Лагранжева двойственность

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2015

План лекции

План лекции

1. Двойственность Лагранжа
   - Двойственная функция Лагранжа
   - Слабая и сильная двойственность
   - Разрыв двойственности
2. Экономическая интерпретация ланранжевой двойственности
   - Два сценария
   - Интерпретация слабой и сильной теорем двойственности

Задача оптимизации

Будем рассматривать задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ g_i(x) &\le 0, \quad i \in I = \{1, \dots, m\}, \\ x &\in S \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Задача оптимизации

Будем рассматривать задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ g_i(x) &\le 0, \quad i \in I = \{1, \ldots, m\}, \\ x &\in S \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

◂ К слабой теореме двойственности

◂ К сильной теореме двойственности

Двойственная функция Лагранжа

- *Двойственная функция Лагранжа* $w : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, в точке $\lambda \in \mathbb{R}^m$ определяется как минимальное по x значение функции Лагранжа:

$$w(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in S} \left(L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \right).$$

- Заметим, что $w(\lambda) = -\infty$, если $L(x, \lambda)$ неограничена снизу по x на множестве S.
- Поскольку w определяется как поточечный инфимум семейства линейных функций аргумента λ, то w является *вогнутой функцией*, даже тогда, когда задача (1) не является выпуклой.

Двойственная функция Лагранжа

- *Двойственная функция Лагранжа* $w : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, в точке $\lambda \in \mathbb{R}^m$ определяется как минимальное по x значение функции Лагранжа:

$$w(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in S} \left(L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \right).$$

- Заметим, что $w(\lambda) = -\infty$, если $L(x, \lambda)$ неограничена снизу по x на множестве S.
- Поскольку w определяется как поточечный инфимум семейства линейных функций аргумента λ, то w является *вогнутой функцией*, даже тогда, когда задача (1) не является выпуклой.

Двойственная функция Лагранжа

- *Двойственная функция Лагранжа* $w : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, в точке $\lambda \in \mathbb{R}^m$ определяется как минимальное по x значение функции Лагранжа:

$$w(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in S} \left(L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \right).$$

- Заметим, что $w(\lambda) = -\infty$, если $L(x, \lambda)$ неограничена снизу по x на множестве S.
- Поскольку w определяется как поточечный инфимум семейства линейных функций аргумента λ, то w является *вогнутой функцией*, даже тогда, когда задача (1) не является выпуклой.

Нижние границы

- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ и любого допустимого решения $\tilde{x}$ задачи (1) имеем
- $w(\lambda) = \inf_{x \in S} L(x, \lambda) \le L(\tilde{x}, \lambda) = f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\tilde{x}) \le f(\tilde{x}).$
- Поэтому, если задача (1) имеет оптимальное решение x^*, то $f(x^*) \ge w(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$.
- Иными словами, значения двойственной функции Лагранжа являются нижними границами для оптимального значения целевой функции в задаче (1).

Нижние границы

- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ и любого допустимого решения $\tilde{x}$ задачи (1) имеем
- $w(\lambda) = \inf_{x \in S} L(x, \lambda) \le L(\tilde{x}, \lambda) = f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\tilde{x}) \le f(\tilde{x}).$
- Поэтому, если задача (1) имеет оптимальное решение x^*, то $f(x^*) \ge w(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$.
- Иными словами, значения двойственной функции Лагранжа являются нижними границами для оптимального значения целевой функции в задаче (1).

Нижние границы

- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ и любого допустимого решения $\tilde{x}$ задачи (1) имеем
- $w(\lambda) = \inf\limits_{x \in S} L(x, \lambda) \le L(\tilde{x}, \lambda) = f(\tilde{x}) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\tilde{x}) \le f(\tilde{x}).$
- Поэтому, если задача (1) имеет оптимальное решение x^*, то $f(x^*) \ge w(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$.
- Иными словами, значения двойственной функции Лагранжа являются нижними границами для оптимального значения целевой функции в задаче (1).

Нижние границы

- Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ и любого допустимого решения $\tilde{x}$ задачи (1) имеем
- $w(\lambda) = \inf_{x \in S} L(x, \lambda) \le L(\tilde{x}, \lambda) = f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\tilde{x}) \le f(\tilde{x})$.
- Поэтому, если задача (1) имеет оптимальное решение x^*, то $f(x^*) \ge w(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$.
- Иными словами, значения двойственной функции Лагранжа являются нижними границами для оптимального значения целевой функции в задаче (1).

Двойственная задача Лагранжа

- Чтобы получить наилучшую нижнюю оценку, мы должны решить *двойственную задачу Лагранжа* для задачи (1):

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} w(\lambda). \tag{2}$$

- В контексте двойственности Лагранжа задача (1) называется *прямой задачей*.
- Векторы множителей Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, для которых $w(\lambda) > -\infty$, называются *двойственно допустимыми*.
- Оптимальные решения λ^* задачи (2) называют *оптимальными множителями Лагранжа*, или просто *двойственно оптимальными решениями*.

К слабой теореме двойственности К слабой теореме двойственности

Двойственная задача Лагранжа

- Чтобы получить наилучшую нижнюю оценку, мы должны решить *двойственную задачу Лагранжа* для задачи (1):

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} w(\lambda). \tag{2}$$

- В контексте двойственности Лагранжа задача (1) называется *прямой задачей*.
- Векторы множителей Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, для которых $w(\lambda) > -\infty$, называются *двойственно допустимыми*.
- Оптимальные решения λ^* задачи (2) называют *оптимальными множителями Лагранжа*, или просто *двойственно оптимальными решениями*.

Двойственная задача Лагранжа

- Чтобы получить наилучшую нижнюю оценку, мы должны решить *двойственную задачу Лагранжа* для задачи (1):

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} w(\lambda). \tag{2}$$

- В контексте двойственности Лагранжа задача (1) называется *прямой задачей.*
- Векторы множителей Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, для которых $w(\lambda) > -\infty$, называются *двойственно допустимыми.*
- Оптимальные решения λ^* задачи (2) называют *оптимальными множителями Лагранжа*, или просто *двойственно оптимальными решениями.*

Двойственная задача Лагранжа

- Чтобы получить наилучшую нижнюю оценку, мы должны решить *двойственную задачу Лагранжа* для задачи (1):

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} w(\lambda). \tag{2}$$

- В контексте двойственности Лагранжа задача (1) называется *прямой задачей*.
- Векторы множителей Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, для которых $w(\lambda) > -\infty$, называются *двойственно допустимыми*.
- Оптимальные решения λ^* задачи (2) называют *оптимальными множителями Лагранжа*, или просто *двойственно оптимальными решениями*.

План лекции

1. Двойственность Лагранжа
   - Двойственная функция Лагранжа
   - Слабая и сильная двойственность
   - Разрыв двойственности
2. Экономическая интерпретация ланранжевой двойственности
   - Два сценария
   - Интерпретация слабой и сильной теорем двойственности

Слабая двойственность

Из сказанного выше, вытекает следующий простой, но очень важный, результат.

Теорема (слабая теорема двойственности)

Если x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно прямой и двойственной задач, то справедливо неравенство

$$w(\lambda^*) \le f(x^*). \tag{3}$$

Слабая двойственность

Из сказанного выше, вытекает следующий простой, но очень важный, результат.

Теорема (слабая теорема двойственности)

Если x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно прямой (1) и двойственной (2) задач, то справедливо неравенство

$$w(\lambda^*) \le f(x^*). \qquad (3)$$

Слабая двойственность

Из сказанного выше, вытекает следующий простой, но очень важный, результат.

Теорема (слабая теорема двойственности)

Если x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно прямой (1) *и двойственной* (2) *задач, то справедливо неравенство*

$$w(\lambda^*) \le f(x^*). \tag{3}$$

Сильная двойственность

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, когда оптимальные значения целевых функций в прямой и двойственной задачах совпадают.

Теорема (сильная теорема двойственности)

Если x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно прямой (1) *и двойственной* (2) *задач, то $w(\lambda^*) = f(x^*)$ тогда и только тогда, когда пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.*

Следствие

Сильная теорема двойственности справедлива для задач выпуклого программирования.

Перейти к доказательству

Сильная двойственность

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, когда оптимальные значения целевых функций в прямой и двойственной задачах совпадают.

Теорема (сильная теорема двойственности)

Если x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно прямой (1) *и двойственной* (2) *задач, то $w(\lambda^*) = f(x^*)$ тогда и только тогда, когда пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.*

Следствие

Сильная теорема двойственности справедлива для задач выпуклого программирования.

Перейти к доказательству

Сильная двойственность

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, когда оптимальные значения целевых функций в прямой и двойственной задачах совпадают.

Теорема (сильная теорема двойственности)

Если x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно прямой (1) *и двойственной* (2) *задач, то $w(\lambda^*) = f(x^*)$ тогда и только тогда, когда пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.*

Следствие

Сильная теорема двойственности справедлива для задач выпуклого программирования.

Перейти к доказательству

Сильная двойственность

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, когда оптимальные значения целевых функций в прямой и двойственной задачах совпадают.

Теорема (сильная теорема двойственности)

Если x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно прямой (1) *и двойственной* (2) *задач, то $w(\lambda^*) = f(x^*)$ тогда и только тогда, когда пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.*

Следствие

Сильная теорема двойственности справедлива для задач выпуклого программирования.

Перейти к доказательству

Сильная двойственность

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, когда оптимальные значения целевых функций в прямой и двойственной задачах совпадают.

Теорема (сильная теорема двойственности)

Если x^* *и* λ^* *есть оптимальные решения соответственно прямой* (1) *и двойственной* (2) *задач, то* $w(\lambda^*) = f(x^*)$ *тогда и только тогда, когда пара* (x^*, λ^*) *образует седловую точку функции Лагранжа* $L(x, \lambda)$.

Следствие

Сильная теорема двойственности справедлива для задач выпуклого программирования.

Перейти к доказательству

Сильная двойственность

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, когда оптимальные значения целевых функций в прямой и двойственной задачах совпадают.

Теорема (сильная теорема двойственности)

Если x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно прямой (1) *и двойственной* (2) *задач, то $w(\lambda^*) = f(x^*)$ тогда и только тогда, когда пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.*

Следствие

Сильная теорема двойственности справедлива для задач выпуклого программирования.

Перейти к доказательству

Пример вычисления двойственной функции Лагранжа

Решить оптимизационную задачу

$$
\begin{aligned}
x_1^2 - x_1 + x_2^2 &\to \min,\\
2x_1 + 4x_2 &\le -1,
\end{aligned}
$$

предварительно решив двойственную задачу.

Пример вычисления двойственной функции Лагранжа

Решить оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_1 + x_2^2 &\to \min, \\ 2x_1 + 4x_2 &\le -1, \end{aligned}$$

предварительно решив двойственную задачу.

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции

  $$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$

  выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа

  $$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:
$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
  $$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
  выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
  $$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
  $$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
  выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
  $$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
  $$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
  выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
  $$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
  $$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
  выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
  $$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
  $$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
  выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
  $$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
  $$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
  выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
  $$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Здесь $S = \mathbb{R}^2$ и обе функции
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$
выпуклы.
- Поэтому функция Лагранжа
$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$
- имеет седловую точку (x^*, λ^*) и $f(x^*) = w(\lambda^*)$.
- Минимум по x функции $L(x, \lambda)$ найдем из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2 - \lambda_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\lambda_1.$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Подставляя $x_1 = 1/2 - \lambda_1$ и $x_2 = -2\lambda_1$ в выражение для $L(x,\lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$,
- получим двойственную функцию

$$\begin{aligned} w(\lambda_1) &= (1/2-\lambda_1)^2 - (1/2-\lambda_1) + 4\lambda_1^2 \\ &\quad +2\lambda_1(1/2-\lambda_1) - 8\lambda_1^2 + \lambda_1 \\ &= -5\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1/4. \end{aligned}$$

- Как и должно быть, двойственная функция вогнута. Ее максимум найдем из условия:

$$w'(\lambda_1) = -10\lambda_1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^* = 1/5.$$

- Откуда

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1/2 - \lambda_1^* = 1/2 - 1/5 = 3/10, \\ x_2^* &= -2\lambda_1^* = -2/5. \end{aligned}$$

□

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Подставляя $x_1 = 1/2 - \lambda_1$ и $x_2 = -2\lambda_1$ в выражение для $L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$,
- получим двойственную функцию

$$
\begin{aligned}
w(\lambda_1) &= (1/2 - \lambda_1)^2 - (1/2 - \lambda_1) + 4\lambda_1^2 \\
&\quad +2\lambda_1(1/2 - \lambda_1) - 8\lambda_1^2 + \lambda_1 \\
&= -5\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1/4.
\end{aligned}
$$

- Как и должно быть, двойственная функция вогнута. Ее максимум найдем из условия:

$$w'(\lambda_1) = -10\lambda_1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^* = 1/5.$$

- Откуда

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 1/2 - \lambda_1^* = 1/2 - 1/5 = 3/10, \\
x_2^* &= -2\lambda_1^* = -2/5.
\end{aligned}
$$

□

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Подставляя $x_1 = 1/2 - \lambda_1$ и $x_2 = -2\lambda_1$ в выражение для $L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$,
- получим двойственную функцию

$$\begin{aligned} w(\lambda_1) &= (1/2 - \lambda_1)^2 - (1/2 - \lambda_1) + 4\lambda_1^2 \\ &\quad +2\lambda_1(1/2 - \lambda_1) - 8\lambda_1^2 + \lambda_1 \\ &= -5\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1/4. \end{aligned}$$

- Как и должно быть, двойственная функция вогнута. Ее максимум найдем из условия:

$$w'(\lambda_1) = -10\lambda_1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^* = 1/5.$$

- Откуда

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1/2 - \lambda_1^* = 1/2 - 1/5 = 3/10, \\ x_2^* &= -2\lambda_1^* = -2/5. \end{aligned}$$

□

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Подставляя $x_1 = 1/2 - \lambda_1$ и $x_2 = -2\lambda_1$ в выражение для $L(x,\lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$,
- получим двойственную функцию

$$\begin{aligned} w(\lambda_1) &= (1/2-\lambda_1)^2 - (1/2-\lambda_1) + 4\lambda_1^2 \\ &\quad +2\lambda_1(1/2-\lambda_1) - 8\lambda_1^2 + \lambda_1 \\ &= -5\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1/4. \end{aligned}$$

- Как и должно быть, двойственная функция вогнута. Ее максимум найдем из условия:

$$w'(\lambda_1) = -10\lambda_1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^* = 1/5.$$

- Откуда

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1/2 - \lambda_1^* = 1/2 - 1/5 = 3/10, \\ x_2^* &= -2\lambda_1^* = -2/5. \end{aligned}$$

Вычисление двойств. функции Лагранжа: решение

- Подставляя $x_1 = 1/2 - \lambda_1$ и $x_2 = -2\lambda_1$ в выражение для $L(x,\lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$,
- получим двойственную функцию

$$\begin{aligned} w(\lambda_1) &= (1/2-\lambda_1)^2 - (1/2-\lambda_1) + 4\lambda_1^2 \\ &\quad +2\lambda_1(1/2-\lambda_1) - 8\lambda_1^2 + \lambda_1 \\ &= -5\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1/4. \end{aligned}$$

- Как и должно быть, двойственная функция вогнута. Ее максимум найдем из условия:

$$w'(\lambda_1) = -10\lambda_1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^* = 1/5.$$

- Откуда

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1/2 - \lambda_1^* = 1/2 - 1/5 = 3/10, \\ x_2^* &= -2\lambda_1^* = -2/5. \end{aligned}$$

□

План лекции

1. Двойственность Лагранжа
   - Двойственная функция Лагранжа
   - Слабая и сильная двойственность
   - Разрыв двойственности
2. Экономическая интерпретация ланранжевой двойственности
   - Два сценария
   - Интерпретация слабой и сильной теорем двойственности

Разрыв двойственности

- В тех случаях, когда сильная теорема двойственности не выполняется, говорят, что имеет место *разрыв двойственности*,
- величина которого равна $f(x^*) - w(\lambda^*)$, где x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно
- прямой $(\min\{f(x) : \; g_i(x) \le 0, \quad i \in I; \; x \in S\})$,
- и двойственной $\left(\max\{w(\lambda) : \; \lambda \in \mathbb{R}^m_+\}\right)$ задач.
- К сожалению, разрыв двойственности присущ очень многим важным классам оптимизационных задач.
- Как правило, задачи с разрывом двоственности очень трудны с вычислительной точки зрения.
- В частности, разрыв двойственности имеет место в з-чах целочисленного программирования (когда $S \subseteq \mathbb{Z}^n$).

Разрыв двойственности

- В тех случаях, когда сильная теорема двойственности не выполняется, говорят, что имеет место *разрыв двойственности*,
- величина которого равна $f(x^*) - w(\lambda^*)$, где x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно
- прямой $(\min\{f(x) : \ g_i(x) \le 0, \quad i \in I;\ x \in S\})$,
- и двойственной $\left(\max\{w(\lambda) : \ \lambda \in \mathbb{R}^m_+\}\right)$ задач.
- К сожалению, разрыв двойственности присущ очень многим важным классам оптимизационных задач.
- Как правило, задачи с разрывом двоственности очень трудны с вычислительной точки зрения.
- В частности, разрыв двойственности имеет место в з-чах целочисленного программирования (когда $S \subseteq \mathbb{Z}^n$).

Разрыв двойственности

- В тех случаях, когда сильная теорема двойственности не выполняется, говорят, что имеет место *разрыв двойственности*,
- величина которого равна $f(x^*) - w(\lambda^*)$, где x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно
- прямой $(\min\{f(x) : \ g_i(x) \le 0, \quad i \in I; \ x \in S\})$,
- и двойственной $(\max\{w(\lambda) : \ \lambda \in \mathbb{R}^m_+\})$ задач.
- К сожалению, разрыв двойственности присущ очень многим важным классам оптимизационных задач.
- Как правило, задачи с разрывом двоственности очень трудны с вычислительной точки зрения.
- В частности, разрыв двойственности имеет место в з-чах целочисленного программирования (когда $S \subseteq \mathbb{Z}^n$).

Разрыв двойственности

- В тех случаях, когда сильная теорема двойственности не выполняется, говорят, что имеет место *разрыв двойственности*,
- величина которого равна $f(x^*) - w(\lambda^*)$, где x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно
- прямой $(\min\{f(x) : \ g_i(x) \le 0, \quad i \in I; \ x \in S\})$,
- и двойственной $\left(\max\{w(\lambda) : \ \lambda \in \mathbb{R}^m_+\}\right)$ задач.
- К сожалению, разрыв двойственности присущ очень многим важным классам оптимизационных задач.
- Как правило, задачи с разрывом двоственности очень трудны с вычислительной точки зрения.
- В частности, разрыв двойственности имеет место в з-чах целочисленного программирования (когда $S \subseteq \mathbb{Z}^n$).

Разрыв двойственности

- В тех случаях, когда сильная теорема двойственности не выполняется, говорят, что имеет место *разрыв двойственности*,
- величина которого равна $f(x^*) - w(\lambda^*)$, где x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно
- прямой $(\min\{f(x) : \ g_i(x) \le 0, \quad i \in I;\ x \in S\})$,
- и двойственной $\left(\max\{w(\lambda) : \ \lambda \in \mathbb{R}^m_+\}\right)$ задач.
- К сожалению, разрыв двойственности присущ очень многим важным классам оптимизационных задач.
- Как правило, задачи с разрывом двоственности очень трудны с вычислительной точки зрения.
- В частности, разрыв двойственности имеет место в з-чах целочисленного программирования (когда $S \subseteq \mathbb{Z}^n$).

Разрыв двойственности

- В тех случаях, когда сильная теорема двойственности не выполняется, говорят, что имеет место *разрыв двойственности*,
- величина которого равна $f(x^*) - w(\lambda^*)$, где x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно
- прямой $(\min\{f(x) : \ g_i(x) \le 0, \quad i \in I; \ x \in S\})$,
- и двойственной $\left(\max\{w(\lambda) : \ \lambda \in \mathbb{R}^m_+\}\right)$ задач.
- К сожалению, разрыв двойственности присущ очень многим важным классам оптимизационных задач.
- Как правило, задачи с разрывом двойственности очень трудны с вычислительной точки зрения.
- В частности, разрыв двойственности имеет место в з-чах целочисленного программирования (когда $S \subseteq \mathbb{Z}^n$).

Разрыв двойственности

- В тех случаях, когда сильная теорема двойственности не выполняется, говорят, что имеет место *разрыв двойственности*,
- величина которого равна $f(x^*) - w(\lambda^*)$, где x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно
- прямой $(\min\{f(x) : g_i(x) \le 0, \quad i \in I;\ x \in S\})$,
- и двойственной $\left(\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^m_+\}\right)$ задач.
- К сожалению, разрыв двойственности присущ очень многим важным классам оптимизационных задач.
- Как правило, задачи с разрывом двоственности очень трудны с вычислительной точки зрения.
- В частности, разрыв двойственности имеет место в з-чах целочисленного программирования (когда $S \subseteq \mathbb{Z}^n$).

Пример задачи с разрывом двойственности

Вычислить разрыв двойственности для следующей оптимизационной задачи:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 &\to \min,\\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\ge 3,\\
x_1, x_2, x_3 &\in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

Вернуться к решению

Пример задачи с разрывом двойственности

Вычислить разрыв двойственности для следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\to \min, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 3, \\ x_1, x_2, x_3 &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Вернуться к решению

Решение примера о разрыве двойственности

- Здесь $S = \{0,1\}^3$ и
$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3, \quad g_1(x) = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3.$$
- Поэтому функция Лагранжа имеет следующий вид:
$$L(x,\lambda) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \lambda(3 - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3).$$
- Теперь запишем двойственную функцию
$$w(\lambda) = \min_{x\in\{0,1\}^3} L(x,\lambda) = \min_{1\le i\le 8} w_i(\lambda),$$
- где векторы x^i и функции $w_i(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} L(x^i,\lambda)$ следующие:

i	x^i	$w_i(\lambda)$
1	$(0,0,0)$	3λ
2	$(0,0,1)$	3
3	$(0,1,0)$	$1+\lambda$
4	$(0,1,1)$	$4-2\lambda$
5	$(1,0,0)$	$2+\lambda$
6	$(1,0,1)$	$5-2\lambda$
7	$(1,1,0)$	$3-\lambda$
8	$(1,1,1)$	$6-4\lambda$

Решение примера о разрыве двойственности

- Здесь $S = \{0,1\}^3$ и
$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3, \quad g_1(x) = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3.$$
- Поэтому функция Лагранжа имеет следующий вид:
$$L(x,\lambda) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \lambda(3 - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3).$$
- Теперь запишем двойственную функцию
$$w(\lambda) = \min_{x\in\{0,1\}^3} L(x,\lambda) = \min_{1\le i\le 8} w_i(\lambda),$$
- где векторы x^i и функции $w_i(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} L(x^i,\lambda)$ следующие:

i	x^i	$w_i(\lambda)$
1	$(0,0,0)$	3λ
2	$(0,0,1)$	3
3	$(0,1,0)$	$1+\lambda$
4	$(0,1,1)$	$4-2\lambda$
5	$(1,0,0)$	$2+\lambda$
6	$(1,0,1)$	$5-2\lambda$
7	$(1,1,0)$	$3-\lambda$
8	$(1,1,1)$	$6-4\lambda$

Решение примера о разрыве двойственности

- Здесь $S = \{0,1\}^3$ и
$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3, \quad g_1(x) = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3.$$
- Поэтому функция Лагранжа имеет следующий вид:
$$L(x,\lambda) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \lambda(3 - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3).$$
- Теперь запишем двойственную функцию
$$w(\lambda) = \min_{x\in\{0,1\}^3} L(x,\lambda) = \min_{1\le i\le 8} w_i(\lambda),$$
- где векторы x^i и функции $w_i(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} L(x^i,\lambda)$ следующие:

i	x^i	$w_i(\lambda)$
1	$(0,0,0)$	3λ
2	$(0,0,1)$	3
3	$(0,1,0)$	$1+\lambda$
4	$(0,1,1)$	$4-2\lambda$
5	$(1,0,0)$	$2+\lambda$
6	$(1,0,1)$	$5-2\lambda$
7	$(1,1,0)$	$3-\lambda$
8	$(1,1,1)$	$6-4\lambda$

Решение примера о разрыве двойственности

- Здесь $S = \{0,1\}^3$ и
$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3, \quad g_1(x) = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3.$$
- Поэтому функция Лагранжа имеет следующий вид:
$$L(x,\lambda) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \lambda(3 - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3).$$
- Теперь запишем двойственную функцию
$$w(\lambda) = \min_{x\in\{0,1\}^3} L(x,\lambda) = \min_{1\le i\le 8} w_i(\lambda),$$
- где векторы x^i и функции $w_i(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} L(x^i,\lambda)$ следующие:

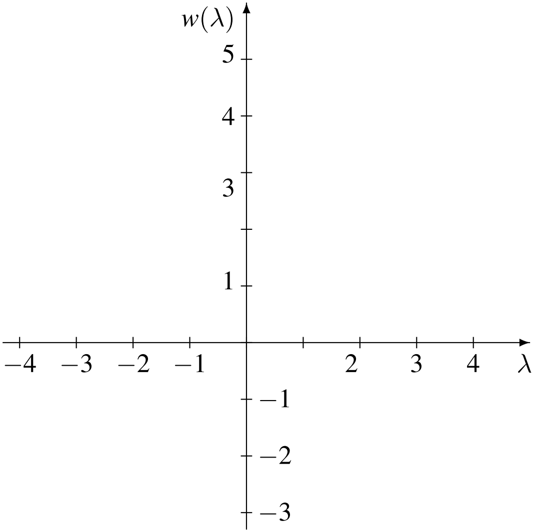
i	x^i	$w_i(\lambda)$
1	$(0,0,0)$	3λ
2	$(0,0,1)$	3
3	$(0,1,0)$	$1+\lambda$
4	$(0,1,1)$	$4-2\lambda$
5	$(1,0,0)$	$2+\lambda$
6	$(1,0,1)$	$5-2\lambda$
7	$(1,1,0)$	$3-\lambda$
8	$(1,1,1)$	$6-4\lambda$

Решение примера о разрыве двойственности

- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.

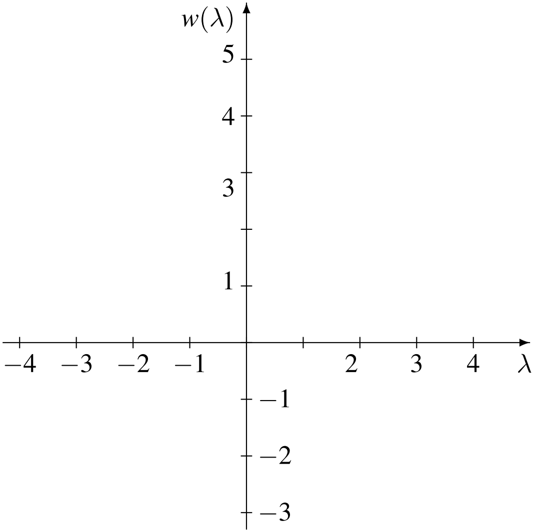
Решение примера о разрыве двойственности

- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



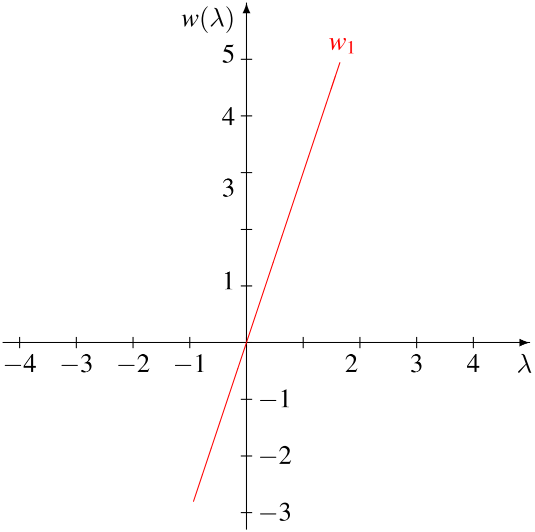
Решение примера о разрыве двойственности

- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



Решение примера о разрыве двойственности

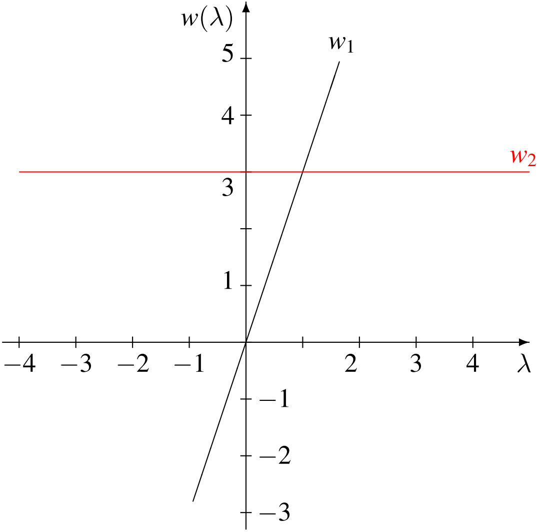
- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



$w_1(\lambda) = 3\lambda$

Решение примера о разрыве двойственности

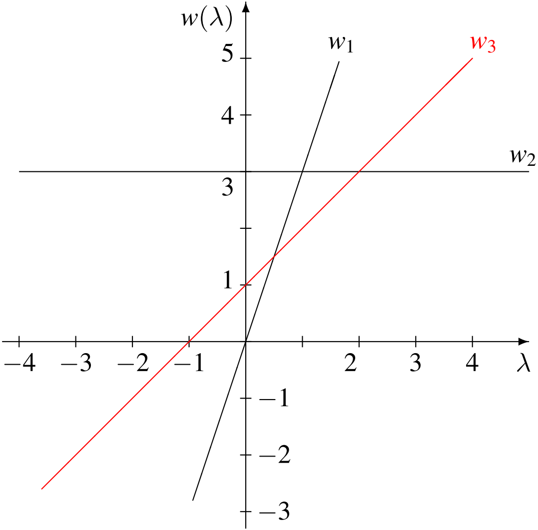
- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



$w_2(\lambda) = 3$

Решение примера о разрыве двойственности

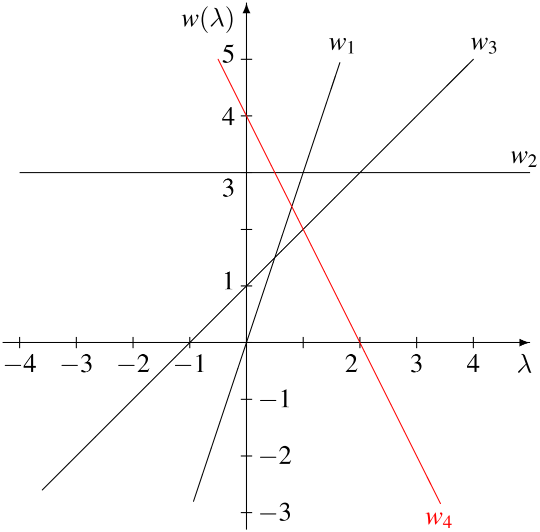
- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



$w_3(\lambda) = 1 + \lambda$

Решение примера о разрыве двойственности

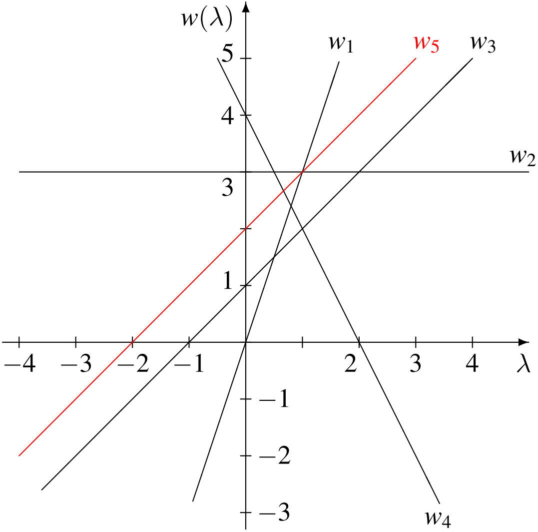
- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



$w_4(\lambda) = 4 - 2\lambda$

Решение примера о разрыве двойственности

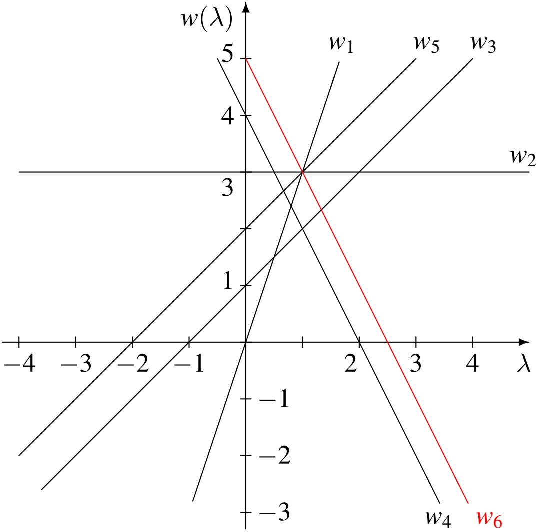
- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



$w_5(\lambda) = 2 + \lambda$

Решение примера о разрыве двойственности

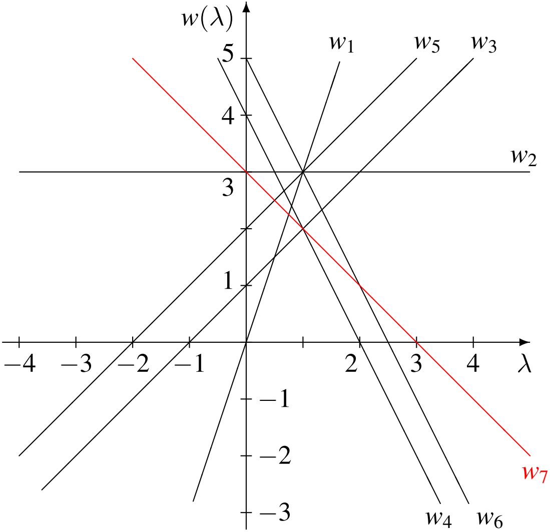
- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



$w_6(\lambda) = 5 - 2\lambda$

Решение примера о разрыве двойственности

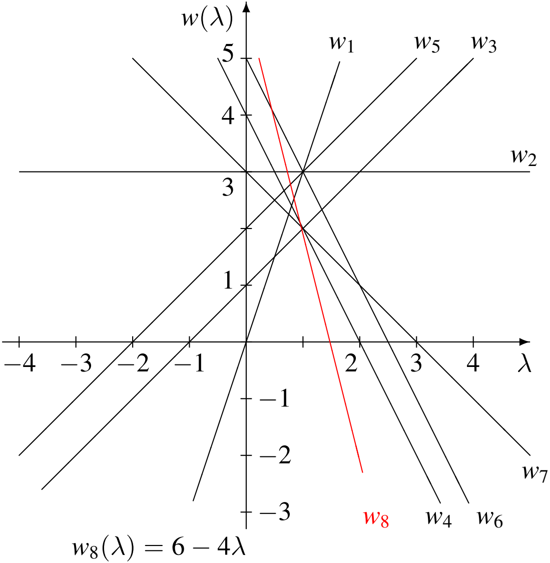
- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



$w_7(\lambda) = 3 - \lambda$

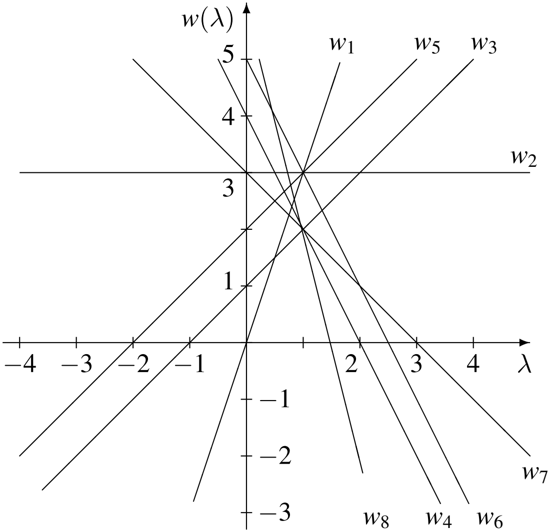
Решение примера о разрыве двойственности

- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



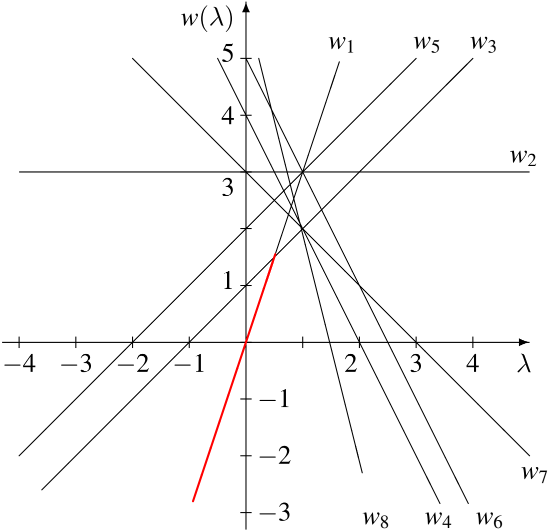
Решение примера о разрыве двойственности

- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



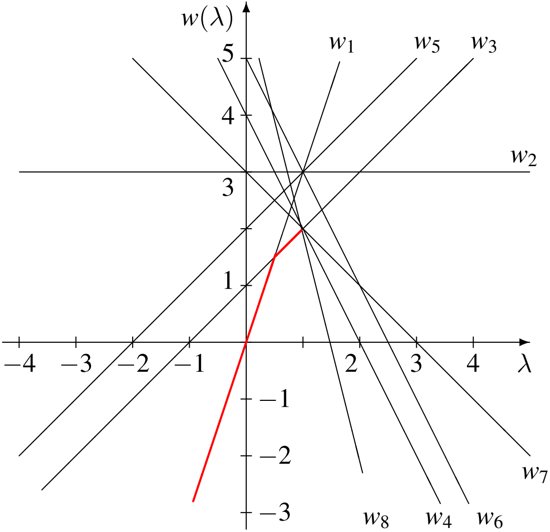
Решение примера о разрыве двойственности

- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



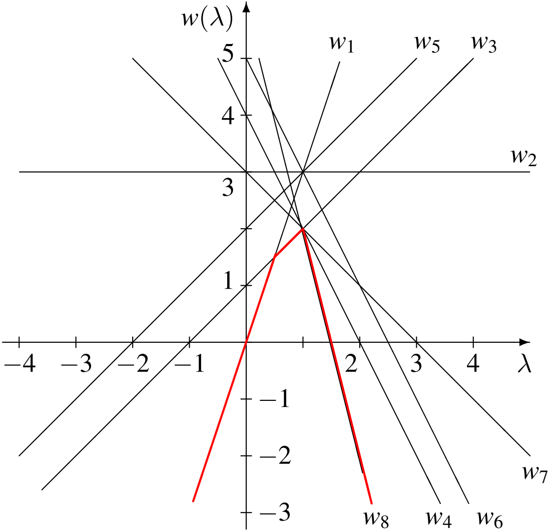
Решение примера о разрыве двойственности

- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



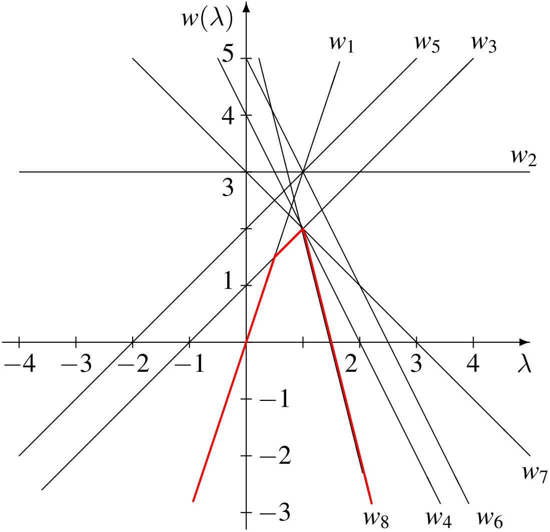
Решение примера о разрыве двойственности

- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



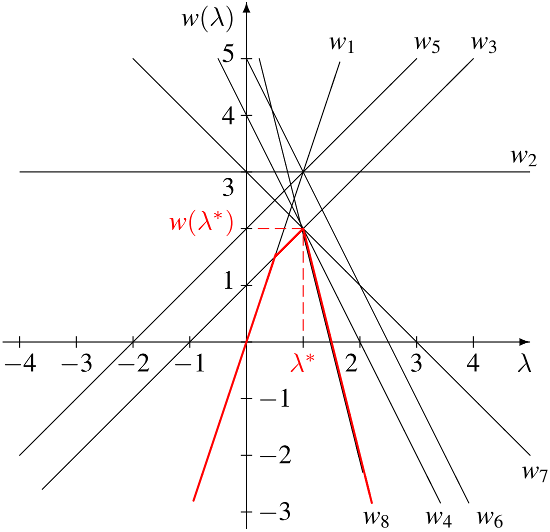
Решение примера о разрыве двойственности

- Построим график ф-ции $w(\lambda)$.
- Рисуем графики функций $w_i(\lambda)$.
- Строим нижнюю огибающую этих восьми прямых.
- Это и есть график функции $w(\lambda)$.



Решение примера о разрыве двойственности

- В точке λ^* максимума функции $w(\lambda)$ пересекаются графики функций $w_3(\lambda)$ и $w_8(\lambda)$.



Решение примера о разрыве двойственности

- Из уравнения $w_3(\lambda) = w_8(\lambda)$ найдем λ^*:
$$1 + \lambda = 6 - 4\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = 1.$$
- Теперь вычислим $w(\lambda^*) = w_3(\lambda^*) = 1 + \lambda^* = 2$.
- В нашей задаче — два оптимальных решения: $x^* = (1, 1, 0)$ и $x^0 = (0, 0, 1)$ с $f(x^*) = f(x^0) = 3$.
- Поэтому разрыв двойственности для этой задачи равен $f(x^*) - w(\lambda^*) = 3 - 2 = 1 > 0$. □

Решение примера о разрыве двойственности

- Из уравнения $w_3(\lambda) = w_8(\lambda)$ найдем λ^*:
$$1 + \lambda = 6 - 4\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = 1.$$
- Теперь вычислим $w(\lambda^*) = w_3(\lambda^*) = 1 + \lambda^* = 2.$
- В нашей задаче — два оптимальных решения: $x^* = (1, 1, 0)$ и $x^0 = (0, 0, 1)$ с $f(x^*) = f(x^0) = 3.$
- Поэтому разрыв двойственности для этой задачи равен $f(x^*) - w(\lambda^*) = 3 - 2 = 1 > 0.$ □

Решение примера о разрыве двойственности

- Из уравнения $w_3(\lambda) = w_8(\lambda)$ найдем λ^*:
$$1 + \lambda = 6 - 4\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = 1.$$
- Теперь вычислим $w(\lambda^*) = w_3(\lambda^*) = 1 + \lambda^* = 2$.
- В нашей задаче — два оптимальных решения: $x^* = (1, 1, 0)$ и $x^0 = (0, 0, 1)$ с $f(x^*) = f(x^0) = 3$.
- Поэтому разрыв двойственности для этой задачи равен $f(x^*) - w(\lambda^*) = 3 - 2 = 1 > 0$. □

Решение примера о разрыве двойственности

- Из уравнения $w_3(\lambda) = w_8(\lambda)$ найдем λ^*:
$$1 + \lambda = 6 - 4\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = 1.$$
- Теперь вычислим $w(\lambda^*) = w_3(\lambda^*) = 1 + \lambda^* = 2$.
- В нашей задаче — два оптимальных решения: $x^* = (1, 1, 0)$ и $x^0 = (0, 0, 1)$ с $f(x^*) = f(x^0) = 3$.
- Поэтому разрыв двойственности для этой задачи равен $f(x^*) - w(\lambda^*) = 3 - 2 = 1 > 0$. $\square$

План лекции

1. Двойственность Лагранжа
   - Двойственная функция Лагранжа
   - Слабая и сильная двойственность
   - Разрыв двойственности
2. Экономическая интерпретация ланранжевой двойственности
   - Два сценария
   - Интерпретация слабой и сильной теорем двойственности

Основной сценарий

- Пусть вектор x описывает операционный план фирмы,
- а $f(x) = -c(x)$, где $c(x)$ есть чистая прибыль фирмы, использующей план x.
- Неравенства $g_i(x) = r_i(x) - b_i \le 0$, $i \in I = \{1, \dots, m\}$ — представляют ограничения на ресурсы (труд, электроэнергию, складские помещения и т. д.), или выражают лимиты, установленные регулирующими органами (например, на выброс парниковых газов).
- Чтобы найти план x^*, приносящий наибольшую прибыль, нужно решить оптимизационную задачу

$$\min\{f(x) : \ g_i(x) \le 0, \quad i \in I; \ x \in S\},$$

где включение $x \in S$ представляет другие (нересурсные) ограничения.

Основной сценарий

- Пусть вектор x описывает операционный план фирмы,
- а $f(x) = -c(x)$, где $c(x)$ есть чистая прибыль фирмы, использующей план x.
- Неравенства $g_i(x) = r_i(x) - b_i \le 0$, $i \in I = \{1, \dots, m\}$ — представляют ограничения на ресурсы (труд, электроэнергию, складские помещения и т. д.), или выражают лимиты, установленные регулирующими органами (например, на выброс парниковых газов).
- Чтобы найти план x^*, приносящий наибольшую прибыль, нужно решить оптимизационную задачу

$$\min\{f(x) : \ g_i(x) \le 0, \quad i \in I; \ x \in S\},$$

где включение $x \in S$ представляет другие (нересурсные) ограничения.

Основной сценарий

- Пусть вектор x описывает операционный план фирмы,
- а $f(x) = -c(x)$, где $c(x)$ есть чистая прибыль фирмы, использующей план x.
- Неравенства $g_i(x) = r_i(x) - b_i \leq 0$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$ — представляют ограничения на ресурсы (труд, электроэнергию, складские помещения и т. д.), или выражают лимиты, установленные регулирующими органами (например, на выброс парниковых газов).
- Чтобы найти план x^*, приносящий наибольшую прибыль, нужно решить оптимизационную задачу

$$\min\{f(x) : \; g_i(x) \leq 0, \quad i \in I; \; x \in S\},$$

где включение $x \in S$ представляет другие (нересурсные) ограничения.

Основной сценарий

- Пусть вектор x описывает операционный план фирмы,
- а $f(x) = -c(x)$, где $c(x)$ есть чистая прибыль фирмы, использующей план x.
- Неравенства $g_i(x) = r_i(x) - b_i \le 0$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$ — представляют ограничения на ресурсы (труд, электроэнергию, складские помещения и т. д.), или выражают лимиты, установленные регулирующими органами (например, на выброс парниковых газов).
- Чтобы найти план x^*, приносящий наибольшую прибыль, нужно решить оптимизационную задачу
$$\min\{f(x) : \ g_i(x) \le 0, \quad i \in I; \ x \in S\},$$
где включение $x \in S$ представляет другие (нересурсные) ограничения.

Альтернативный сценарий

- Теперь ресурсные ограничения могут нарушаться за определенную плату. Пусть $\lambda_i \geq 0$ есть *цена* ресурса i:
  - если имеется перерасход ресурса i, $g_i(x) > 0$, то фирма платит за ресурс сумму $\lambda_i g_i(x)$;
  - если ресурс i не используется полностью, $g_i(x) < 0$, то фирма получает сумму $-\lambda_i g_i(x)$.
- Скажем, если неравенство $g_i(x) \leq 0$ задает ограничение на складские помещения, то λ_i — это стоимость одного квадратного метра складских помещений; фирма может как арендовать дополнительные площади, так и сама сдавать в аренду неиспользуемые складские помещения.
- В этом новом сценарии суммарные издержки фирмы, использующей план x, равны $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$.

Альтернативный сценарий

- Теперь ресурсные ограничения могут нарушаться за определенную плату. Пусть $\lambda_i \geq 0$ есть *цена* ресурса i:
  - если имеется перерасход ресурса i, $g_i(x) > 0$, то фирма платит за ресурс сумму $\lambda_i g_i(x)$;
  - если ресурс i не используется полностью, $g_i(x) < 0$, то фирма получает сумму $-\lambda_i g_i(x)$.
- Скажем, если неравенство $g_i(x) \leq 0$ задает ограничение на складские помещения, то λ_i — это стоимость одного квадратного метра складских помещений; фирма может как арендовать дополнительные площади, так и сама сдавать в аренду неиспользуемые складские помещения.
- В этом новом сценарии суммарные издержки фирмы, использующей план x, равны $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$.

Альтернативный сценарий

- Теперь ресурсные ограничения могут нарушаться за определенную плату. Пусть $\lambda_i \geq 0$ есть *цена* ресурса i:
  - если имеется перерасход ресурса i, $g_i(x) > 0$, то фирма платит за ресурс сумму $\lambda_i g_i(x)$;
  - если ресурс i не используется полностью, $g_i(x) < 0$, то фирма получает сумму $-\lambda_i g_i(x)$.
- Скажем, если неравенство $g_i(x) \leq 0$ задает ограничение на складские помещения, то λ_i — это стоимость одного квадратного метра складских помещений; фирма может как арендовать дополнительные площади, так и сама сдавать в аренду неиспользуемые складские помещения.
- В этом новом сценарии суммарные издержки фирмы, использующей план x, равны $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$.

Альтернативный сценарий

- Теперь ресурсные ограничения могут нарушаться за определенную плату. Пусть $\lambda_i \ge 0$ есть *цена* ресурса i:
  - если имеется перерасход ресурса i, $g_i(x) > 0$, то фирма платит за ресурс сумму $\lambda_i g_i(x)$;
  - если ресурс i не используется полностью, $g_i(x) < 0$, то фирма получает сумму $-\lambda_i g_i(x)$.
- Скажем, если неравенство $g_i(x) \le 0$ задает ограничение на складские помещения, то λ_i — это стоимость одного квадратного метра складских помещений; фирма может как арендовать дополнительные площади, так и сама сдавать в аренду неиспользуемые складские помещения.
- В этом новом сценарии суммарные издержки фирмы, использующей план x, равны $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$.

Альтернативный сценарий

- Теперь ресурсные ограничения могут нарушаться за определенную плату. Пусть $\lambda_i \geq 0$ есть *цена* ресурса i:
  - если имеется перерасход ресурса i, $g_i(x) > 0$, то фирма платит за ресурс сумму $\lambda_i g_i(x)$;
  - если ресурс i не используется полностью, $g_i(x) < 0$, то фирма получает сумму $-\lambda_i g_i(x)$.
- Скажем, если неравенство $g_i(x) \leq 0$ задает ограничение на складские помещения, то λ_i — это стоимость одного квадратного метра складских помещений; фирма может как арендовать дополнительные площади, так и сама сдавать в аренду неиспользуемые складские помещения.
- В этом новом сценарии суммарные издержки фирмы, использующей план x, равны $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$.

Альтернативный сценарий

- Скажем, если неравенство $g_i(x) \le 0$ задает ограничение на складские помещения, то λ_i — это стоимость одного квадратного метра складских помещений; фирма может как арендовать дополнительные площади, так и сама сдавать в аренду неиспользуемые складские помещения.
- В этом новом сценарии суммарные издержки фирмы, использующей план x, равны $L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$.
- Стремясь минимизировать издержки, фирма находит свой оптимальный план $x(\lambda)$, решая задачу
$$w(\lambda) = \min\{L(x,\lambda) : \ x \in S\}.$$
- Это значит, что значение $-w(\lambda)$ есть оптимальная прибыль фирмы при ценах на ресурсы, заданных вектором λ.

Альтернативный сценарий

- Скажем, если неравенство $g_i(x) \le 0$ задает ограничение на складские помещения, то λ_i — это стоимость одного квадратного метра складских помещений; фирма может как арендовать дополнительные площади, так и сама сдавать в аренду неиспользуемые складские помещения.
- В этом новом сценарии суммарные издержки фирмы, использующей план x, равны $L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$.
- Стремясь минимизировать издержки, фирма находит свой оптимальный план $x(\lambda)$, решая задачу
$$w(\lambda) = \min\{L(x,\lambda) : x \in S\}.$$
- Это значит, что значение $-w(\lambda)$ есть оптимальная прибыль фирмы при ценах на ресурсы, заданных вектором λ.

План лекции

1. Двойственность Лагранжа
   - Двойственная функция Лагранжа
   - Слабая и сильная двойственность
   - Разрыв двойственности
2. Экономическая интерпретация ланранжевой двойственности
   - Два сценария
   - Интерпретация слабой и сильной теорем двойственности

Интерпретация слабой теоремы двойственности

Используя представленную выше интерпретацию, мы можем перефразировать слабую теорему двойственности следующим образом:

Утверждение

1. *при любых ценах на ресурсы оптимальная прибыль фирмы в ситуации, когда разрешено продавать и покупать ресурсы, не меньше оптимальной прибыли фирмы в ситуации, когда покупать и продавать ресурсы нельзя;*
2. *величину разрыва двойственности можно интерпретировать как наименьшую возможную выгоду (при самых неблагоприятных ценах на ресурсы), которую может получить фирма, от возможности покупать и продавать ресурсы.*

Интерпретация слабой теоремы двойственности

Используя представленную выше интерпретацию, мы можем перефразировать слабую теорему двойственности следующим образом:

Утверждение

1. *при любых ценах на ресурсы оптимальная прибыль фирмы в ситуации, когда разрешено продавать и покупать ресурсы, не меньше оптимальной прибыли фирмы в ситуации, когда покупать и продавать ресурсы нельзя;*
2. *величину разрыва двойственности можно интерпретировать как наименьшую возможную выгоду (при самых неблагоприятных ценах на ресурсы), которую может получить фирма, от возможности покупать и продавать ресурсы.*

Интерпретация слабой теоремы двойственности

Используя представленную выше интерпретацию, мы можем перефразировать слабую теорему двойственности следующим образом:

Утверждение

1. *при любых ценах на ресурсы оптимальная прибыль фирмы в ситуации, когда разрешено продавать и покупать ресурсы, не меньше оптимальной прибыли фирмы в ситуации, когда покупать и продавать ресурсы нельзя;*
2. *величину разрыва двойственности можно интерпретировать как наименьшую возможную выгоду (при самых неблагоприятных ценах на ресурсы), которую может получить фирма, от возможности покупать и продавать ресурсы.*

Интерпретация сильной теоремы двойственности

- Пусть справедлива сильная теорема двойственности и $f(x^*) = w(\lambda^*)$, где λ^* есть оптимальное решение двойственной задачи $\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^m\}$.
- В таком случае λ^* можно интерпретировать как вектор цен ресурсов, при которых фирма не получает выгоды от покупки и продажи ресурсов.
- Поэтому компоненты вектора λ^* называют *теневыми ценами* ресурсов.
- При выполнении сильной теоремы двойственности должно выполняться условие дополняющей нежесткости

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

- из которого следует, что

Утверждение

теневые цены не полностью использованных ресурсов равны нулю.

Интерпретация сильной теоремы двойственности

- Пусть справедлива сильная теорема двойственности и $f(x^*) = w(\lambda^*)$, где λ^* есть оптимальное решение двойственной задачи $\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^m\}$.
- В таком случае λ^* можно интерпретировать как вектор цен ресурсов, при которых фирма не получает выгоды от покупки и продажи ресурсов.
- Поэтому компоненты вектора λ^* называют *теневыми ценами* ресурсов.
- При выполнении сильной теоремы двойственности должно выполняться условие дополняющей нежесткости

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

- из которого следует, что

Утверждение

теневые цены не полностью использованных ресурсов равны нулю.

Интерпретация сильной теоремы двойственности

- Пусть справедлива сильная теорема двойственности и $f(x^*) = w(\lambda^*)$, где λ^* есть оптимальное решение двойственной задачи $\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^m\}$.
- В таком случае λ^* можно интерпретировать как вектор цен ресурсов, при которых фирма не получает выгоды от покупки и продажи ресурсов.
- Поэтому компоненты вектора λ^* называют *теневыми ценами* ресурсов.
- При выполнении сильной теоремы двойственности должно выполняться условие дополняющей нежесткости

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

- из которого следует, что

Утверждение

теневые цены не полностью использованных ресурсов равны нулю.

Интерпретация сильной теоремы двойственности

- Пусть справедлива сильная теорема двойственности и $f(x^*) = w(\lambda^*)$, где λ^* есть оптимальное решение двойственной задачи $\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^m\}$.
- В таком случае λ^* можно интерпретировать как вектор цен ресурсов, при которых фирма не получает выгоды от покупки и продажи ресурсов.
- Поэтому компоненты вектора λ^* называют *теневыми ценами* ресурсов.
- При выполнении сильной теоремы двойственности должно выполняться условие дополняющей нежесткости
$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
- из которого следует, что

Утверждение

теневые цены не полностью использованных ресурсов равны нулю.

Интерпретация сильной теоремы двойственности

- Пусть справедлива сильная теорема двойственности и $f(x^*) = w(\lambda^*)$, где λ^* есть оптимальное решение двойственной задачи $\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^m\}$.
- В таком случае λ^* можно интерпретировать как вектор цен ресурсов, при которых фирма не получает выгоды от покупки и продажи ресурсов.
- Поэтому компоненты вектора λ^* называют *теневыми ценами* ресурсов.
- При выполнении сильной теоремы двойственности должно выполняться условие дополняющей нежесткости

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

- из которого следует, что

Утверждение

теневые цены не полностью использованных ресурсов равны нулю.

Док-во сильной теоремы двойств.: необходимость

- Если $w(\lambda^*) = f(x^*)$, то
- $$f(x^*) = w(\lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) \le L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*).$$
- Откуда $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \ge 0$.
- Но поскольку все слагаемые в левой части этого неравенства неположительны ($\lambda_i^* \ge 0$, $g_i(x^*) \le 0$),
- то справедливы равенства: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m$.
- Теперь из теоремы о св-вах седл. точек следует, что пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Ланранжа.

Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: необходимость

- Если $w(\lambda^*) = f(x^*)$, то
- $$f(x^*) = w(\lambda^*) = \min_{x\in S} L(x,\lambda^*)$$
  $$\leq L(x^*,\lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*).$$
- Откуда $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \geq 0$.
- Но поскольку все слагаемые в левой части этого неравенства неположительны ($\lambda_i^* \geq 0$, $g_i(x^*) \leq 0$),
- то справедливы равенства: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1,\dots,m$.
- Теперь из теоремы о св-вах седл. точек следует, что пара (x^*,λ^*) образует седловую точку функции Ланранжа.

Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: необходимость

- Если $w(\lambda^*) = f(x^*)$, то
- $$f(x^*) = w(\lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*)$$
  $$\le L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*).$$
- Откуда $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \ge 0$.
- Но поскольку все слагаемые в левой части этого неравенства неположительны ($\lambda_i^* \ge 0$, $g_i(x^*) \le 0$),
- то справедливы равенства: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$.
- Теперь из теоремы о св-вах седл. точек следует, что пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Ланранжа.

Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: необходимость

- Если $w(\lambda^*) = f(x^*)$, то
- $$f(x^*) = w(\lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*)$$
  $$\leq L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*).$$
- Откуда $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) \geq 0$.
- Но поскольку все слагаемые в левой части этого неравенства неположительны ($\lambda_i^* \geq 0$, $g_i(x^*) \leq 0$),
- то справедливы равенства: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$.
- Теперь из теоремы о св-вах седл. точек следует, что пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Ланранжа.

Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: необходимость

- Если $w(\lambda^*) = f(x^*)$, то
- $$f(x^*) = w(\lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*)$$
  $$\leq L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*).$$
- Откуда $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \geq 0$.
- Но поскольку все слагаемые в левой части этого неравенства неположительны $(\lambda_i^* \geq 0,\ g_i(x^*) \leq 0)$,
- то справедливы равенства: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$.
- Теперь из теоремы о св-вах седл. точек следует, что пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Ланранжа.

Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: необходимость

- Если $w(\lambda^*) = f(x^*)$, то
- $$f(x^*) = w(\lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*).$$
- Откуда $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \geq 0$.
- Но поскольку все слагаемые в левой части этого неравенства неположительны ($\lambda_i^* \geq 0$, $g_i(x^*) \leq 0$),
- то справедливы равенства: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$.
- Теперь из теоремы о св-вах седл. точек следует, что пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Ланранжа.

Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: необходимость

- Если $w(\lambda^*) = f(x^*)$, то
- $$f(x^*) = w(\lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*).$$
- Откуда $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \geq 0$.
- Но поскольку все слагаемые в левой части этого неравенства неположительны $(\lambda_i^* \geq 0,\ g_i(x^*) \leq 0)$,
- то справедливы равенства: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m$.
- Теперь из теоремы о св-вах седл. точек следует, что пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Ланранжа.

Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: необходимость

- Если $w(\lambda^*) = f(x^*)$, то
- $$f(x^*) = w(\lambda^*) = \min_{x\in S} L(x,\lambda^*)$$
  $$\leq L(x^*,\lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*).$$
- Откуда $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \geq 0$.
- Но поскольку все слагаемые в левой части этого неравенства неположительны ($\lambda_i^* \geq 0$, $g_i(x^*) \leq 0$),
- то справедливы равенства: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1,\dots,m.$
- Теперь из теоремы о св-вах седл. точек следует, что пара (x^*,λ^*) образует седловую точку функции Ланранжа.

Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: необходимость

- Если $w(\lambda^*) = f(x^*)$, то
- $$f(x^*) = w(\lambda^*) = \min_{x\in S} L(x, \lambda^*) \le L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*).$$
- Откуда $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \ge 0$.
- Но поскольку все слагаемые в левой части этого неравенства неположительны ($\lambda_i^* \ge 0$, $g_i(x^*) \le 0$),
- то справедливы равенства: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$
- Теперь из теоремы о св-вах седл. точек следует, что пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Ланранжа.

Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: достаточность

- Если (x^*, λ^*) — седловая точка функции Лагранжа,
- то по ▸ теореме Лагранжа точка x^* является оптимальным решением прямой задачи (1),
- а в силу ▸ теоремы о св-вах седл. точек справедливы равенства:

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)$$

$$= L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) = w(\lambda^*).$$

- Поскольку $w(\lambda^*) = f(x^*) \geq w(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$,
- то λ^* — оптимальное решение двойственной задачи (2).

◂ Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: достаточность

- Если (x^*, λ^*) — седловая точка функции Лагранжа,
- то по ▸ теореме Лагранжа точка x^* является оптимальным решением прямой задачи (1),
- а в силу ▸ теоремы о св-вах седл. точек справедливы равенства:

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)$$

$$= L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) = w(\lambda^*).$$

- Поскольку $w(\lambda^*) = f(x^*) \geq w(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$,
- то λ^* — оптимальное решение двойственной задачи (2).

◂ Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: достаточность

- Если (x^*, λ^*) — седловая точка функции Лагранжа,
- то по ▸ теореме Лагранжа точка x^* является оптимальным решением прямой задачи (1),
- а в силу ▸ теоремы о св-вах седл. точек справедливы равенства:

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)$$

$$= L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) = w(\lambda^*).$$

- Поскольку $w(\lambda^*) = f(x^*) \geq w(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$,
- то λ^* — оптимальное решение двойственной задачи (2).

◂ Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: достаточность

- Если (x^*, λ^*) — седловая точка функции Лагранжа,
- то по ‣ теореме Лагранжа точка x^* является оптимальным решением прямой задачи (1),
- а в силу ‣ теоремы о св-вах седл. точек справедливы равенства:

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)$$

$$= L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) = w(\lambda^*).$$

- Поскольку $w(\lambda^*) = f(x^*) \geq w(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$,
- то λ^* — оптимальное решение двойственной задачи (2).

◂ Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: достаточность

- Если (x^*, λ^*) — седловая точка функции Лагранжа,
- то по ‣ теореме Лагранжа точка x^* является оптимальным решением прямой задачи (1),
- а в силу ‣ теоремы о св-вах седл. точек справедливы равенства:

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)$$

$$= L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) = w(\lambda^*).$$

- Поскольку $w(\lambda^*) = f(x^*) \geq w(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$,
- то λ^* — оптимальное решение двойственной задачи (2).

◂ Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: достаточность

- Если (x^*, λ^*) — седловая точка функции Лагранжа,
- то по ‣ теореме Лагранжа точка x^* является оптимальным решением прямой задачи (1),
- а в силу ‣ теоремы о св-вах седл. точек справедливы равенства:

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)$$
$$= L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) = w(\lambda^*).$$

- Поскольку $w(\lambda^*) = f(x^*) \geq w(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$,
- то λ^* — оптимальное решение двойственной задачи (2).

◂ Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: достаточность

- Если (x^*, λ^*) — седловая точка функции Лагранжа,
- то по ▸ теореме Лагранжа точка x^* является оптимальным решением прямой задачи (1),
- а в силу ▸ теоремы о св-вах седл. точек справедливы равенства:

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)$$

$$= L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) = w(\lambda^*).$$

- Поскольку $w(\lambda^*) = f(x^*) \geq w(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$,
- то λ^* — оптимальное решение двойственной задачи (2).

◂ Вернуться к формулировке

Док-во сильной теоремы двойств.: достаточность

- Если (x^*, λ^*) — седловая точка функции Лагранжа,
- то по ▸ теореме Лагранжа точка x^* является оптимальным решением прямой задачи (1),
- а в силу ▸ теоремы о св-вах седл. точек справедливы равенства:

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)$$

$$= L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^*) = w(\lambda^*).$$

- Поскольку $w(\lambda^*) = f(x^*) \geq w(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$,
- то λ^* — оптимальное решение двойственной задачи (2).

◂ Вернуться к формулировке

Свойства седловых точек

Теорема

Точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ *является седловой для функции* $L(x, \lambda)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) &= \min_{x \in S} L(x, \bar{\lambda}), \\ g_i(\bar{x}) &\leq 0, \quad i \in I, \\ \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) &= 0, \quad i \in I. \end{aligned}$$

К док-ву необходимости

К док-ву достаточности

Достаточное условие оптимальности

Теорема

Если пара $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$, то $\bar{x}$ является глобальным минимумом в задаче (1).

Вернуться к доказательству

Достаточное условие оптимальности

Теорема

Если пара $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}^m_+$ *есть седловая точка функции* $L(x, \lambda)$*, то* $\bar{x}$ *является глобальным минимумом в задаче* (1)*.*

◂ Вернуться к доказательству