Связь с условиями Куна — Таккера

Задача выпуклого программирования

Определение

Задача *выпуклого программирования* — это задача (1), когда

- все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы,
- а множество S — также выпукло.

Задача выпуклого программирования

Определение

Задача *выпуклого программирования* — это задача (1), когда

- все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы,
- а множество S — также выпукло.

Задача выпуклого программирования

Определение

Задача *выпуклого программирования* — это задача (1), когда

- все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы,
- а множество S — также выпукло.

Существ. седловой т-ки в з-че выпуклого прогр-ния

Теорема

- *Пусть все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы,*
- *множество S замкнуто и выпукло,*
- *и существует такая точка $x \in S$, что*

$$g_i(x) < 0, \quad i \in I.$$

- *Тогда если задача (1) имеет оптимальное решение $\bar{x}$,*
- *то существует такой вектор множителей $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$,*
- *что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$.*

Перейти к доказательству

Существ. седловой т-ки в з-че выпуклого прогр-ния

Теорема

- *Пусть все функции* f *и* g_i $(i \in I)$ *выпуклы,*
- *множество* S *замкнуто и выпукло,*
- *и существует такая точка* $x \in S$, *что*
$$g_i(x) < 0, \quad i \in I.$$
- *Тогда если задача* (1) *имеет оптимальное решение* $\bar{x}$,
- *то существует такой вектор множителей* $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$,
- *что* $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *есть седловая точка функции* $L(x, \lambda)$.

Перейти к доказательству

Существ. седловой т-ки в з-че выпуклого прогр-ния

Теорема

- *Пусть все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы,*
- *множество S замкнуто и выпукло,*
- *и существует такая точка $x \in S$, что*
$$g_i(x) < 0, \quad i \in I.$$
- *Тогда если задача (1) имеет оптимальное решение $\bar{x}$,*
- *то существует такой вектор множителей $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$,*
- *что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$.*

Перейти к доказательству

Существ. седловой т-ки в з-че выпуклого прогр-ния

Теорема

- *Пусть все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы,*
- *множество S замкнуто и выпукло,*
- *и существует такая точка $x \in S$, что*

$$g_i(x) < 0, \quad i \in I.$$

- *Тогда если задача (1) имеет оптимальное решение $\bar{x}$,*
- *то существует такой вектор множителей $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$,*
- *что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$.*

Перейти к доказательству

Существ. седловой т-ки в з-че выпуклого прогр-ния

Теорема

- *Пусть все функции* f *и* g_i $(i \in I)$ *выпуклы,*
- *множество* S *замкнуто и выпукло,*
- *и существует такая точка* $x \in S$, *что*

$$g_i(x) < 0, \quad i \in I.$$

- *Тогда если задача* (1) *имеет оптимальное решение* $\bar{x}$,
- *то существует такой вектор множителей* $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$,
- *что* $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *есть седловая точка функции* $L(x, \lambda)$.

Перейти к доказательству

Существ. седловой т-ки в з-че выпуклого прогр-ния

Теорема

- *Пусть все функции* f *и* g_i $(i \in I)$ *выпуклы,*
- *множество* S *замкнуто и выпукло,*
- *и существует такая точка* $x \in S$, *что*
$$g_i(x) < 0, \quad i \in I.$$
- *Тогда если задача* (1) *имеет оптимальное решение* $\bar{x}$,
- *то существует такой вектор множителей* $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$,
- *что* $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *есть седловая точка функции* $L(x, \lambda)$.

Перейти к доказательству

Существ. седловой т-ки в з-че выпуклого прогр-ния

Теорема

- *Пусть все функции* f *и* g_i $(i \in I)$ *выпуклы,*
- *множество* S *замкнуто и выпукло,*
- *и существует такая точка* $x \in S$*, что*

$$g_i(x) < 0, \quad i \in I.$$

- *Тогда если задача* (1) *имеет оптимальное решение* $\bar{x}$*,*
- *то существует такой вектор множителей* $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$*,*
- *что* $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *есть седловая точка функции* $L(x, \lambda)$*.*

▸ Перейти к доказательству

План лекции

1. Функция Лагранжа, достаточные условия оптимальности
   - Функции Лагранжа и седловые точки
   - Достаточное условие оптимальности
2. Выпуклое программирование
   - Существование седловой точки для задач выпуклого программирования
   - Связь с условиями Куна — Таккера

Связь с условиями Куна — Таккера

Теорема

Пусть в задаче (1) все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы и непрерывно дифференцируемы, а $S = \mathbb{R}^n$.

1. *Если $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ есть седловая точка функции Лагранжа в задаче (1), то $\bar{\lambda}$ есть вектор множителей Куна — Таккера.*
2. *Если в задаче (1) точке (глобального) минимума $\bar{x}$ соответствует вектор множителей Куна — Таккера $\bar{\lambda}$, то $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа.*

Теорема 4 утверждает, что в дифференцируемом выпуклом случае множители Куна — Таккера отождествляются с множителями Лагранжа в седловой точке.

Перейти к доказательству

Связь с условиями Куна — Таккера

Теорема

Пусть в задаче ‣ (1) *все функции* f *и* g_i $(i \in I)$ *выпуклы и непрерывно дифференцируемы, а* $S = \mathbb{R}^n$.

1. *Если* $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *есть седловая точка функции Лагранжа в задаче* (1), *то* $\bar{\lambda}$ *есть вектор множителей Куна — Таккера.*
2. *Если в задаче* (1) *точке (глобального) минимума* $\bar{x}$ *соответствует вектор множителей Куна — Таккера* $\bar{\lambda}$, *то* $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *есть седловая точка функции Лагранжа.*

Теорема 4 утверждает, что в дифференцируемом выпуклом случае множители Куна — Таккера отождествляются с множителями Лагранжа в седловой точке.

‣ Перейти к доказательству

Связь с условиями Куна — Таккера

Теорема

Пусть в задаче (1) *все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы и непрерывно дифференцируемы, а $S = \mathbb{R}^n$.*

1. *Если $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ есть седловая точка функции Лагранжа в задаче* (1), *то $\bar{\lambda}$ есть вектор множителей Куна — Таккера.*
2. *Если в задаче* (1) *точке (глобального) минимума $\bar{x}$ соответствует вектор множителей Куна — Таккера $\bar{\lambda}$, то $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа.*

Теорема 4 утверждает, что в дифференцируемом выпуклом случае множители Куна — Таккера отождествляются с множителями Лагранжа в седловой точке.

Перейти к доказательству

Связь с условиями Куна — Таккера

Теорема

Пусть в задаче ▸ (1) *все функции* f *и* g_i $(i \in I)$ *выпуклы и непрерывно дифференцируемы, а* $S = \mathbb{R}^n$.

1. *Если* $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *есть седловая точка функции Лагранжа в задаче* (1), *то* $\bar{\lambda}$ *есть вектор множителей Куна — Таккера.*
2. *Если в задаче* (1) *точке (глобального) минимума* $\bar{x}$ *соответствует вектор множителей Куна — Таккера* $\bar{\lambda}$, *то* $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *есть седловая точка функции Лагранжа.*

Теорема 4 утверждает, что в дифференцируемом выпуклом случае множители Куна — Таккера отождествляются с множителями Лагранжа в седловой точке.

▸ Перейти к доказательству

Связь с условиями Куна — Таккера

Теорема

Пусть в задаче (1) *все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы и непрерывно дифференцируемы, а $S = \mathbb{R}^n$.*

1. *Если $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ есть седловая точка функции Лагранжа в задаче* (1)*, то $\bar{\lambda}$ есть вектор множителей Куна — Таккера.*
2. *Если в задаче* (1) *точке (глобального) минимума $\bar{x}$ соответствует вектор множителей Куна — Таккера $\bar{\lambda}$, то $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа.*

Теорема 4 утверждает, что в дифференцируемом выпуклом случае множители Куна — Таккера отождествляются с множителями Лагранжа в седловой точке.

Перейти к доказательству

Доказательство теоремы о свойствах седловых точек

- Если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ — седловая точка, то (2a) выполняется.
- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ имеем
$$f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\bar{x}).$$
- Откуда $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+. \quad (*)$
- Если (2b) не выполняется для $i \in I$, то можно выбрать большое $\lambda_i > 0$, для которого $(*)$ не выполняется.
- Поэтому все неравенства в (2b) должны выполняться.
- Наконец, при $\lambda = 0$ неравенство $(*)$ превращается в неравенство $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \geq 0$.
- Так как $\bar{\lambda}_i \geq 0$ и $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, i \in I$, то $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq 0$.
- Поэтому $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ и $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы о свойствах седловых точек

- Если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ — седловая точка, то (2a) выполняется.
- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ имеем
$$f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\bar{x}).$$
- Откуда $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+. \quad (*)$
- Если (2b) не выполняется для $i \in I$, то можно выбрать большое $\lambda_i > 0$, для которого $(*)$ не выполняется.
- Поэтому все неравенства в (2b) должны выполняться.
- Наконец, при $\lambda = 0$ неравенство $(*)$ превращается в неравенство $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \geq 0$.
- Так как $\bar{\lambda}_i \geq 0$ и $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, i \in I$, то $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq 0$.
- Поэтому $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ и $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы о свойствах седловых точек

- Если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ — седловая точка, то (2a) выполняется.
- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ имеем
$$f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \ge L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\bar{x}).$$
- Откуда $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \le 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+. \quad (*)$
- Если (2b) не выполняется для $i \in I$, то можно выбрать большое $\lambda_i > 0$, для которого $(*)$ не выполняется.
- Поэтому все неравенства в (2b) должны выполняться.
- Наконец, при $\lambda = 0$ неравенство $(*)$ превращается в неравенство $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \ge 0$.
- Так как $\bar{\lambda}_i \ge 0$ и $g_i(\bar{x}) \le 0 \quad \forall\, i \in I$, то $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \le 0$.
- Поэтому $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ и $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы о свойствах седловых точек

- Если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ — седловая точка, то (2a) выполняется.
- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ имеем
$$f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\bar{x}).$$
- Откуда $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+. \quad (*)$
- Если (2b) не выполняется для $i \in I$, то можно выбрать большое $\lambda_i > 0$, для которого $(*)$ не выполняется.
- Поэтому все неравенства в (2b) должны выполняться.
- Наконец, при $\lambda = 0$ неравенство $(*)$ превращается в неравенство $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \geq 0$.
- Так как $\bar{\lambda}_i \geq 0$ и $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, i \in I$, то $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq 0$.
- Поэтому $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ и $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы о свойствах седловых точек

- Если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ — седловая точка, то (2a) выполняется.
- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ имеем
$$f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\bar{x}).$$
- Откуда $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+. \quad (*)$
- Если (2b) не выполняется для $i \in I$, то можно выбрать большое $\lambda_i > 0$, для которого $(*)$ не выполняется.
- Поэтому все неравенства в (2b) должны выполняться.
- Наконец, при $\lambda = 0$ неравенство $(*)$ превращается в неравенство $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \geq 0$.
- Так как $\bar{\lambda}_i \geq 0$ и $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, i \in I$, то $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq 0$.
- Поэтому $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ и $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы о свойствах седловых точек

- Если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ — седловая точка, то (2a) выполняется.
- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ имеем
$$f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\bar{x}).$$
- Откуда $\displaystyle\sum_{i \in I} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+. \quad (*)$
- Если (2b) не выполняется для $i \in I$, то можно выбрать большое $\lambda_i > 0$, для которого $(*)$ не выполняется.
- Поэтому все неравенства в (2b) должны выполняться.
- Наконец, при $\lambda = 0$ неравенство $(*)$ превращается в неравенство $\displaystyle\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \geq 0.$
- Так как $\bar{\lambda}_i \geq 0$ и $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, i \in I$, то $\displaystyle\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq 0.$
- Поэтому $\displaystyle\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ и $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы о свойствах седловых точек

- Если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ — седловая точка, то (2a) выполняется.
- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ имеем

$$f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\bar{x}).$$

- Откуда $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+. \quad (*)$
- Если (2b) не выполняется для $i \in I$, то можно выбрать большое $\lambda_i > 0$, для которого $(*)$ не выполняется.
- Поэтому все неравенства в (2b) должны выполняться.
- Наконец, при $\lambda = 0$ неравенство $(*)$ превращается в неравенство $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \geq 0$.
- Так как $\bar{\lambda}_i \geq 0$ и $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, i \in I$, то $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq 0$.
- Поэтому $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ и $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы о свойствах седловых точек

- Если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ — седловая точка, то (2a) выполняется.
- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ имеем
$$f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(\bar{x}).$$
- Откуда $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+. \quad (*)$
- Если (2b) не выполняется для $i \in I$, то можно выбрать большое $\lambda_i > 0$, для которого $(*)$ не выполняется.
- Поэтому все неравенства в (2b) должны выполняться.
- Наконец, при $\lambda = 0$ неравенство $(*)$ превращается в неравенство $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \geq 0$.
- Так как $\bar{\lambda}_i \geq 0$ и $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall\, i \in I$, то $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq 0$.
- Поэтому $\sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ и $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Пусть $\bar{x}$ — оптимальное решение задачи (1).
- Рассмотрим множества

$$A = \{(y_0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \ \exists\, x \in S, \ \text{что } y_0 \geq f(x), \\ y_i \geq g_i(x) \ \forall\, i \in I\},$$
$$B = \{(y_0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \ y_0 \leq f(\bar{x}), \ y_i \leq 0 \ \forall\, i \in I\}.$$

- То, что множество B выпукло, проверяется просто.
- Докажем, что множество A также выпукло.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Пусть $\bar{x}$ — оптимальное решение задачи (1).
- Рассмотрим множества

$$A = \{(y_0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \ \exists\, x \in S, \ \text{что } y_0 \geq f(x), \\ y_i \geq g_i(x) \ \forall\, i \in I\},$$
$$B = \{(y_0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \ y_0 \leq f(\bar{x}), \ y_i \leq 0 \ \forall\, i \in I\}.$$

- То, что множество B выпукло, проверяется просто.
- Докажем, что множество A также выпукло.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Пусть $\bar{x}$ — оптимальное решение задачи (1).
- Рассмотрим множества

$$A = \{(y_0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \ \exists\, x \in S, \ \text{что } y_0 \geq f(x),$$
$$y_i \geq g_i(x) \ \forall\, i \in I\},$$
$$B = \{(y_0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \ y_0 \leq f(\bar{x}), \ y_i \leq 0 \ \forall\, i \in I\}.$$

- То, что множество B выпукло, проверяется просто.
- Докажем, что множество A также выпукло.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Пусть $\bar{x}$ — оптимальное решение задачи (1).
- Рассмотрим множества

$$A = \{(y_0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \; \exists\, x \in S, \; \text{что } y_0 \geq f(x), \\ y_i \geq g_i(x) \; \forall\, i \in I\},$$

$$B = \{(y_0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \; y_0 \leq f(\bar{x}), \; y_i \leq 0 \; \forall\, i \in I\}.$$

- То, что множество B выпукло, проверяется просто.
- Докажем, что множество A также выпукло.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Пусть $(y_0^1, y^1), (y_0^2, y^2) \in A$. Нам нужно доказать, что для любого $\delta \in [0,1]$ точка $(\tilde{y}_0, \tilde{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (1-\delta)(y_0^1, y^1) + \delta(y_0^2, y^2))$ также принадлежит множеству A.
- Поскольку $(y_0^1, y^1), (y_0^2, y^2) \in A$, то существуют точки $x^1, x^2 \in S$, что
$$y_0^1 \geq f(x^1),\ y_i^1 \geq g_i(x^1), \quad i \in I,$$
$$y_0^2 \geq f(x^2),\ y_i^2 \geq g_i(x^2), \quad i \in I.$$
- Откуда, с учетом выпуклости функций f и g_i, имеем
$(1-\delta)y_0^1 + \delta y_0^2 \geq (1-\delta)f(x^1) + \delta f(x^2) \geq f((1-\delta)x^1 + \delta x^2)$,
и для всех $i \in I$
$(1-\delta)y_0^i + \delta y_i^2 \geq (1-\delta)g_(x^1) + \delta g_i(x^2) \geq g_i((1-\delta)x^1 + \delta x^2)$.
- Из этих неравенств и определения множества A следует, что точка $(\tilde{y}_0, \tilde{y})$ также принадлежит множеству A.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Пусть $(y_0^1, y^1), (y_0^2, y^2) \in A$. Нам нужно доказать, что для любого $\delta \in [0,1]$ точка $(\tilde{y}_0, \tilde{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (1-\delta)(y_0^1, y^1) + \delta(y_0^2, y^2))$ также принадлежит множеству A.
- Поскольку $(y_0^1, y^1), (y_0^2, y^2) \in A$, то существуют точки $x^1, x^2 \in S$, что
$$y_0^1 \geq f(x^1),\ y_i^1 \geq g_i(x^1), \quad i \in I,$$
$$y_0^2 \geq f(x^2),\ y_i^2 \geq g_i(x^2), \quad i \in I.$$
- Откуда, с учетом выпуклости функций f и g_i, имеем
$$(1-\delta)y_0^1 + \delta y_0^2 \geq (1-\delta)f(x^1) + \delta f(x^2) \geq f((1-\delta)x^1 + \delta x^2),$$
и для всех $i \in I$
$$(1-\delta)y_0^i + \delta y_i^2 \geq (1-\delta)g_(x^1) + \delta g_i(x^2) \geq g_i((1-\delta)x^1 + \delta x^2).$$
- Из этих неравенств и определения множества A следует, что точка $(\tilde{y}_0, \tilde{y})$ также принадлежит множеству A.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Пусть $(y_0^1, y^1), (y_0^2, y^2) \in A$. Нам нужно доказать, что для любого $\delta \in [0,1]$ точка $(\tilde{y}_0, \tilde{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (1-\delta)(y_0^1, y^1) + \delta(y_0^2, y^2))$ также принадлежит множеству A.
- Поскольку $(y_0^1, y^1), (y_0^2, y^2) \in A$, то существуют точки $x^1, x^2 \in S$, что
$$y_0^1 \ge f(x^1),\ y_i^1 \ge g_i(x^1), \quad i \in I,$$
$$y_0^2 \ge f(x^2),\ y_i^2 \ge g_i(x^2), \quad i \in I.$$
- Откуда, с учетом выпуклости функций f и g_i, имеем
$$(1-\delta)y_0^1 + \delta y_0^2 \ge (1-\delta)f(x^1) + \delta f(x^2) \ge f((1-\delta)x^1 + \delta x^2),$$
и для всех $i \in I$
$$(1-\delta)y_0^i + \delta y_i^2 \ge (1-\delta)g_(x^1) + \delta g_i(x^2) \ge g_i((1-\delta)x^1 + \delta x^2).$$
- Из этих неравенств и определения множества A следует, что точка $(\tilde{y}_0, \tilde{y})$ также принадлежит множеству A.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Пусть $(y_0^1, y^1), (y_0^2, y^2) \in A$. Нам нужно доказать, что для любого $\delta \in [0,1]$ точка $(\tilde{y}_0, \tilde{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (1-\delta)(y_0^1, y^1) + \delta(y_0^2, y^2))$ также принадлежит множеству A.
- Поскольку $(y_0^1, y^1), (y_0^2, y^2) \in A$, то существуют точки $x^1, x^2 \in S$, что
$$y_0^1 \geq f(x^1),\ y_i^1 \geq g_i(x^1), \quad i \in I,$$
$$y_0^2 \geq f(x^2),\ y_i^2 \geq g_i(x^2), \quad i \in I.$$
- Откуда, с учетом выпуклости функций f и g_i, имеем
$$(1-\delta)y_0^1 + \delta y_0^2 \geq (1-\delta)f(x^1) + \delta f(x^2) \geq f((1-\delta)x^1 + \delta x^2),$$
и для всех $i \in I$
$$(1-\delta)y_0^i + \delta y_i^2 \geq (1-\delta)g_(x^1) + \delta g_i(x^2) \geq g_i((1-\delta)x^1 + \delta x^2).$$
- Из этих неравенств и определения множества A следует, что точка $(\tilde{y}_0, \tilde{y})$ также принадлежит множеству A.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Так как $f(\bar{x})$ есть оптимальное решение задачи (1), то $A \cap \operatorname{int} B \neq \emptyset$, и так как $\operatorname{int} B \neq \emptyset$, то существует гиперплоскость, разделяющая множества A и B,
- т. е. существует ненулевой вектор $(u_0, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, что для любых $(y_0, y) \in A$ и $(z_0, z) \in B$ справедливо неравенство
$$u_0 y_0 + u^T y \geq u_0 z_0 + u^T z. \qquad (*)$$
- Покажем, что $u_0 > 0$ и все $u_i \geq 0$ $(i \in I)$. Действительно, если $u_i < 0$ для некоторого $i \in I$, то мы можем увеличить компоненту z_i так, чтобы неравенство (*) нарушилось.
- Поскольку $(f(\bar{x}), 0) \in A$ и $(f(x), g(x)) \in B$ для всех $x \in S$, то из (*) имеем $\quad u_0 f(x) + u^T g(x) \geq u_0 \quad \forall\, x \in S.$
- Если допустить, что $u_0 \leq 0$, то мы имели бы неравенства
$$u^T g(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in S,$$
что невозможно, так как существует такое $x \in S$, что $g_i(x) < 0$ для всех $i \in I$. Следовательно, $u_0 > 0$.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Так как $f(\bar{x})$ есть оптимальное решение задачи (1), то $A \cap \operatorname{int} B \neq \emptyset$, и так как $\operatorname{int} B \neq \emptyset$, то существует гиперплоскость, разделяющая множества A и B,
- т. е. существует ненулевой вектор $(u_0, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, что для любых $(y_0, y) \in A$ и $(z_0, z) \in B$ справедливо неравенство
$$u_0 y_0 + u^T y \geq u_0 z_0 + u^T z. \qquad (*)$$
- Покажем, что $u_0 > 0$ и все $u_i \geq 0$ $(i \in I)$. Действительно, если $u_i < 0$ для некоторого $i \in I$, то мы можем увеличить компоненту z_i так, чтобы неравенство $(*)$ нарушилось.
- Поскольку $(f(\bar{x}), 0) \in A$ и $(f(x), g(x)) \in B$ для всех $x \in S$, то из $(*)$ имеем $\quad u_0 f(x) + u^T g(x) \geq u_0 \quad \forall\, x \in S$.
- Если допустить, что $u_0 \leq 0$, то мы имели бы неравенства
$$u^T g(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in S,$$
что невозможно, так как существует такое $x \in S$, что $g_i(x) < 0$ для всех $i \in I$. Следовательно, $u_0 > 0$.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Так как $f(\bar{x})$ есть оптимальное решение задачи (1), то $A \cap \operatorname{int} B \neq \emptyset$, и так как $\operatorname{int} B \neq \emptyset$, то существует гиперплоскость, разделяющая множества A и B,
- т. е. существует ненулевой вектор $(u_0, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, что для любых $(y_0, y) \in A$ и $(z_0, z) \in B$ справедливо неравенство
$$u_0 y_0 + u^T y \geq u_0 z_0 + u^T z. \qquad (*)$$
- Покажем, что $u_0 > 0$ и все $u_i \geq 0$ $(i \in I)$. Действительно, если $u_i < 0$ для некоторого $i \in I$, то мы можем увеличить компоненту z_i так, чтобы неравенство (*) нарушилось.
- Поскольку $(f(\bar{x}), 0) \in A$ и $(f(x), g(x)) \in B$ для всех $x \in S$, то из (*) имеем $\quad u_0 f(x) + u^T g(x) \geq u_0 \quad \forall\, x \in S.$
- Если допустить, что $u_0 \leq 0$, то мы имели бы неравенства
$$u^T g(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in S,$$
что невозможно, так как существует такое $x \in S$, что $g_i(x) < 0$ для всех $i \in I$. Следовательно, $u_0 > 0$.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Так как $f(\bar{x})$ есть оптимальное решение задачи (1), то $A \cap \operatorname{int} B \neq \emptyset$, и так как $\operatorname{int} B \neq \emptyset$, то существует гиперплоскость, разделяющая множества A и B,
- т. е. существует ненулевой вектор $(u_0, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, что для любых $(y_0, y) \in A$ и $(z_0, z) \in B$ справедливо неравенство
$$u_0 y_0 + u^T y \geq u_0 z_0 + u^T z. \qquad (*)$$
- Покажем, что $u_0 > 0$ и все $u_i \geq 0$ $(i \in I)$. Действительно, если $u_i < 0$ для некоторого $i \in I$, то мы можем увеличить компоненту z_i так, чтобы неравенство (*) нарушилось.
- Поскольку $(f(\bar{x}), 0) \in A$ и $(f(x), g(x)) \in B$ для всех $x \in S$, то из (*) имеем $u_0 f(x) + u^T g(x) \geq u_0 \;\; \forall\, x \in S$.
- Если допустить, что $u_0 \leq 0$, то мы имели бы неравенства
$$u^T g(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in S,$$
что невозможно, так как существует такое $x \in S$, что $g_i(x) < 0$ для всех $i \in I$. Следовательно, $u_0 > 0$.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Так как $f(\bar{x})$ есть оптимальное решение задачи (1), то $A \cap \operatorname{int} B \neq \emptyset$, и так как $\operatorname{int} B \neq \emptyset$, то существует гиперплоскость, разделяющая множества A и B,
- т. е. существует ненулевой вектор $(u_0, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, что для любых $(y_0, y) \in A$ и $(z_0, z) \in B$ справедливо неравенство
$$u_0 y_0 + u^T y \geq u_0 z_0 + u^T z. \qquad (*)$$
- Покажем, что $u_0 > 0$ и все $u_i \geq 0$ $(i \in I)$. Действительно, если $u_i < 0$ для некоторого $i \in I$, то мы можем увеличить компоненту z_i так, чтобы неравенство (*) нарушилось.
- Поскольку $(f(\bar{x}), 0) \in A$ и $(f(x), g(x)) \in B$ для всех $x \in S$, то из (*) имеем $\quad u_0 f(x) + u^T g(x) \geq u_0 \;\; \forall\, x \in S$.
- Если допустить, что $u_0 \leq 0$, то мы имели бы неравенства
$$u^T g(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in S,$$
что невозможно, так как существует такое $x \in S$, что $g_i(x) < 0$ для всех $i \in I$. Следовательно, $u_0 > 0$.

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Положим $\bar{\lambda} = u/u_0$. Заметим, что $\bar{\lambda} \geq 0$.
- Из $\quad u_0 f(x) + u^T g(x) \geq u_0 \;\; \forall\, x \in S \quad$ имеем
$$f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geq f(\bar{x}) \;\; \forall\, x \in S. \qquad (**)$$
- Полагая в (**) $x = \bar{x}$, получим неравенство $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \geq 0$. Но одновременно справедливо и неравенство $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \leq 0$ (поскольку $\bar{\lambda} \geq 0$ и $g(x) \leq 0$). Следовательно, $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0$.
- Складывая равенство $0 = \bar{\lambda}^T g(\bar{x})$ с неравенством (**), получим неравенство
$$f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geq f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \;\; \forall\, x \in S,$$
или
$$L(x, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \bar{\lambda}), \quad x \in S.$$
- Теперь по теореме о свойствах седловых точек, $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$. $\square$

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Положим $\bar{\lambda} = u/u_0$. Заметим, что $\bar{\lambda} \geq 0$.
- Из $u_0 f(x) + u^T g(x) \geq u_0 \;\; \forall\, x \in S$ имеем
$$f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geq f(\bar{x}) \;\; \forall\, x \in S. \qquad (**)$$
- Полагая в $(**)$ $x = \bar{x}$, получим неравенство $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \geq 0$. Но одновременно справедливо и неравенство $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \leq 0$ (поскольку $\bar{\lambda} \geq 0$ и $g(x) \leq 0$). Следовательно, $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0$.
- Складывая равенство $0 = \bar{\lambda}^T g(\bar{x})$ с неравенством $(**)$, получим неравенство
$$f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geq f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \;\; \forall\, x \in S,$$
или
$$L(x, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \bar{\lambda}), \quad x \in S.$$
- Теперь по теореме о свойствах седловых точек, $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$. □

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Положим $\bar{\lambda} = u/u_0$. Заметим, что $\bar{\lambda} \geq 0$.
- Из $\quad u_0 f(x) + u^T g(x) \geq u_0 \ \ \forall\, x \in S \quad$ имеем

$$f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geq f(\bar{x}) \ \ \forall\, x \in S. \qquad (**)$$

- Полагая в (**) $x = \bar{x}$, получим неравенство $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \geq 0$. Но одновременно справедливо и неравенство $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \leq 0$ (поскольку $\bar{\lambda} \geq 0$ и $g(x) \leq 0$). Следовательно, $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0$.
- Складывая равенство $0 = \bar{\lambda}^T g(\bar{x})$ с неравенством (**), получим неравенство

$$f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geq f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \ \ \forall\, x \in S,$$

или

$$L(x, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \bar{\lambda}), \quad x \in S.$$

- Теперь по теореме о свойствах седловых точек, $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$. □

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Положим $\bar{\lambda} = u/u_0$. Заметим, что $\bar{\lambda} \geq 0$.
- Из $\quad u_0 f(x) + u^T g(x) \geq u_0 \quad \forall\, x \in S \quad$ имеем
$$f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geq f(\bar{x}) \;\; \forall\, x \in S. \qquad (**)$$
- Полагая в $(**)$ $x = \bar{x}$, получим неравенство $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \geq 0$. Но одновременно справедливо и неравенство $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \leq 0$ (поскольку $\bar{\lambda} \geq 0$ и $g(x) \leq 0$). Следовательно, $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0$.
- Складывая равенство $0 = \bar{\lambda}^T g(\bar{x})$ с неравенством $(**)$, получим неравенство
$$f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geq f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \;\; \forall\, x \in S,$$
или
$$L(x, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \bar{\lambda}), \quad x \in S.$$
- Теперь по теореме о свойствах седловых точек, $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$. □

Вернуться к формулировке

Док-во теоремы о седловой т-ке в з-че вып. прогр-ния

- Положим $\bar{\lambda} = u/u_0$. Заметим, что $\bar{\lambda} \geq 0$.
- Из $\quad u_0 f(x) + u^T g(x) \geq u_0 \;\; \forall\, x \in S \quad$ имеем
$$f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geq f(\bar{x}) \;\; \forall\, x \in S. \qquad (**)$$
- Полагая в $(**)$ $x = \bar{x}$, получим неравенство $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \geq 0$. Но одновременно справедливо и неравенство $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \leq 0$ (поскольку $\bar{\lambda} \geq 0$ и $g(x) \leq 0$). Следовательно, $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0$.
- Складывая равенство $0 = \bar{\lambda}^T g(\bar{x})$ с неравенством $(**)$, получим неравенство
$$f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) \geq f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \;\; \forall\, x \in S,$$
или
$$L(x, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{x}, \bar{\lambda}), \quad x \in S.$$
- Теперь по теореме о свойствах седловых точек, $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$. □

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 4

- В силу теоремы 3 при $S = \mathbb{R}^n$ точка $\bar{x}$ есть глобальный минимум в том и только том случае,
- если существует $\bar{\lambda} \geq 0$, что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.
- По теореме о свойствах седловых точек должны выполняться следующие условия:
  - а) $\bar{x} \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda})$;
  - б) $g_i(\bar{x}) \leq 0$ для всех $i \in I$;
  - в) $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.
- Т. к. функции f и g_i выпуклы и дифференцируемы, то функция $L(x, \bar{\lambda})$ выпукла по x и, значит, условие а) равносильно векторному равенству $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$,
- или $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$, которое в комбинации с

б) и в) дает условия Куна — Таккера в точке $\bar{x}$. □

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 4

- В силу теоремы 3 при $S = \mathbb{R}^n$ точка $\bar{x}$ есть глобальный минимум в том и только том случае,
- если существует $\bar{\lambda} \geq 0$, что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.
- По теореме о свойствах седловых точек должны выполняться следующие условия:
  - а) $\bar{x} \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda})$;
  - б) $g_i(\bar{x}) \leq 0$ для всех $i \in I$;
  - в) $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.
- Т. к. функции f и g_i выпуклы и дифференцируемы, то функция $L(x, \bar{\lambda})$ выпукла по x и, значит, условие а) равносильно векторному равенству $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$,
- или $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$, которое в комбинации с б) и в) дает условия Куна — Таккера в точке $\bar{x}$. $\square$

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 4

- В силу теоремы 3 при $S = \mathbb{R}^n$ точка $\bar{x}$ есть глобальный минимум в том и только том случае,
- если существует $\bar{\lambda} \geq 0$, что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.
- По теореме о свойствах седловых точек должны выполняться следующие условия:
  - а) $\bar{x} \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda})$;
  - б) $g_i(\bar{x}) \leq 0$ для всех $i \in I$;
  - в) $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.
- Т. к. функции f и g_i выпуклы и дифференцируемы, то функция $L(x, \bar{\lambda})$ выпукла по x и, значит, условие а) равносильно векторному равенству $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$,
- или $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$, которое в комбинации с б) и в) дает условия Куна — Таккера в точке $\bar{x}$. $\square$

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 4

- В силу теоремы 3 при $S = \mathbb{R}^n$ точка $\bar{x}$ есть глобальный минимум в том и только том случае,
- если существует $\bar{\lambda} \geq 0$, что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.
- По теореме о свойствах седловых точек должны выполняться следующие условия:
  - а) $\bar{x} \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda})$;
  - б) $g_i(\bar{x}) \leq 0$ для всех $i \in I$;
  - в) $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.
- Т. к. функции f и g_i выпуклы и дифференцируемы, то функция $L(x, \bar{\lambda})$ выпукла по x и, значит, условие а) равносильно векторному равенству $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$,
- или $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$, которое в комбинации с б) и в) дает условия Куна — Таккера в точке $\bar{x}$. □

◂ Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 4

- В силу теоремы 3 при $S = \mathbb{R}^n$ точка $\bar{x}$ есть глобальный минимум в том и только том случае,
- если существует $\bar{\lambda} \geq 0$, что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.
- По теореме о свойствах седловых точек должны выполняться следующие условия:
  - а) $\bar{x} \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda})$;
  - б) $g_i(\bar{x}) \leq 0$ для всех $i \in I$;
  - в) $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.
- Т. к. функции f и g_i выпуклы и дифференцируемы, то функция $L(x, \bar{\lambda})$ выпукла по x и, значит, условие а) равносильно векторному равенству $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$,
- или $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$, которое в комбинации с б) и в) дает условия Куна — Таккера в точке $\bar{x}$. $\square$

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 4

- В силу теоремы 3 при $S = \mathbb{R}^n$ точка $\bar{x}$ есть глобальный минимум в том и только том случае,
- если существует $\bar{\lambda} \geq 0$, что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.
- По теореме о свойствах седловых точек должны выполняться следующие условия:
    - а) $\bar{x} \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda})$;
    - б) $g_i(\bar{x}) \leq 0$ для всех $i \in I$;
    - в) $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.
- Т. к. функции f и g_i выпуклы и дифференцируемы, то функция $L(x, \bar{\lambda})$ выпукла по x и, значит, условие а) равносильно векторному равенству $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$,
- или $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$, которое в комбинации с б) и в) дает условия Куна — Таккера в точке $\bar{x}$. □

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 4

- В силу теоремы 3 при $S = \mathbb{R}^n$ точка $\bar{x}$ есть глобальный минимум в том и только том случае,
- если существует $\bar{\lambda} \geq 0$, что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.
- По теореме о свойствах седловых точек должны выполняться следующие условия:
  - а) $\bar{x} \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda})$;
  - б) $g_i(\bar{x}) \leq 0$ для всех $i \in I$;
  - в) $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.
- Т. к. функции f и g_i выпуклы и дифференцируемы, то функция $L(x, \bar{\lambda})$ выпукла по x и, значит, условие а) равносильно векторному равенству $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$,
- или $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$, которое в комбинации с б) и в) дает условия Куна — Таккера в точке $\bar{x}$. □

Вернуться к формулировке

Доказательство теоремы 4

- В силу теоремы 3 при $S = \mathbb{R}^n$ точка $\bar{x}$ есть глобальный минимум в том и только том случае,
- если существует $\bar{\lambda} \geq 0$, что $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.
- По теореме о свойствах седловых точек должны выполняться следующие условия:
  - а) $\bar{x} \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda})$;
  - б) $g_i(\bar{x}) \leq 0$ для всех $i \in I$;
  - в) $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ для всех $i \in I$.
- Т. к. функции f и g_i выпуклы и дифференцируемы, то функция $L(x, \bar{\lambda})$ выпукла по x и, значит, условие а) равносильно векторному равенству $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$,
- или $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$, которое в комбинации с б) и в) дает условия Куна — Таккера в точке $\bar{x}$. □

Вернуться к формулировке