Управление проектами

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2014

План лекции

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,
- контроля за выполнением этих сроков.
- Все это осложняется тем, что работы должны выполняться в заданной технологической последовательности.
- Одной из главных целей сетевого планирования является получение информации о плановых сроках выполнения отдельных работ проекта,
- что позволяет предвидеть возможные причины задержек.

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,
- контроля за выполнением этих сроков.
- Все это осложняется тем, что работы должны выполняться в заданной технологической последовательности.
- Одной из главных целей сетевого планирования является получение информации о плановых сроках выполнения отдельных работ проекта,
- что позволяет предвидеть возможные причины задержек.

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,
- контроля за выполнением этих сроков.
- Все это осложняется тем, что работы должны выполняться в заданной технологической последовательности.
- Одной из главных целей сетевого планирования является получение информации о плановых сроках выполнения отдельных работ проекта,
- что позволяет предвидеть возможные причины задержек.

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,
- контроля за выполнением этих сроков.
- Все это осложняется тем, что работы должны выполняться в заданной технологической последовательности.
- Одной из главных целей сетевого планирования является получение информации о плановых сроках выполнения отдельных работ проекта,
- что позволяет предвидеть возможные причины задержек.

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,
- контроля за выполнением этих сроков.
- Все это осложняется тем, что работы должны выполняться в заданной технологической последовательности.
- Одной из главных целей сетевого планирования является получение информации о плановых сроках выполнения отдельных работ проекта,
- что позволяет предвидеть возможные причины задержек.

Управление проектами

- Управление крупными проектами связано с решением сложных проблем планирования,
- определения сроков начала и окончания отдельных работ,
- контроля за выполнением этих сроков.
- Все это осложняется тем, что работы должны выполняться в заданной технологической последовательности.
- Одной из главных целей сетевого планирования является получение информации о плановых сроках выполнения отдельных работ проекта,
- что позволяет предвидеть возможные причины задержек.

Сетевой график

- *Сетевой график* есть орграф $G = (V, E)$, который отражает связи всеми заданиями, необходимыми для окончания проекта.
- Дуги орграфа соответствуют *работам*
- а вершины — событиям.
- *Событие* — это момент времени, когда можно пачать выполнение новых работ.
- Для каждой работы (дуги) $(i,j) \in E$ известна ее продолжительность t_{ij}.

Сетевой график

- *Сетевой график* есть орграф $G = (V, E)$, который отражает связи всеми заданиями, необходимыми для окончания проекта.
- Дуги орграфа соответствуют *работам*
- а вершины — событиям.
- *Событие* — это момент времени, когда можно начать выполнение новых работ.
- Для каждой работы (дуги) $(i,j) \in E$ известна ее продолжительность t_{ij}.

Сетевой график

- *Сетевой график* есть орграф $G = (V, E)$, который отражает связи всеми заданиями, необходимыми для окончания проекта.
- Дуги орграфа соответствуют *работам*
- а вершины — событиям.
- *Событие* — это момент времени, когда можно пачать выполнение новых работ.
- Для каждой работы (дуги) $(i,j) \in E$ известна ее продолжительность t_{ij}.

Сетевой график

- *Сетевой график* есть орграф $G = (V, E)$, который отражает связи всеми заданиями, необходимыми для окончания проекта.
- Дуги орграфа соответствуют *работам*
- а вершины — событиям.
- *Событие* — это момент времени, когда можно пачать выполнение новых работ.
- Для каждой работы (дуги) $(i,j) \in E$ известна ее продолжительность t_{ij}.

Сетевой график

- *Сетевой график* есть орграф $G = (V, E)$, который отражает связи всеми заданиями, необходимыми для окончания проекта.
- Дуги орграфа соответствуют *работам*
- а вершины — событиям.
- *Событие* — это момент времени, когда можно пачать выполнение новых работ.
- Для каждой работы (дуги) $(i, j) \in E$ известна ее продолжительность t_{ij}.

Отношения предшествования

- Направления дуг определяют *отношениями предшествования* между работами.
- На отрезке сети $(i) \xrightarrow{A} (j)$
- i-е событие должно наступить до начала работы A,
- а j-е не может наступить до окончания работы A.
- Иногда отношения предшествования между работами нельзя точно задать с помощью сети.
- Например, если работа G выполняется за работами B и C, а работа E — за работой B, но не за C.

Неправильное представл.:

Правильное представление:

Отношения предшествования

- Направления дуг определяют *отношениями предшествования* между работами.
- На отрезке сети $(i) \xrightarrow{A} (j)$
- i-е событие должно наступить до начала работы A,
- а j-е не может наступить до окончания работы A.
- Иногда отношения предшествования между работами нельзя точно задать с помощью сети.
- Например, если работа G выполняется за работами B и C, а работа E — за работой B, но не за C.

Неправильное представл.:

Правильное представление:

Отношения предшествования

- Направления дуг определяют *отношениями предшествования* между работами.
- На отрезке сети $(i) \xrightarrow{A} (j)$
- i-е событие должно наступить до начала работы A,
- а j-е не может наступить до окончания работы A.
- Иногда отношения предшествования между работами нельзя точно задать с помощью сети.
- Например, если работа G выполняется за работами B и C, а работа E — за работой B, но не за C.

Неправильное представл.:

Правильное представление:

Отношения предшествования

- Направления дуг определяют *отношениями предшествования* между работами.
- На отрезке сети $(i) \xrightarrow{A} (j)$
- i-е событие должно наступить до начала работы A,
- а j-е не может наступить до окончания работы A.
- Иногда отношения предшествования между работами нельзя точно задать с помощью сети.
- Например, если работа G выполняется за работами B и C, а работа E — за работой B, но не за C.

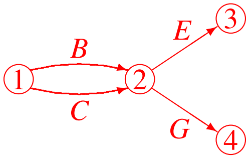
Неправильное представл.:

Правильное представление:

Отношения предшествования

- Направления дуг определяют *отношениями предшествования* между работами.
- На отрезке сети $(i) \xrightarrow{A} (j)$
- i-е событие должно наступить до начала работы A,
- а j-е не может наступить до окончания работы A.
- Иногда отношения предшествования между работами нельзя точно задать с помощью сети.
- Например, если работа G выполняется за работами B и C, а работа E — за работой B, но не за C.

Неправильное представл.:

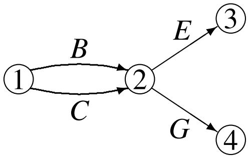


Правильное представление:

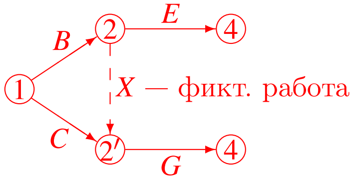
Отношения предшествования

- Направления дуг определяют *отношениями предшествования* между работами.
- На отрезке сети $(i) \xrightarrow{A} (j)$
- i-е событие должно наступить до начала работы A,
- а j-е не может наступить до окончания работы A.
- Иногда отношения предшествования между работами нельзя точно задать с помощью сети.
- Например, если работа G выполняется за работами B и C, а работа E — за работой B, но не за C.

Неправильное представл.:



Правильное представление:



Пример: описание проекта

- При сборке станка узлы 1 и 2 соединяются в узел 4,
- а объединение узлов 3 и 4 дает готовое изделие.
- Так как необходимо согласовать некоторые детали узла 3 с соответствующими деталями узла 2,
- то узел 3 нельзя собрать ранее, чем будут в наличии детали узла 2.

Пример: описание проекта

- При сборке станка узлы 1 и 2 соединяются в узел 4,
- а объединение узлов 3 и 4 дает готовое изделие.
- Так как необходимо согласовать некоторые детали узла 3 с соответствующими деталями узла 2,
- то узел 3 нельзя собрать ранее, чем будут в наличии детали узла 2.

Пример: описание проекта

- При сборке станка узлы 1 и 2 соединяются в узел 4,
- а объединение узлов 3 и 4 дает готовое изделие.
- Так как необходимо согласовать некоторые детали узла 3 с соответствующими деталями узла 2,
- то узел 3 нельзя собрать ранее, чем будут в наличии детали узла 2.

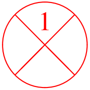
Пример: описание проекта

- При сборке станка узлы 1 и 2 соединяются в узел 4,
- а объединение узлов 3 и 4 дает готовое изделие.
- Так как необходимо согласовать некоторые детали узла 3 с соответствующими деталями узла 2,
- то узел 3 нельзя собрать ранее, чем будут в наличии детали узла 2.

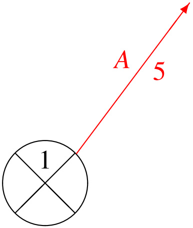
Пример: описание работ

Обозн.	Описание	Прод. (сут.)	Непоср. предш.
A	Закупка деталей узла 1	5	–
B	Закупка деталей узла 2	3	–
C	Закупка деталей узла 3	10	–
D	Изготовление узла 1	7	A
E	Изготовление узла 2	10	B
F	Изготовление узла 4	5	D, E
G	Изготовление узла 3	9	B, C
H	Окончательная сборка	4	F, G
I	Испытания	2	H

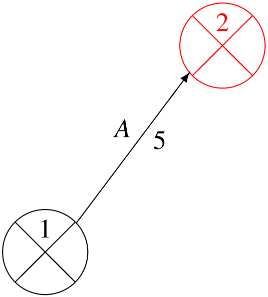
Сетевой график процесса изготовления станка



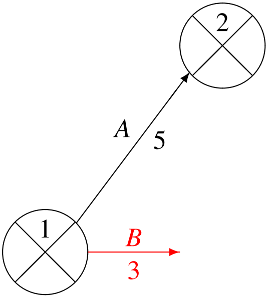
Сетевой график процесса изготовления станка



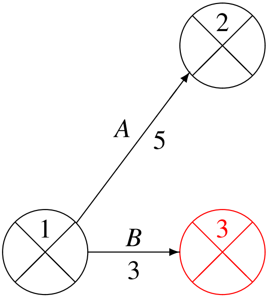
Сетевой график процесса изготовления станка



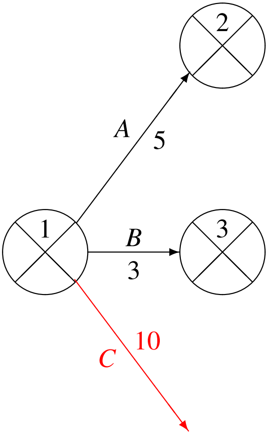
Сетевой график процесса изготовления станка



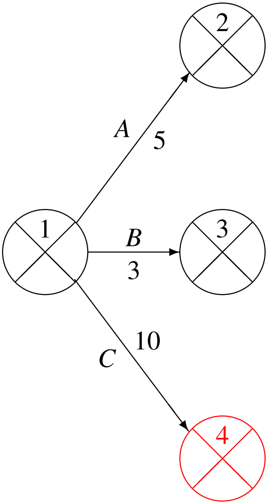
Сетевой график процесса изготовления станка



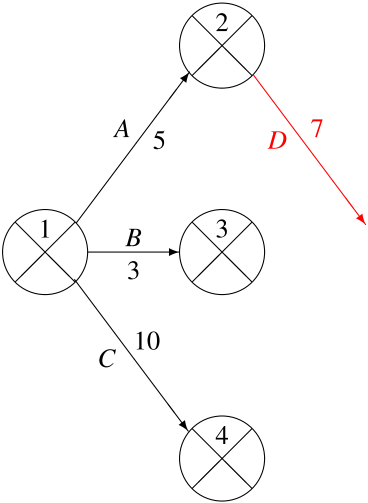
Сетевой график процесса изготовления станка



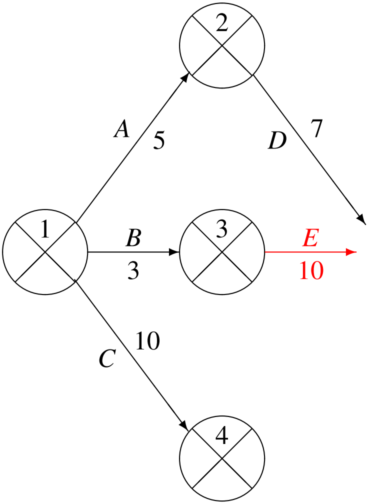
Сетевой график процесса изготовления станка



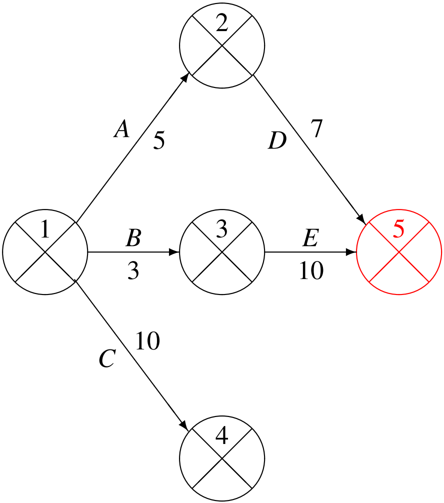
Сетевой график процесса изготовления станка



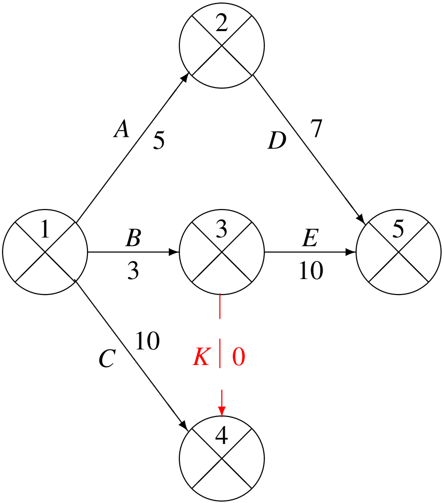
Сетевой график процесса изготовления станка



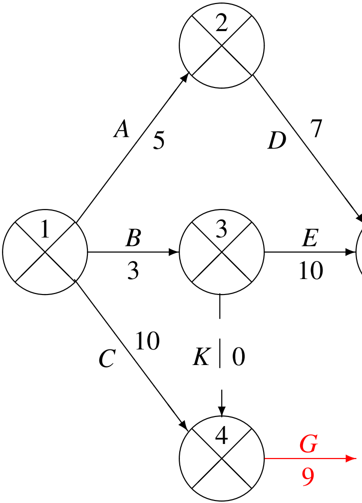
Сетевой график процесса изготовления станка



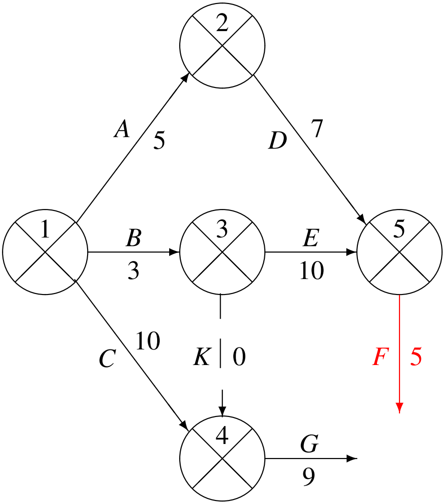
Сетевой график процесса изготовления станка



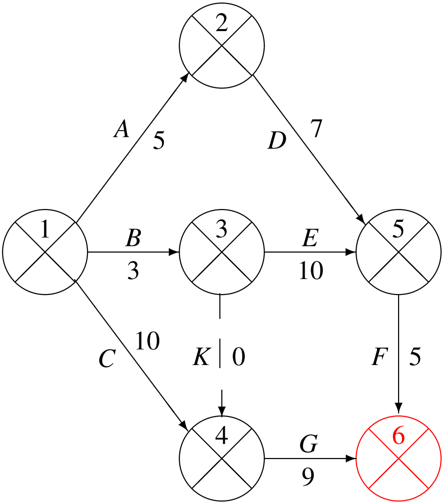
Сетевой график процесса изготовления станка



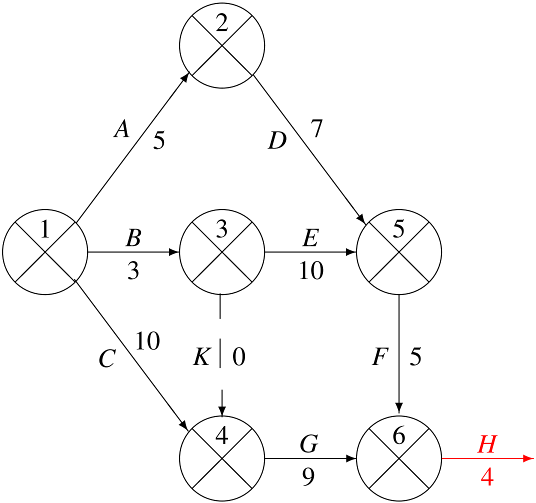
Сетевой график процесса изготовления станка



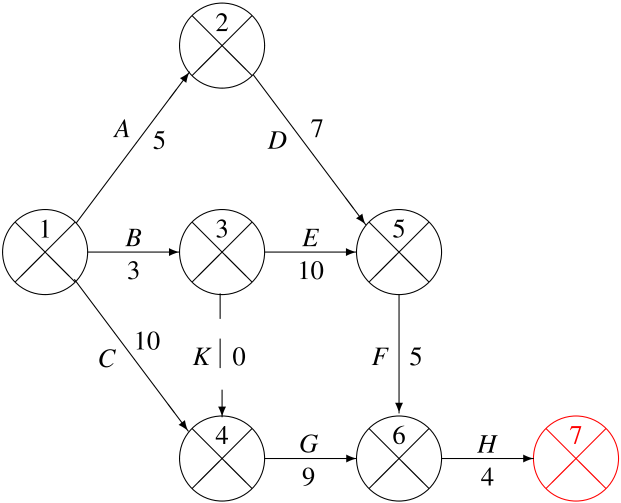
Сетевой график процесса изготовления станка



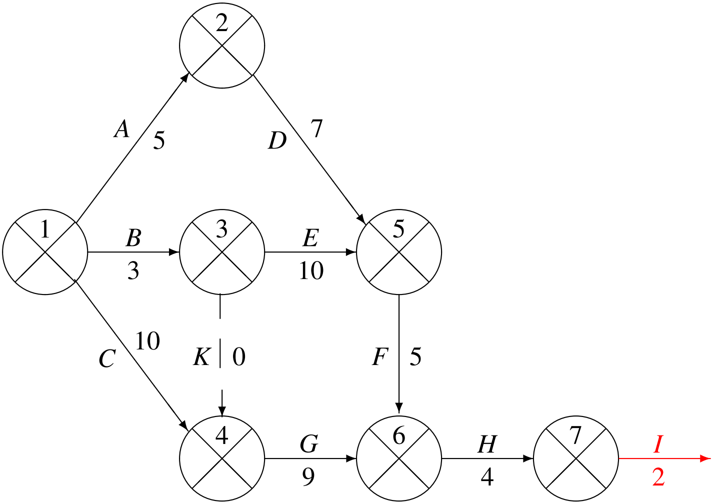
Сетевой график процесса изготовления станка



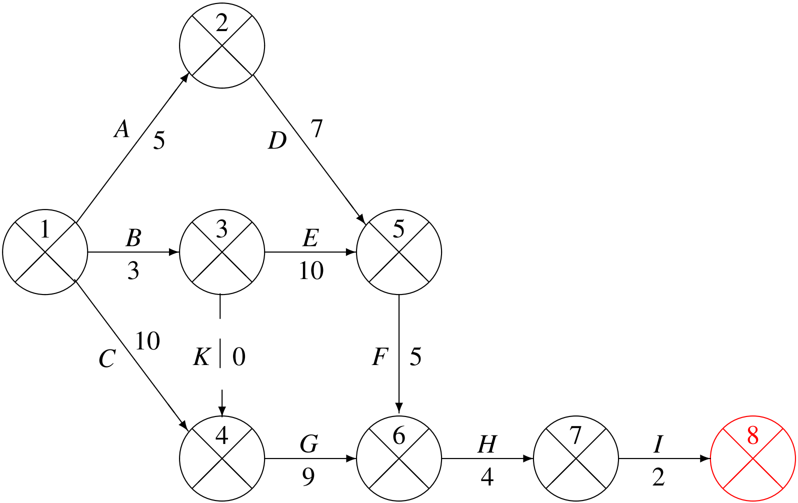
Сетевой график процесса изготовления станка



Сетевой график процесса изготовления станка



Сетевой график процесса изготовления станка



Свойства сетевых графиков

- Имеется одно начальное событие (вершина, в которую не входит ни одна дуга)
- и одно *заключительное* событие (вершина, из которой не выходит ни одна дуга).
- В графике нет циклов.
- Поэтому события можно занумеровать таким образом, что каждая дуга (работа) начинается в вершине с меньшим номером и заканчивается в вершине с большим номером.
- В дальнейшем будем считать, что $V = \{1, \ldots, n\}$ и, если $(i,j) \in E$, то $i < j$.

Свойства сетевых графиков

- Имеется одно начальное событие (вершина, в которую не входит ни одна дуга)
- и одно *заключительное* событие (вершина, из которой не выходит ни одна дуга).
- В графике нет циклов.
- Поэтому события можна занумеровать таким образом, что каждая дуга (работа) начинается в вершине с меньшим номером и заканчивается в вершине с большим номером.
- В дальнейшем будем считать, что $V = \{1, \ldots, n\}$ и, если $(i,j) \in E$, то $i < j$.

Свойства сетевых графиков

- Имеется одно начальное событие (вершина, в которую не входит ни одна дуга)
- и одно *заключительное* событие (вершина, из которой не выходит ни одна дуга).
- В графике нет циклов.
- Поэтому события можно занумеровать таким образом, что каждая дуга (работа) начинается в вершине с меньшим номером и заканчивается в вершине с большим номером.
- В дальнейшем будем считать, что $V = \{1, \ldots, n\}$ и, если $(i,j) \in E$, то $i < j$.

Свойства сетевых графиков

- Имеется одно начальное событие (вершина, в которую не входит ни одна дуга)
- и одно *заключительное* событие (вершина, из которой не выходит ни одна дуга).
- В графике нет циклов.
- Поэтому события можна занумеровать таким образом, что каждая дуга (работа) начинается в вершине с меньшим номером и заканчивается в вершине с большим номером.
- В дальнейшем будем считать, что $V = \{1, \ldots, n\}$ и, если $(i,j) \in E$, то $i < j$.

Свойства сетевых графиков

- Имеется одно начальное событие (вершина, в которую не входит ни одна дуга)
- и одно *заключительное* событие (вершина, из которой не выходит ни одна дуга).
- В графике нет циклов.
- Поэтому события можна занумеровать таким образом, что каждая дуга (работа) начинается в вершине с меньшим номером и заканчивается в вершине с большим номером.
- В дальнейшем будем считать, что $V = \{1, \dots, n\}$ и, если $(i,j) \in E$, то $i < j$.

План лекции

1. Сетевые графики
2. Метод критического пути
   - Ранние и поздние сроки наступления событий
   - Резервы времени для работ
3. Метод оценки и пересмотра планов
   - Предположения метода ПЕРТ
   - Критика ПЕРТ
4. Управление проектами при ограниченных ресурсах

Ранние сроки наступления событий

- *Ранний срок $T_j^{\text{р}}$ наступления события j* есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, $T_j^{\text{р}}$ есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг — это продолжительности работ.
- Параметры $T_j^{\text{р}}$ можно вычислить по формуле:

$$T_1^{\text{р}} = 0; \qquad T_j^{\text{р}} = \max_{(i,j)\in E} (T_i^{\text{р}} + t_{ij}), \quad j = 2, \dots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n — это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.
- Этот путь называется *критический путем*,
- а его длина $T^{\text{кр}} \stackrel{\text{def}}{=} T_n^{\text{р}}$ — *критическим временем*.

Ранние сроки наступления событий

- *Ранний срок $T_j^{\text{р}}$ наступления события* j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, $T_j^{\text{р}}$ есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг — это продолжительности работ.
- Параметры $T_j^{\text{р}}$ можно вычислить по формуле:

$$T_1^{\text{р}} = 0; \qquad T_j^{\text{р}} = \max_{(i,j)\in E} (T_i^{\text{р}} + t_{ij}), \quad j = 2, \dots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n — это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.
- Этот путь называется *критический путем*,
- а его длина $T^{\text{кр}} \stackrel{\text{def}}{=} T_n^{\text{р}}$ — *критическим временем*.

Ранние сроки наступления событий

- *Ранний срок $T_j^{\text{р}}$ наступления события j* есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, $T_j^{\text{р}}$ есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг — это продолжительности работ.
- Параметры $T_j^{\text{р}}$ можно вычислить по формуле:

$$T_1^{\text{р}} = 0; \qquad T_j^{\text{р}} = \max_{(i,j)\in E} (T_i^{\text{р}} + t_{ij}), \quad j = 2, \dots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n — это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.
- Этот путь называется *критический путем*,
- а его длина $T^{\text{кр}} \stackrel{\text{def}}{=} T_n^{\text{р}}$ — *критическим временем*.

Ранние сроки наступления событий

- *Ранний срок $T_j^{\text{р}}$ наступления события j* есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, $T_j^{\text{р}}$ есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг — это продолжительности работ.
- Параметры $T_j^{\text{р}}$ можно вычислить по формуле:

$$T_1^{\text{р}} = 0; \qquad T_j^{\text{р}} = \max_{(i,j)\in E} (T_i^{\text{р}} + t_{ij}), \quad j = 2, \dots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n — это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.
- Этот путь называется *критический путем*,
- а его длина $T^{\text{кр}} \stackrel{\text{def}}{=} T_n^{\text{р}}$ — *критическим временем*.

Ранние сроки наступления событий

- *Ранний срок $T_j^{\text{р}}$ наступления события* j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, $T_j^{\text{р}}$ есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг — это продолжительности работ.
- Параметры $T_j^{\text{р}}$ можно вычислить по формуле:

$$T_1^{\text{р}} = 0; \qquad T_j^{\text{р}} = \max_{(i,j)\in E} (T_i^{\text{р}} + t_{ij}), \quad j = 2, \dots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n — это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.
- Этот путь называется *критический путем*,
- а его длина $T^{\text{кр}} \stackrel{\text{def}}{=} T_n^{\text{р}}$ — *критическим временем*.

Ранние сроки наступления событий

- *Ранний срок $T_j^{\text{р}}$ наступления события* j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, $T_j^{\text{р}}$ есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг — это продолжительности работ.
- Параметры $T_j^{\text{р}}$ можно вычислить по формуле:

$$T_1^{\text{р}} = 0; \qquad T_j^{\text{р}} = \max_{(i,j)\in E} (T_i^{\text{р}} + t_{ij}), \quad j = 2, \dots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n — это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.
- Этот путь называется *критический путем*,
- а его длина $T^{\text{кр}} \stackrel{\text{def}}{=} T_n^{\text{р}}$ — *критическим временем*.

Ранние сроки наступления событий

- *Ранний срок $T^{\text{р}}_j$ наступления события* j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, $T^{\text{р}}_j$ есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг — это продолжительности работ.
- Параметры $T^{\text{р}}_j$ можно вычислить по формуле:

$$T^{\text{р}}_1 = 0; \qquad T^{\text{р}}_j = \max_{(i,j)\in E} (T^{\text{р}}_i + t_{ij}), \quad j = 2, \dots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n — это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.
- Этот путь называется *критический путем,*
- а его длина $T^{\text{кр}} \stackrel{\text{def}}{=} T^{\text{р}}_n$ — *критическим временем.*

Ранние сроки наступления событий

- *Ранний срок* $T_j^{\text{р}}$ *наступления события* j есть ранний срок окончания всех работ, которые лежат на путях между начальным событием 1 и событием j.
- Таким образом, $T_j^{\text{р}}$ есть максимальная длина пути из вершины 1 в вершину j, если длины дуг — это продолжительности работ.
- Параметры $T_j^{\text{р}}$ можно вычислить по формуле:

$$T_1^{\text{р}} = 0; \qquad T_j^{\text{р}} = \max_{(i,j)\in E} (T_i^{\text{р}} + t_{ij}), \quad j = 2, \dots, n.$$

- Ранний срок наступления последнего события n — это самый ранний срок окончания всего проекта,
- который равен максимальной длине пути из начального события 1 до заключительного события n.
- Этот путь называется *критический путем*,
- а его длина $T^{\text{кр}} \stackrel{\text{def}}{=} T_n^{\text{р}}$ — *критическим временем.*

Поздние сроки наступления событий

- *Поздний срок $T_j^{\text{п}}$ наступления события j* — это наиболее поздний срок наступления события j,
- который не влияет на ранний срок окончания всего проекта в целом (критическое время).
- Чтобы не увеличить ранний срок окончания проекта, событие j должно наступить не позже, чем в момент $T_j^{\text{п}} = T^{\text{кр}} - L_{jn}$,
- где L_{jn} — максимальная длина пути из j в n.
- Мы можем вычислить параметры $T_j^{\text{п}}$ по следующей рекурентной формуле:

$$T_n^{\text{п}} = T^{\text{кр}}, \qquad T_j^{\text{п}} = \min_{(j,i)\in E}\{T_i^{\text{р}} - t_{ij}\}, \quad j = n-1,\dots,1.$$

Поздние сроки наступления событий

- *Поздний срок $T_j^{\text{п}}$ наступления события j* — это наиболее поздний срок наступления события j,
- который не влияет на ранний срок окончания всего проекта в целом (критическое время).
- Чтобы не увеличить ранний срок окончания проекта, событие j должно наступить не позже, чем в момент $T_j^{\text{п}} = T^{\text{кр}} - L_{jn}$,
- где L_{jn} — максимальная длина пути из j в n.
- Мы можем вычислить параметры $T_j^{\text{п}}$ по следующей рекурентной формуле:

$$T_n^{\text{п}} = T^{\text{кр}}, \qquad T_j^{\text{п}} = \min_{(j,i)\in E}\{T_i^{\text{р}} - t_{ij}\}, \quad j = n-1, \dots, 1.$$

Поздние сроки наступления событий

- *Поздний срок $T_j^{\text{п}}$ наступления события j* — это наиболее поздний срок наступления события j,
- который не влияет на ранний срок окончания всего проекта в целом (критическое время).
- Чтобы не увеличить ранний срок окончания проекта, событие j должно наступить не позже, чем в момент $T_j^{\text{п}} = T^{\text{кр}} - L_{jn}$,
- где L_{jn} — максимальная длина пути из j в n.
- Мы можем вычислить параметры $T_j^{\text{п}}$ по следующей рекурентной формуле:

$$T_n^{\text{п}} = T^{\text{кр}}, \qquad T_j^{\text{п}} = \min_{(j,i)\in E}\{T_i^{\text{р}} - t_{ij}\}, \quad j = n-1, \ldots, 1.$$

Поздние сроки наступления событий

- *Поздний срок* $T_j^{\text{п}}$ *наступления события* j — это наиболее поздний срок наступления события j,
- который не влияет на ранний срок окончания всего проекта в целом (критическое время).
- Чтобы не увеличить ранний срок окончания проекта, событие j должно наступить не позже, чем в момент $T_j^{\text{п}} = T^{\text{кр}} - L_{jn}$,
- где L_{jn} — максимальная длина пути из j в n.
- Мы можем вычислить параметры $T_j^{\text{п}}$ по следующей рекурентной формуле:

$$T_n^{\text{п}} = T^{\text{кр}}, \qquad T_j^{\text{п}} = \min_{(j,i)\in E}\{T_i^{\text{р}} - t_{ij}\}, \quad j = n-1,\dots,1.$$

Поздние сроки наступления событий

- *Поздний срок* $T_j^{\text{п}}$ *наступления события* j — это наиболее поздний срок наступления события j,
- который не влияет на ранний срок окончания всего проекта в целом (критическое время).
- Чтобы не увеличить ранний срок окончания проекта, событие j должно наступить не позже, чем в момент $T_j^{\text{п}} = T^{\text{кр}} - L_{jn}$,
- где L_{jn} — максимальная длина пути из j в n.
- Мы можем вычислить параметры $T_j^{\text{п}}$ по следующей рекурентной формуле:

$$T_n^{\text{п}} = T^{\text{кр}}, \qquad T_j^{\text{п}} = \min_{(j,i)\in E}\{T_i^{\text{р}} - t_{ij}\}, \quad j = n-1,\dots,1.$$

Поздние сроки наступления событий

- *Резерв времени* R_j события j — это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е.

$$R_j = T_j^{\text{п}} - T_j^{\text{р}}.$$

- Событие с нулевым резервом времени находится на критическом пути.
- Задержка наступления любого события на критическом пути приводит к задержке всего проекта.
- Наоборот, наступление события j, которое не лежит на критическом пути может быть задержано на R_j единиц времени,
- причем, это не приведет к увеличению раннего срока окончания всего проекта.

Поздние сроки наступления событий

- *Резерв времени* R_j события j — это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е.

$$R_j = T_j^{\text{п}} - T_j^{\text{р}}.$$

- Событие с нулевым резервом времени находится на критическом пути.
- Задержка наступления любого события на критическом пути приводит к задержке всего проекта.
- Наоборот, наступление события j, которое не лежит на критическом пути может быть задержано на R_j единиц времени,
- причем, это не приведет к увеличению раннего срока окончания всего проекта.

Поздние сроки наступления событий

- *Резерв времени* R_j события j — это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е.

$$R_j = T_j^{\text{п}} - T_j^{\text{р}}.$$

- Событие с нулевым резервом времени находится на критическом пути.
- Задержка наступления любого события на критическом пути приводит к задержке всего проекта.
- Наоборот, наступление события j, которое не лежит на критическом пути может быть задержано на R_j единиц времени,
- причем, это не приведет к увеличению раннего срока окончания всего проекта.

Поздние сроки наступления событий

- *Резерв времени* R_j события j — это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е.

$$R_j = T_j^{\text{п}} - T_j^{\text{р}}.$$

- Событие с нулевым резервом времени находится на критическом пути.
- Задержка наступления любого события на критическом пути приводит к задержке всего проекта.
- Наоборот, наступление события j, которое не лежит на критическом пути может быть задержано на R_j единиц времени,
- причем, это не приведет к увеличению раннего срока окончания всего проекта.

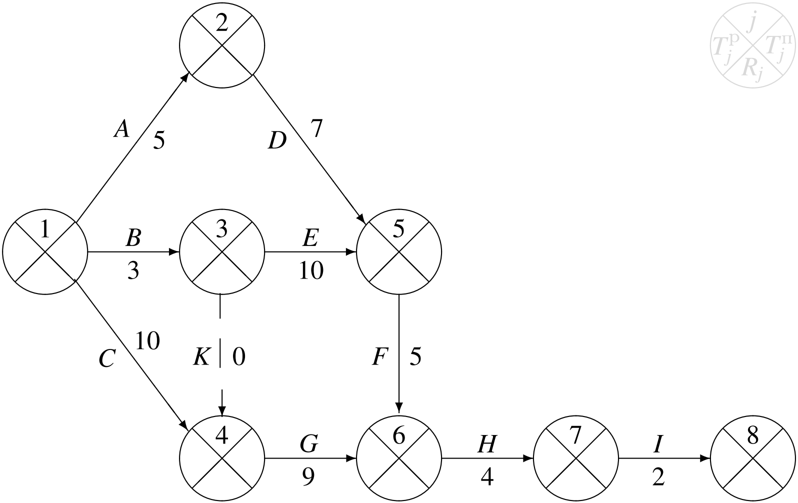
Поздние сроки наступления событий

- *Резерв времени* R_j события j — это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е.
$$R_j = T_j^{\text{п}} - T_j^{\text{р}}.$$
- Событие с нулевым резервом времени находится на критическом пути.
- Задержка наступления любого события на критическом пути приводит к задержке всего проекта.
- Наоборот, наступление события j, которое не лежит на критическом пути может быть задержано на R_j единиц времени,
- причем, это не приведет к увеличению раннего срока окончания всего проекта.

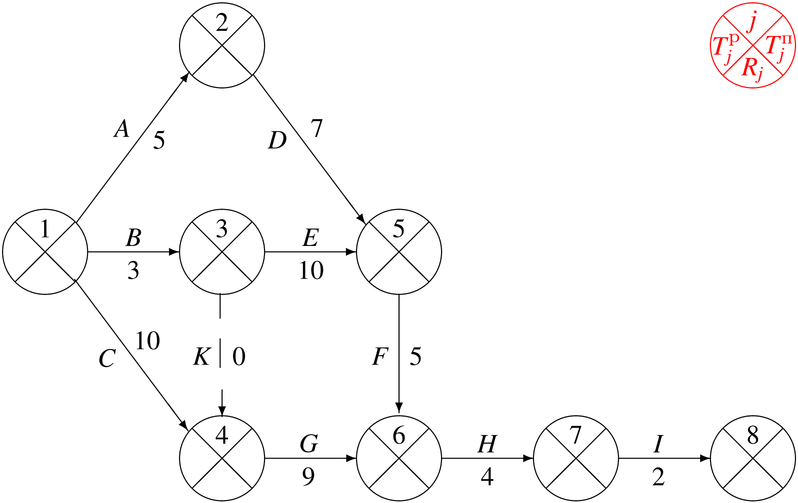
Поздние сроки наступления событий

- *Резерв времени* R_j события j — это максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения раннего срока окончания проекта, т.е.
$$R_j = T_j^{\text{п}} - T_j^{\text{р}}.$$
- Событие с нулевым резервом времени находится на критическом пути.
- Задержка наступления любого события на критическом пути приводит к задержке всего проекта.
- Наоборот, наступление события j, которое не лежит на критическом пути может быть задержано на R_j единиц времени,
- причем, это не приведет к увеличению раннего срока окончания всего проекта.

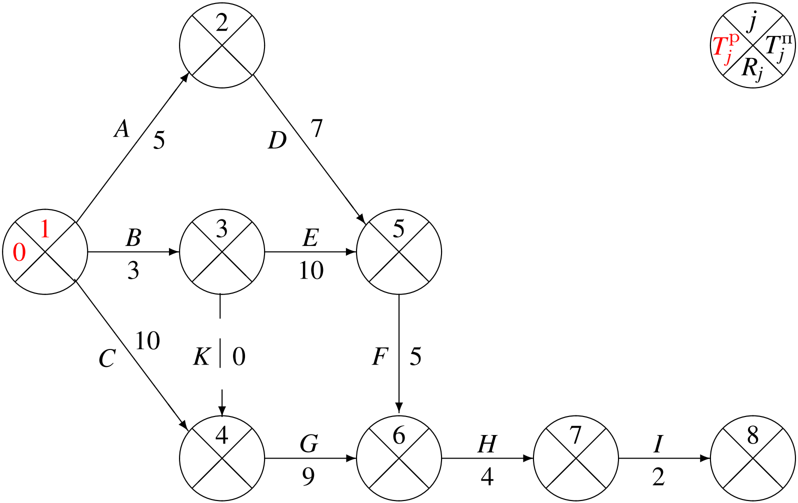
Пример: вычисление параметров сетевого графика



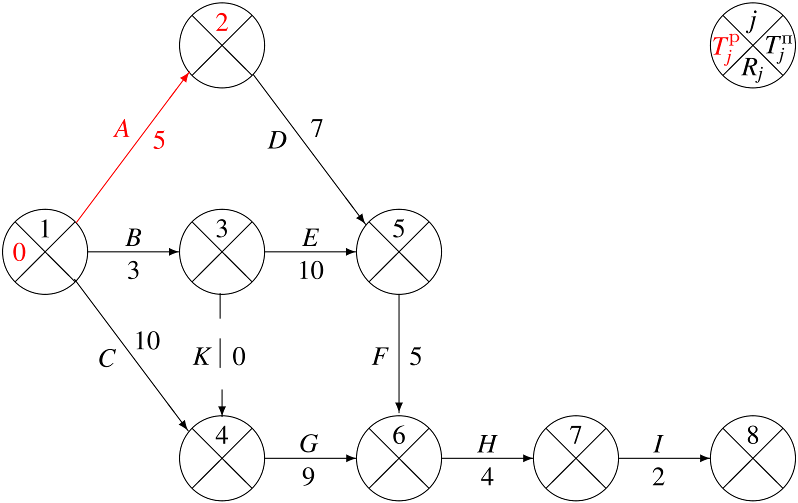
Пример: вычисление параметров сетевого графика



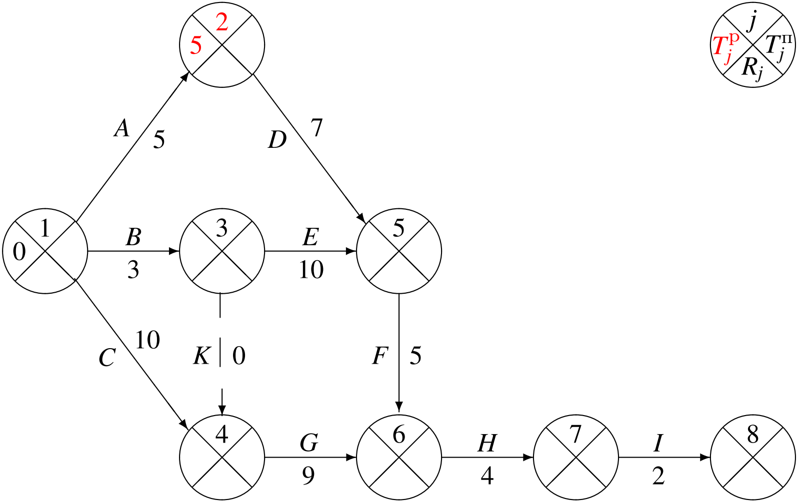
Пример: вычисление параметров сетевого графика



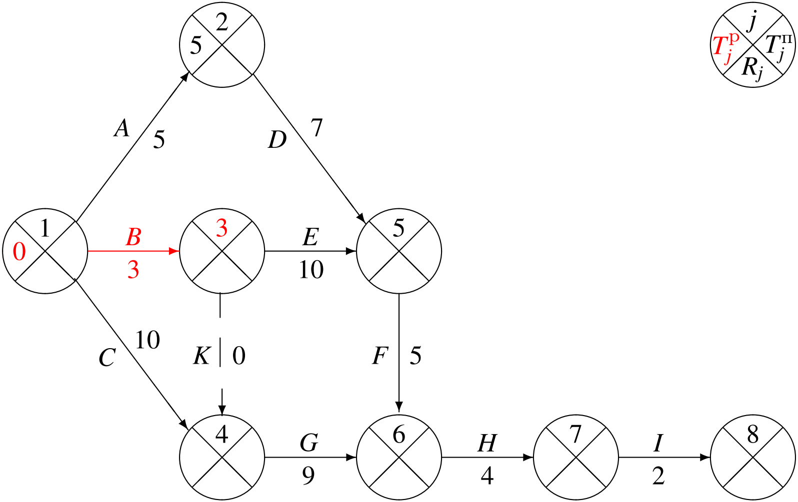
Пример: вычисление параметров сетевого графика



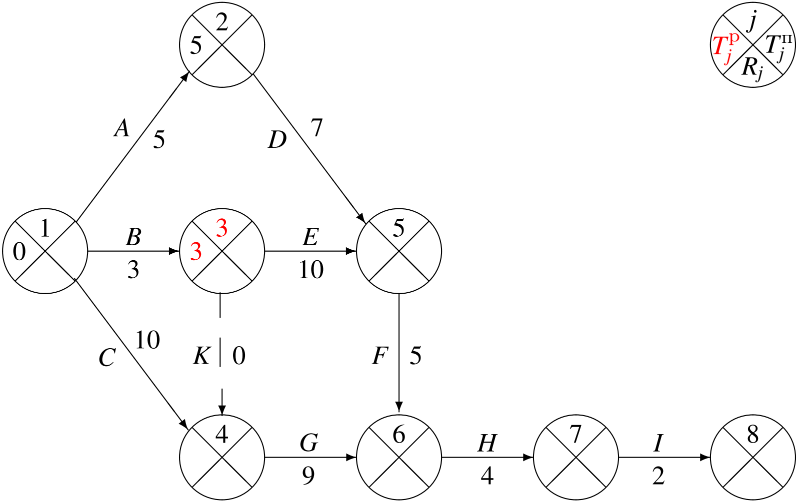
Пример: вычисление параметров сетевого графика



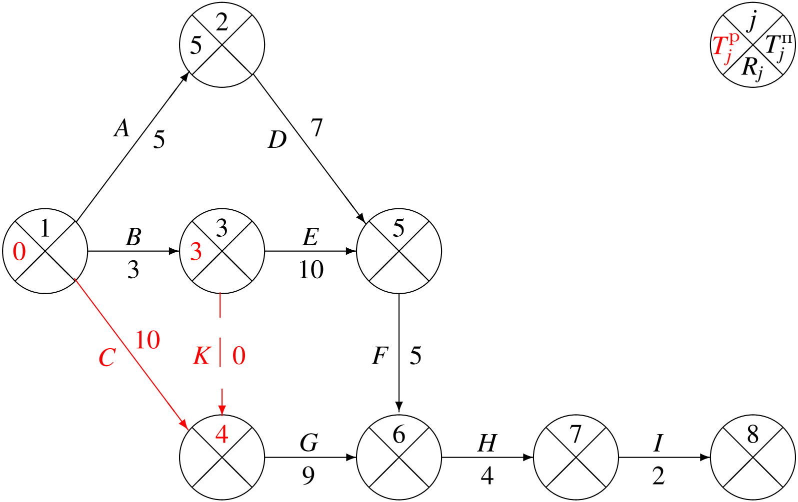
Пример: вычисление параметров сетевого графика



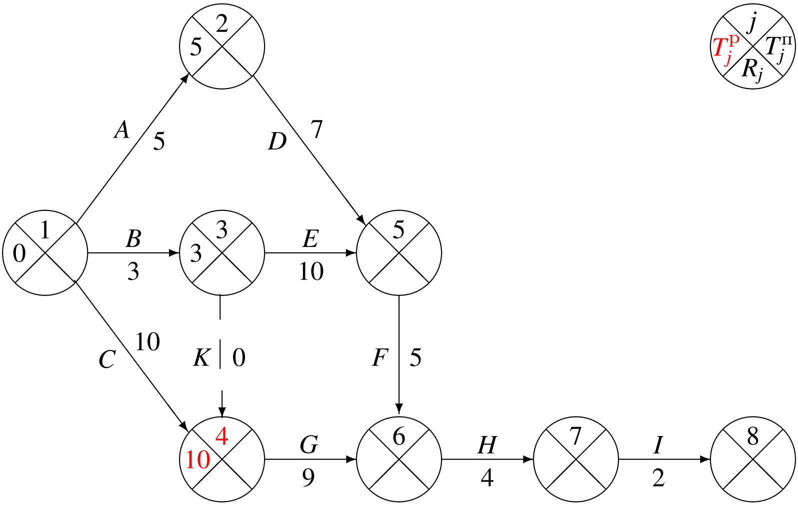
Пример: вычисление параметров сетевого графика



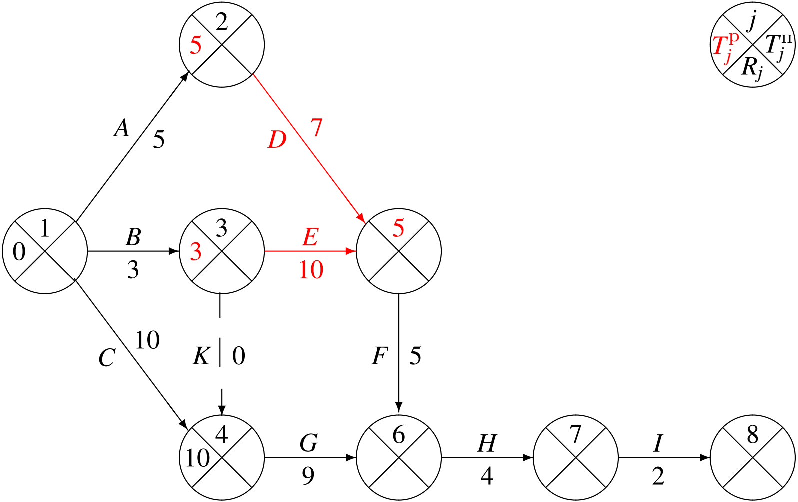
Пример: вычисление параметров сетевого графика



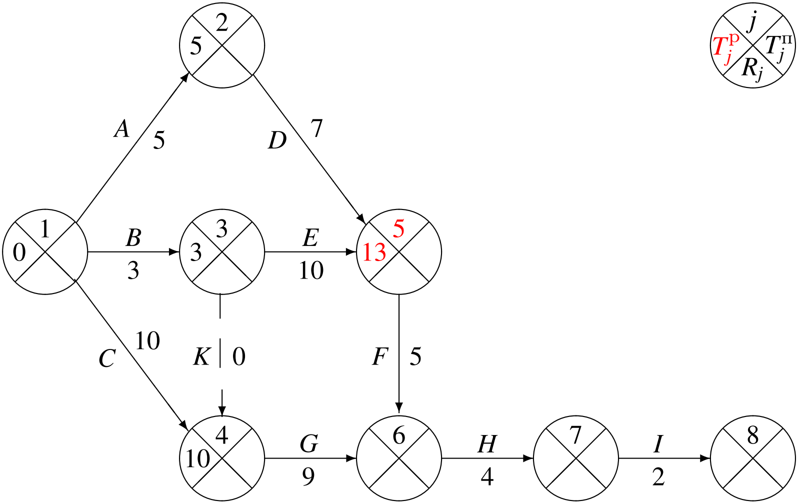
Пример: вычисление параметров сетевого графика



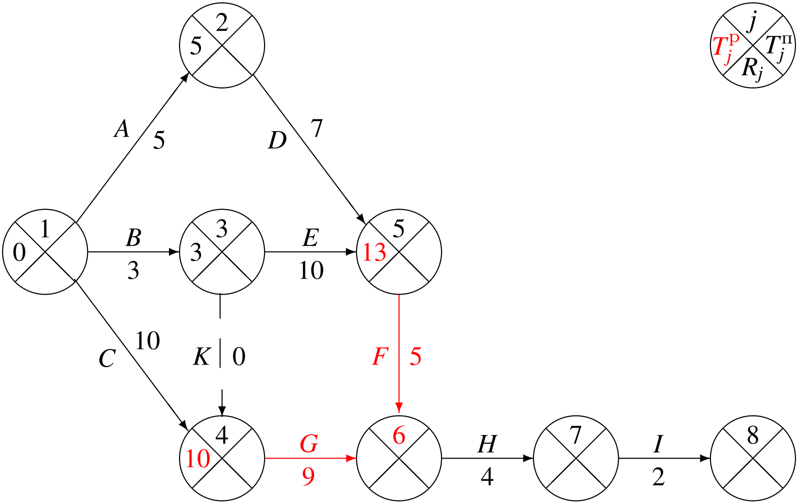
Пример: вычисление параметров сетевого графика



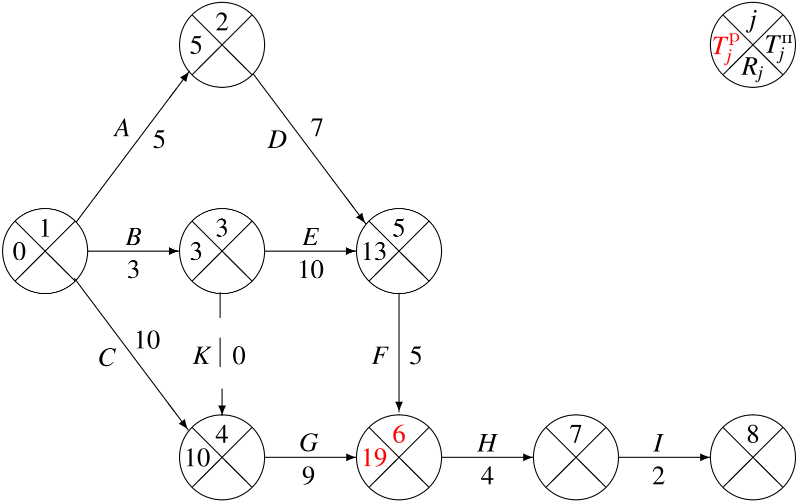
Пример: вычисление параметров сетевого графика



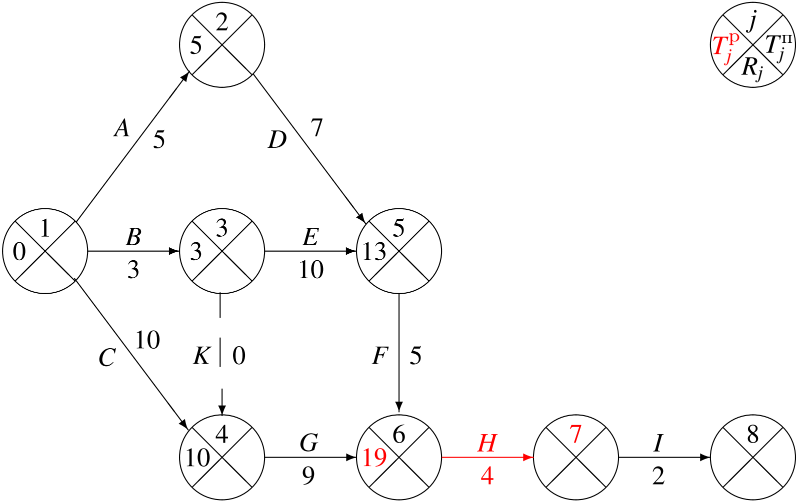
Пример: вычисление параметров сетевого графика



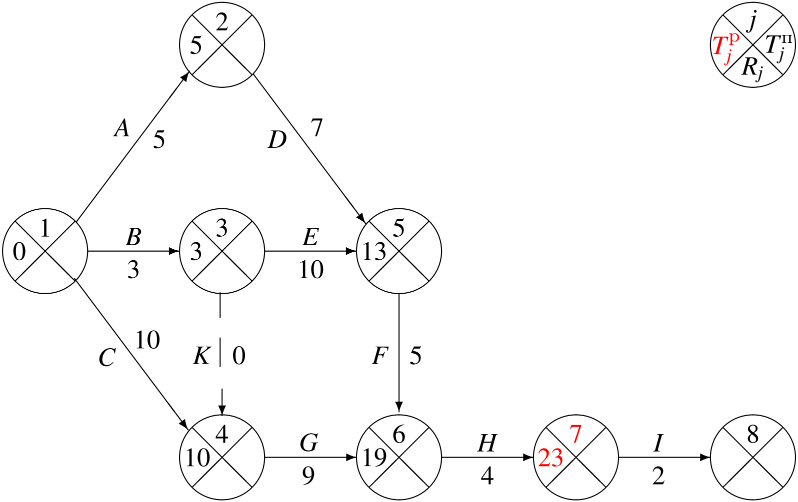
Пример: вычисление параметров сетевого графика



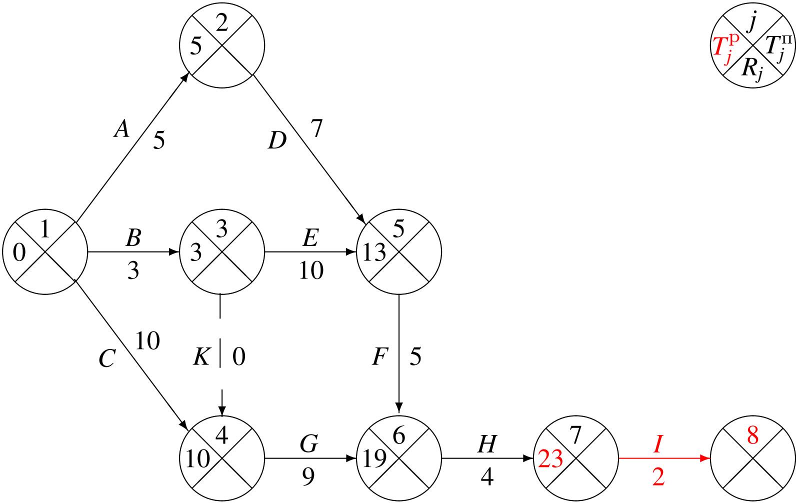
Пример: вычисление параметров сетевого графика



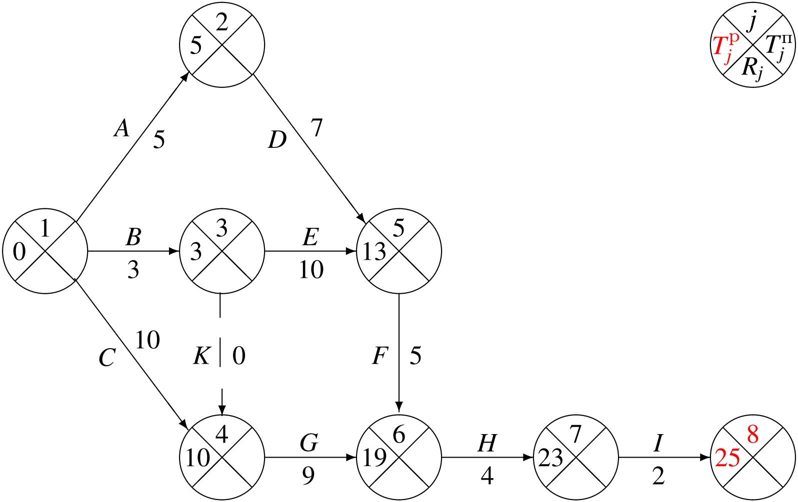
Пример: вычисление параметров сетевого графика



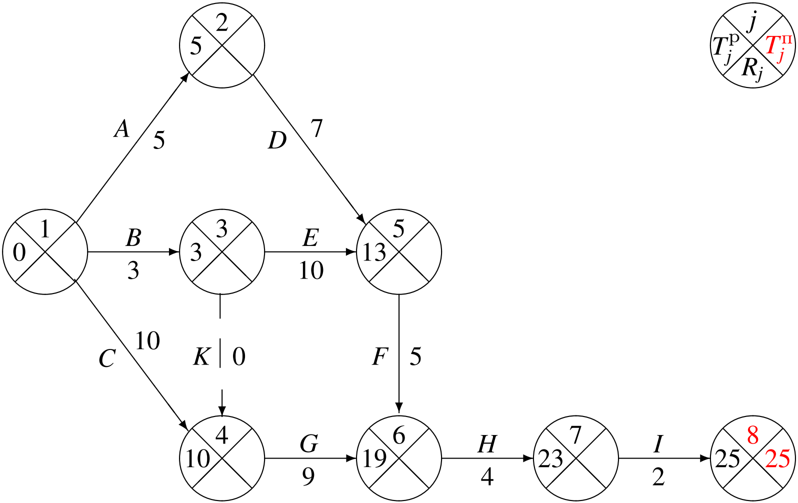
Пример: вычисление параметров сетевого графика



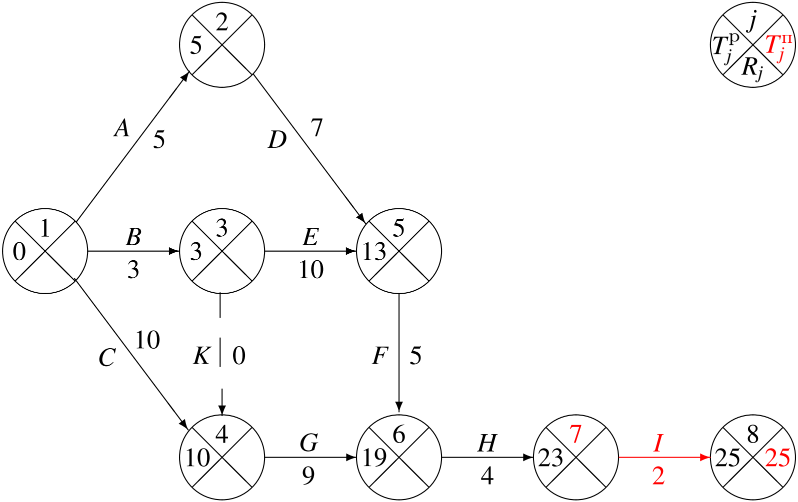
Пример: вычисление параметров сетевого графика



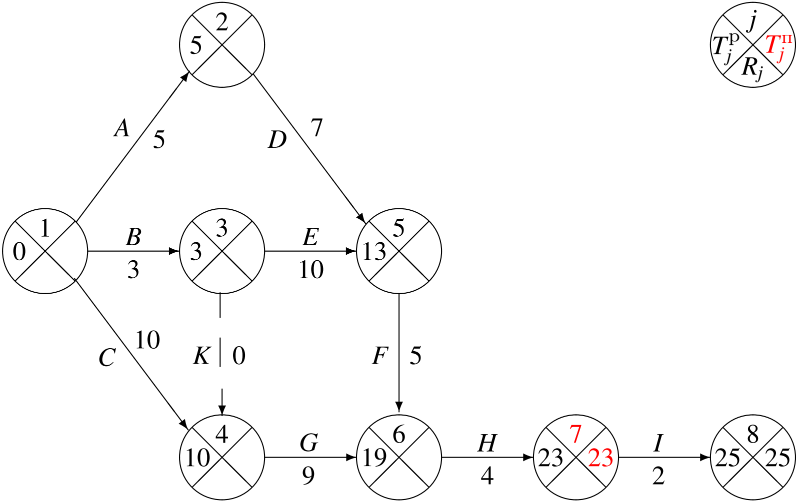
Пример: вычисление параметров сетевого графика



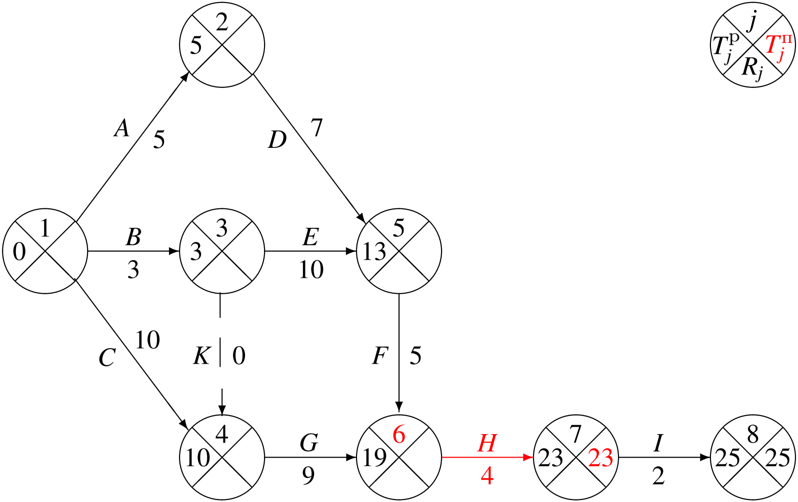
Пример: вычисление параметров сетевого графика



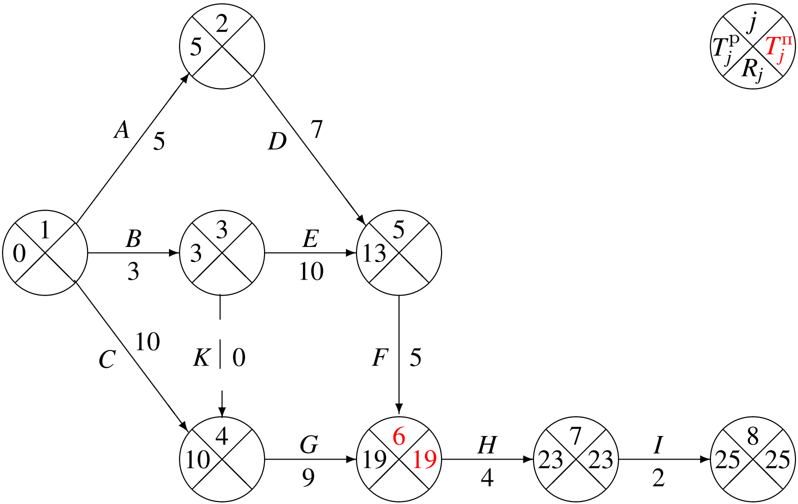
Пример: вычисление параметров сетевого графика



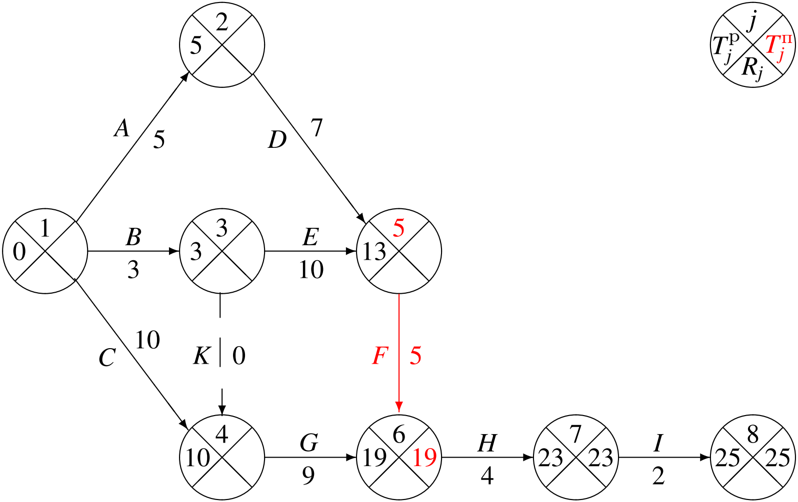
Пример: вычисление параметров сетевого графика



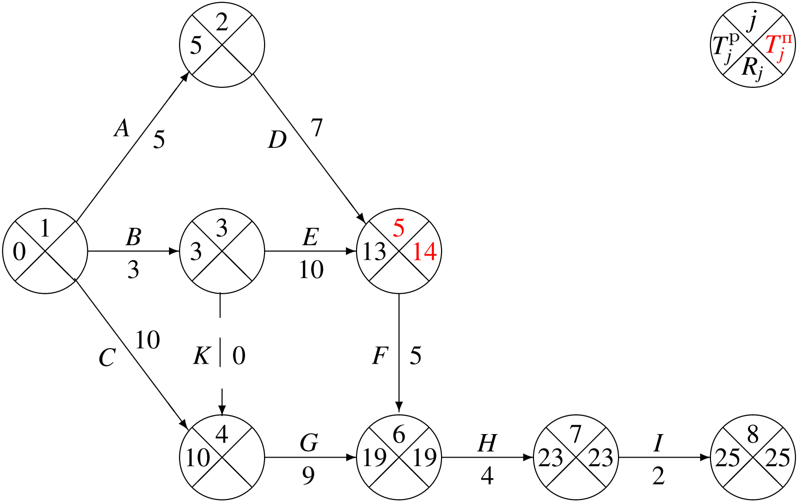
Пример: вычисление параметров сетевого графика



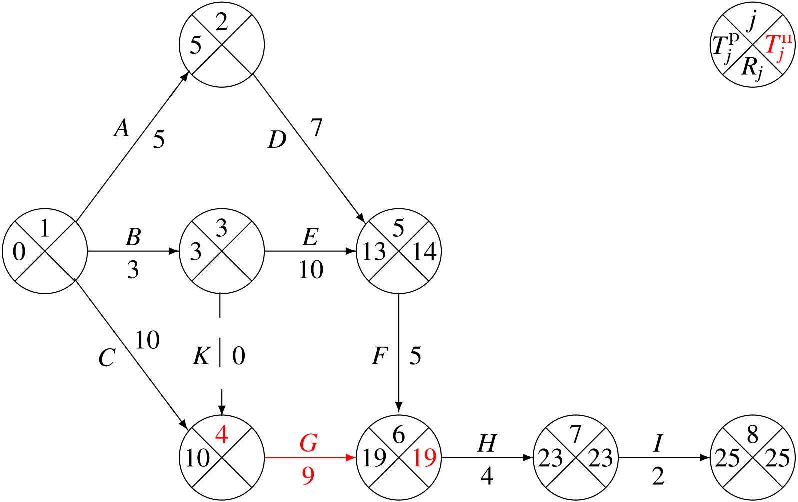
Пример: вычисление параметров сетевого графика



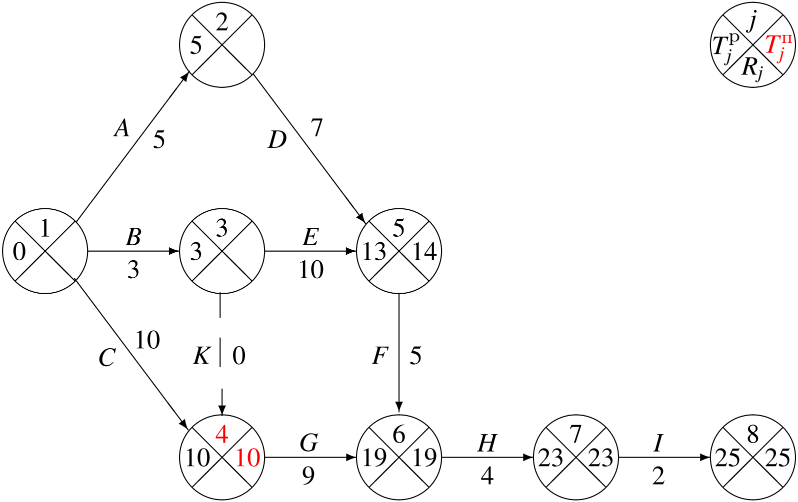
Пример: вычисление параметров сетевого графика



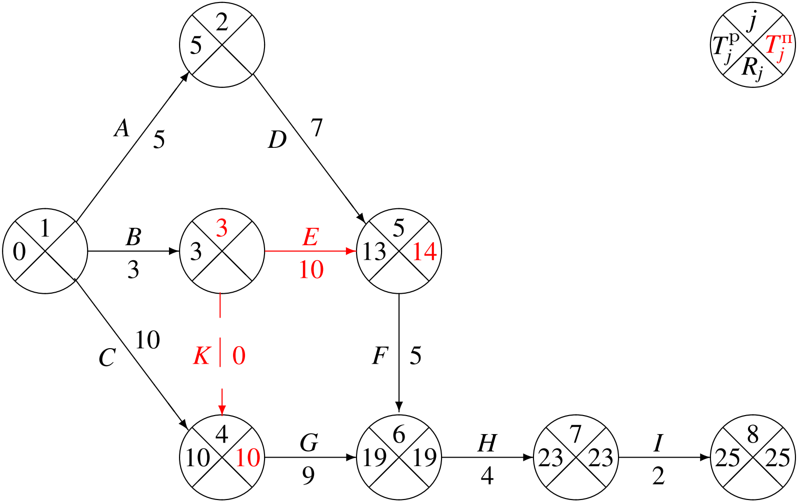
Пример: вычисление параметров сетевого графика



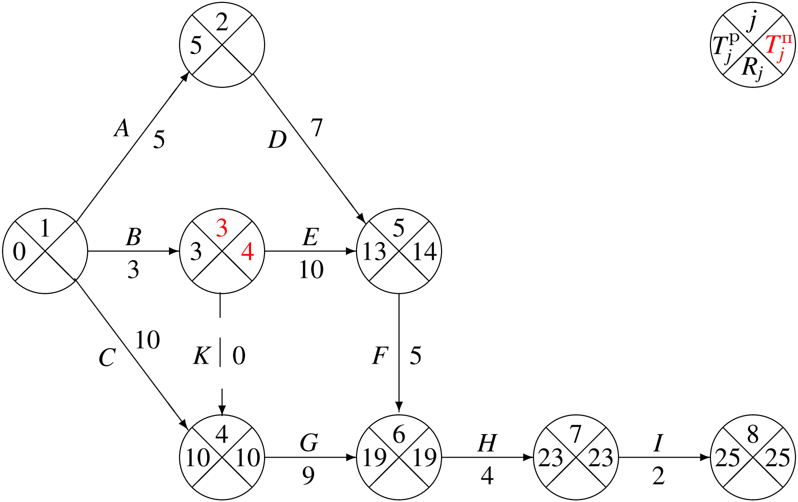
Пример: вычисление параметров сетевого графика



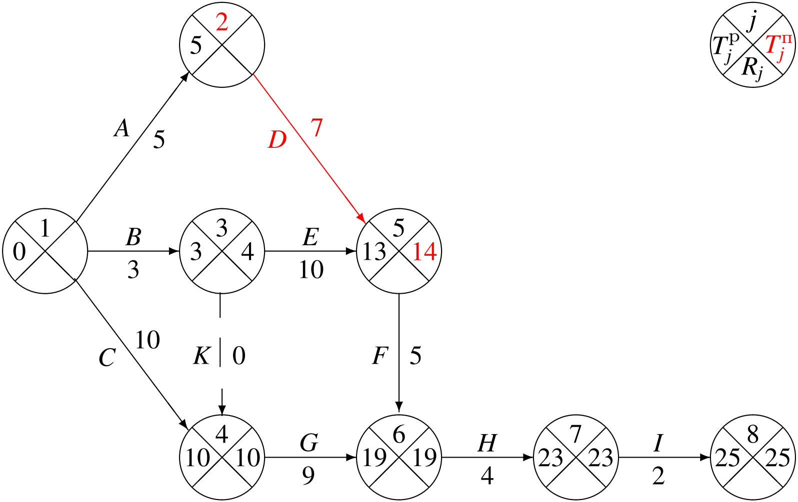
Пример: вычисление параметров сетевого графика



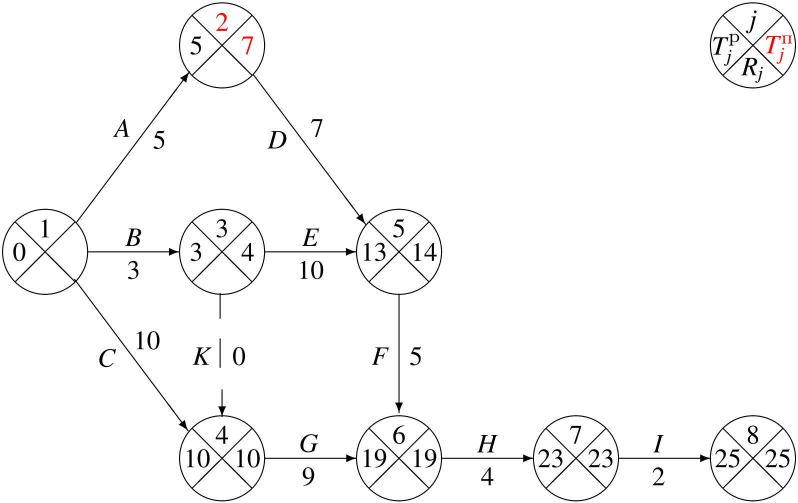
Пример: вычисление параметров сетевого графика



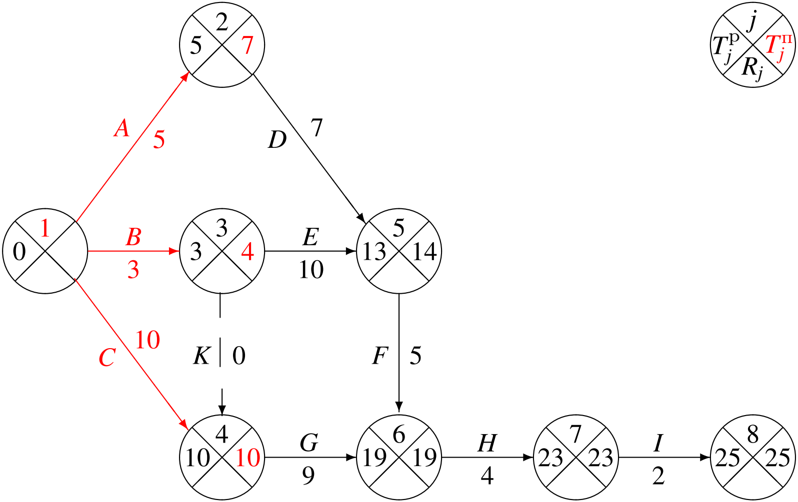
Пример: вычисление параметров сетевого графика



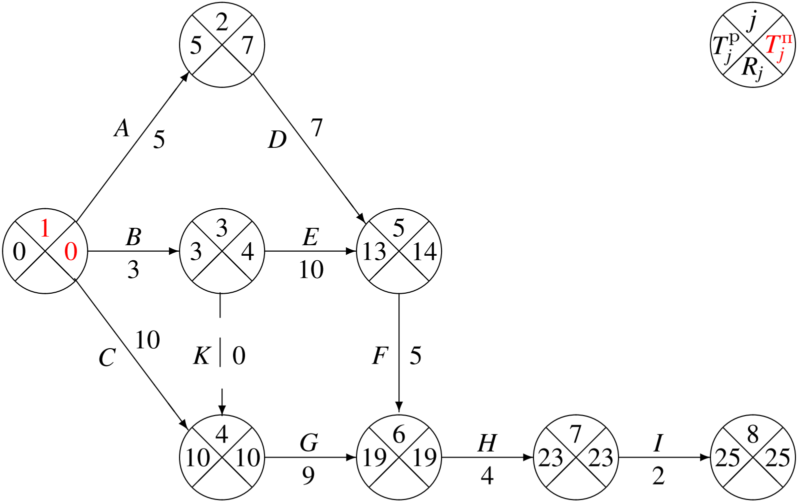
Пример: вычисление параметров сетевого графика



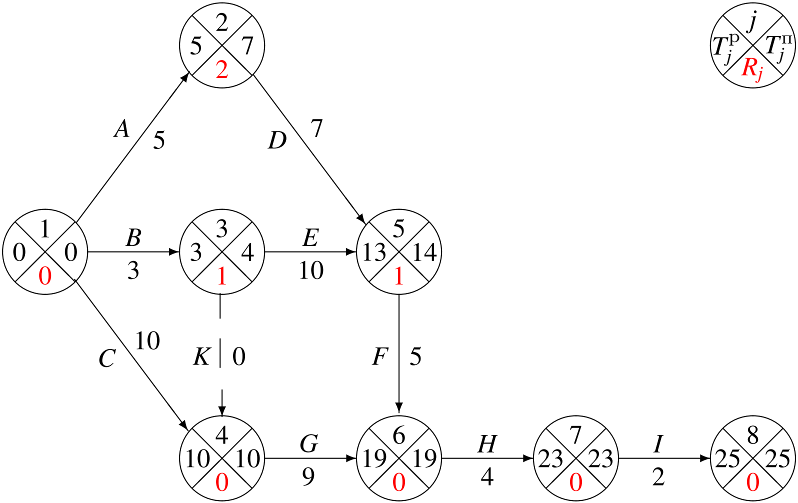
Пример: вычисление параметров сетевого графика



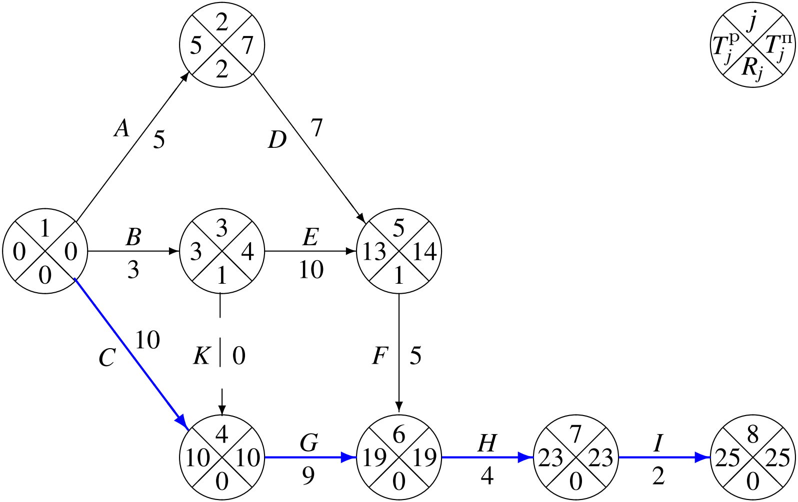
Пример: вычисление параметров сетевого графика



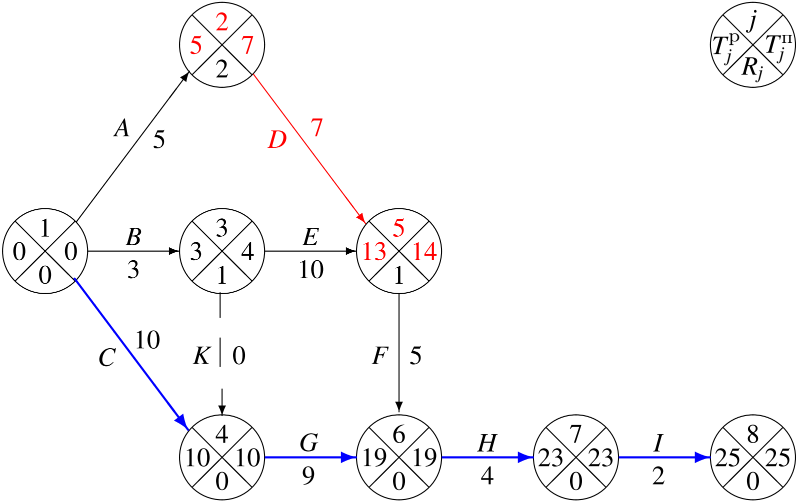
Пример: вычисление параметров сетевого графика



Пример: вычисление параметров сетевого графика



Пример: вычисление параметров сетевого графика



Вернуться к табл. результатов

План лекции

1. Сетевые графики
2. Метод критического пути
   - Ранние и поздние сроки наступления событий
   - Резервы времени для работ
3. Метод оценки и пересмотра планов
   - Предположения метода ПЕРТ
   - Критика ПЕРТ
4. Управление проектами при ограниченных ресурсах

Ранние и поздние сроки начала и окончания работ

- *Ранний срок $T_{н}^{р}(i,j)$ начала работы (i,j)* равен раннему сроку $T_i^{р}$ наступления события i, поскольку работа (i,j) не может быть начата, пока не наступит событие i.
- *Поздний срок $T_{о}^{п}(i,j)$ окончания работы (i,j)* — это наиболее поздний срок окончания работы (i,j) без задержки срока окончания проекта: $T_{н}^{р}(i,j) = T_j^{п}$.
- *Ранний срок $T_{о}^{р}(i,j)$ окончания работы (i,j)* определяется формулой $T_{о}^{р}(i,j) = T_j^{р} + t_{ij}$.
- *Поздний срок $T_{н}^{п}(i,j)$ начала работы (i,j)* определяется формулой $T_{н}^{п}(i,j) = T_j^{п} - t_{ij}$.

Ранние и поздние сроки начала и окончания работ

- *Ранний срок* $T_{\text{н}}^{\text{р}}(i,j)$ *начала работы* (i,j) равен раннему сроку $T_i^{\text{р}}$ наступления события i, поскольку работа (i,j) не может быть начата, пока не наступит событие i.
- *Поздний срок* $T_{\text{о}}^{\text{п}}(i,j)$ *окончания работы* (i,j) — это наиболее поздний срок окончания работы (i,j) без задержки срока окончания проекта: $T_{\text{н}}^{\text{р}}(i,j) = T_j^{\text{п}}$.
- *Ранний срок* $T_{\text{о}}^{\text{р}}(i,j)$ *окончания работы* (i,j) определяется формулой $T_{\text{о}}^{\text{р}}(i,j) = T_j^{\text{р}} + t_{ij}$.
- *Поздний срок* $T_{\text{н}}^{\text{п}}(i,j)$ *начала работы* (i,j) определяется формулой $T_{\text{н}}^{\text{п}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - t_{ij}$.

Ранние и поздние сроки начала и окончания работ

- *Ранний срок* $T_{\text{н}}^{\text{р}}(i,j)$ *начала работы* (i,j) равен раннему сроку $T_i^{\text{р}}$ наступления события i, поскольку работа (i,j) не может быть начата, пока не наступит событие i.
- *Поздний срок* $T_{\text{о}}^{\text{п}}(i,j)$ *окончания работы* (i,j) — это наиболее поздний срок окончания работы (i,j) без задержки срока окончания проекта: $T_{\text{н}}^{\text{р}}(i,j) = T_j^{\text{п}}$.
- *Ранний срок* $T_{\text{о}}^{\text{р}}(i,j)$ *окончания работы* (i,j) определяется формулой $T_{\text{о}}^{\text{р}}(i,j) = T_j^{\text{р}} + t_{ij}$.
- *Поздний срок* $T_{\text{н}}^{\text{п}}(i,j)$ *начала работы* (i,j) определяется формулой $T_{\text{н}}^{\text{п}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - t_{ij}$.

Ранние и поздние сроки начала и окончания работ

- *Ранний срок* $T_{\text{н}}^{\text{р}}(i,j)$ *начала работы* (i,j) равен раннему сроку $T_i^{\text{р}}$ наступления события i, поскольку работа (i,j) не может быть начата, пока не наступит событие i.
- *Поздний срок* $T_{\text{о}}^{\text{п}}(i,j)$ *окончания работы* (i,j) — это наиболее поздний срок окончания работы (i,j) без задержки срока окончания проекта: $T_{\text{н}}^{\text{р}}(i,j) = T_j^{\text{п}}$.
- *Ранний срок* $T_{\text{о}}^{\text{р}}(i,j)$ *окончания работы* (i,j) определяется формулой $T_{\text{о}}^{\text{р}}(i,j) = T_j^{\text{р}} + t_{ij}$.
- *Поздний срок* $T_{\text{н}}^{\text{п}}(i,j)$ *начала работы* (i,j) определяется формулой $T_{\text{н}}^{\text{п}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - t_{ij}$.

Четыре резерва времени работы

- *Суммарный резерв* $R^{\text{сум}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j) без задержки срока выполнения всего проекта: $R^{\text{сум}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - T_i^{\text{р}} - t_{ij}$.
- *Свободный резерв* $R^{\text{св}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на начала последующих работ: $R^{\text{св}}(i,j) = T_j^{\text{р}} - T_i^{\text{р}} - t_{ij}$.
- *Гарантированный резерв* $R^{\text{гар}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на ранний срок окончания всего проекта, при условии что предшествующие работы выполнялись в свои поздние сроки: $R^{\text{гар}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - (T_i^{\text{п}} - t_{ij})$.
- *Независимый резерв* $R^{\text{нез}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это такая задержка работы (i,j), которая не влияет на начало следующих работ, при условии что все предшествующие работы окончились в свои поздние сроки: $R^{\text{нез}}(i,j) = \max\{0, T_j^{\text{р}} - T_i^{\text{п}} - t_{ij}\}$.

Четыре резерва времени работы

- *Суммарный резерв* $R^{\text{сум}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j) без задержки срока выполнения всего проекта: $R^{\text{сум}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - T_i^{\text{р}} - t_{ij}$.
- *Свободный резерв* $R^{\text{св}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на начала последующих работ: $R^{\text{св}}(i,j) = T_j^{\text{р}} - T_i^{\text{р}} - t_{ij}$.
- *Гарантированный резерв* $R^{\text{гар}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на ранний срок окончания всего проекта, при условии что предшествующие работы выполнялись в свои поздние сроки: $R^{\text{гар}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - (T_i^{\text{п}} - t_{ij})$.
- *Независимый резерв* $R^{\text{нез}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это такая задержка работы (i,j), которая не влияет на начало следующих работ, при условии что все предшествующие работы окончились в свои поздние сроки: $R^{\text{нез}}(i,j) = \max\{0, T_j^{\text{р}} - T_i^{\text{п}} - t_{ij}\}$.

Четыре резерва времени работы

- *Суммарный резерв* $R^{\text{сум}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j) без задержки срока выполнения всего проекта: $R^{\text{сум}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - T_i^{\text{р}} - t_{ij}$.
- *Свободный резерв* $R^{\text{св}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на начала последующих работ: $R^{\text{св}}(i,j) = T_j^{\text{р}} - T_i^{\text{р}} - t_{ij}$.
- *Гарантированный резерв* $R^{\text{гар}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на ранний срок окончания всего проекта, при условии что предшествующие работы выполнялись в свои поздние сроки: $R^{\text{гар}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - (T_i^{\text{п}} - t_{ij})$.
- *Независимый резерв* $R^{\text{нез}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это такая задержка работы (i,j), которая не влияет на начало следующих работ, при условии что все предшествующие работы окончились в свои поздние сроки: $R^{\text{нез}}(i,j) = \max\{0, T_j^{\text{р}} - T_i^{\text{п}} - t_{ij}\}$.

Четыре резерва времени работы

- *Суммарный резерв* $R^{\text{сум}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j) без задержки срока выполнения всего проекта: $R^{\text{сум}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - T_i^{\text{р}} - t_{ij}$.
- *Свободный резерв* $R^{\text{св}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на начала последующих работ: $R^{\text{св}}(i,j) = T_j^{\text{р}} - T_i^{\text{р}} - t_{ij}$.
- *Гарантированный резерв* $R^{\text{гар}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на ранний срок окончания всего проекта, при условии что предшествующие работы выполнялись в свои поздние сроки: $R^{\text{гар}}(i,j) = T_j^{\text{п}} - (T_i^{\text{п}} - t_{ij})$.
- *Независимый резерв* $R^{\text{нез}}(i,j)$ времени работы (i,j) — это такая задержка работы (i,j), которая не влияет на начало следующих работ, при условии что все предшествующие работы окончились в свои поздние сроки: $R^{\text{нез}}(i,j) = \max\{0, T_j^{\text{р}} - T_i^{\text{п}} - t_{ij}\}$.

Результаты вычисл. по методу критического пути

Раб.	Дуга	Прод.	Сроки нач. и оконч.				Резервы			
			$T_{\text{н}}^{\text{р}}$	$T_{\text{о}}^{\text{р}}$	$T_{\text{н}}^{\text{п}}$	$T_{\text{о}}^{\text{п}}$	$R^{\text{сум}}$	$R^{\text{св}}$	$R^{\text{гар}}$	$R^{\text{нез}}$
A	$(1,2)$	5	0	5	2	7	2	0	2	0
B	$(1,3)$	3	0	3	1	4	1	0	1	0
C	$(1,4)$	10	0	10	0	10	0	0	0	0
D	$(1,5)$	7	5	12	7	14	2	1	0	0
E	$(3,5)$	10	3	13	4	14	1	0	0	0
G	$(4,6)$	9	10	19	10	19	0	0	0	0
F	$(5,6)$	5	13	19	14	19	1	1	0	0
H	$(6,7)$	4	19	23	19	23	0	0	0	0
I	$(7,8)$	2	23	25	23	25	0	0	0	0
K	$(3,4)$	0	3	3	10	10	7	7	0	0

Результаты вычисл. по методу критического пути

Раб.	Дуга	Прод.	Сроки нач. и оконч.				Резервы			
			$T_н^р$	$T_о^р$	$T_н^п$	$T_о^п$	$R^{сум}$	$R^{св}$	$R^{гар}$	$R^{нез}$
A	$(1,2)$	5	0	5	2	7	2	0	2	0
B	$(1,3)$	3	0	3	1	4	1	0	1	0
C	$(1,4)$	10	0	10	0	10	0	0	0	0
D	$(1,5)$	7	5	12	7	14	2	1	0	0
E	$(3,5)$	10	3	13	4	14	1	0	0	0
G	$(4,6)$	9	10	19	10	19	0	0	0	0
F	$(5,6)$	5	13	19	14	19	1	1	0	0
H	$(6,7)$	4	19	23	19	23	0	0	0	0
I	$(7,8)$	2	23	25	23	25	0	0	0	0
K	$(3,4)$	0	3	3	10	10	7	7	0	0

Результаты вычисл. по методу критического пути

Раб.	Дуга	Прод.	Сроки нач. и оконч.				Резервы			
			$T_{н}^{р}$	$T_{о}^{р}$	$T_{н}^{п}$	$T_{о}^{п}$	$R^{сум}$	$R^{св}$	$R^{гар}$	$R^{нез}$
A	$(1,2)$	5	0	5	2	7	2	0	2	0
B	$(1,3)$	3	0	3	1	4	1	0	1	0
C	$(1,4)$	10	0	10	0	10	0	0	0	0
D	$(1,5)$	7	5	12	7	14	2	1	0	0
E	$(3,5)$	10	3	13	4	14	1	0	0	0
G	$(4,6)$	9	10	19	10	19	0	0	0	0
F	$(5,6)$	5	13	19	14	19	1	1	0	0
H	$(6,7)$	4	19	23	19	23	0	0	0	0
I	$(7,8)$	2	23	25	23	25	0	0	0	0
K	$(3,4)$	0	3	3	10	10	7	7	0	0

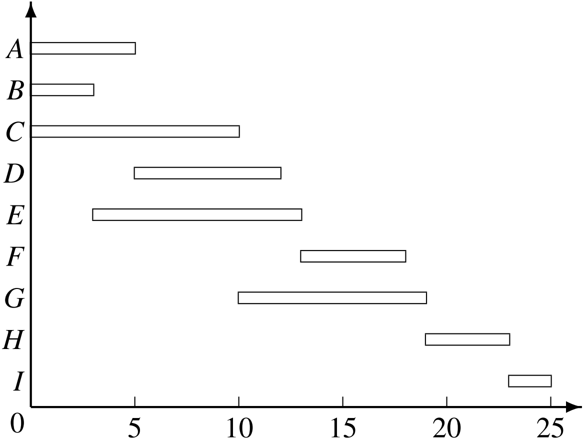
Перейти к графику

Результаты вычисл. по методу критического пути

Раб.	Дуга	Прод.	Сроки нач. и оконч.				Резервы			
			$T_н^р$	$T_о^р$	$T_н^п$	$T_о^п$	$R^{сум}$	$R^{св}$	$R^{гар}$	$R^{нез}$
A	$(1,2)$	5	0	5	2	7	2	0	2	0
B	$(1,3)$	3	0	3	1	4	1	0	1	0
C	$(1,4)$	10	0	10	0	10	0	0	0	0
D	$(1,5)$	7	5	12	7	14	2	1	0	0
E	$(3,5)$	10	3	13	4	14	1	0	0	0
G	$(4,6)$	9	10	19	10	19	0	0	0	0
F	$(5,6)$	5	13	19	14	19	1	1	0	0
H	$(6,7)$	4	19	23	19	23	0	0	0	0
I	$(7,8)$	2	23	25	23	25	0	0	0	0
K	$(3,4)$	0	3	3	10	10	7	7	0	0

Вернуться к диаграмме

Временная диаграмма проекта



Перейти к табл. результатов

План лекции

1. Сетевые графики
2. Метод критического пути
   - Ранние и поздние сроки наступления событий
   - Резервы времени для работ
3. Метод оценки и пересмотра планов
   - Предположения метода ПЕРТ
   - Критика ПЕРТ
4. Управление проектами при ограниченных ресурсах

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.
- В *методе оценки и пересмотра планов* (*ПЕРТ*) задаются три оценки продолжительности выполнения каждой работы (i, j):
  1. наиболее вероятное время выполения m_{ij};
  2. оптимистическая оценка времени выполения a_{ij};
  3. пессимистическая оценка времени выполения b_{ij}.

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.
- В *методе оценки и пересмотра планов* (*ПЕРТ*) задаются три оценки продолжительности выполнения каждой работы (i,j):
  1. наиболее вероятное время выполения m_{ij};
  2. оптимистическая оценка времени выполения a_{ij};
  3. пессимистическая оценка времени выполения b_{ij}.

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.
- В *методе оценки и пересмотра планов* (*ПЕРТ*) задаются три оценки продолжительности выполнения каждой работы (i, j):
  1. наиболее вероятное время выполения m_{ij};
  2. оптимистическая оценка времени выполения a_{ij};
  3. пессимистическая оценка времени выполения b_{ij}.

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.
- В *методе оценки и пересмотра планов* (*ПЕРТ*) задаются три оценки продолжительности выполнения каждой работы (i, j):
  1. наиболее вероятное время выполения m_{ij};
  2. оптимистическая оценка времени выполения a_{ij};
  3. пессимистическая оценка времени выполения b_{ij}.

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.
- В *методе оценки и пересмотра планов* (*ПЕРТ*) задаются три оценки продолжительности выполнения каждой работы (i, j):
  1. наиболее вероятное время выполения m_{ij};
  2. оптимистическая оценка времени выполения a_{ij};
  3. пессимистическая оценка времени выполения b_{ij}.

Три оценки продолжительности

- До сих пор предполагалось, что продолжительности работ точно известны,
- что на практике далеко не всегда так.
- В *методе оценки и пересмотра планов* (*ПЕРТ*) задаются три оценки продолжительности выполнения каждой работы (i, j):
  1. наиболее вероятное время выполения m_{ij};
  2. оптимистическая оценка времени выполения a_{ij};
  3. пессимистическая оценка времени выполения b_{ij}.

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i, j) есть случайная величина с бета-распределением,
- стандартное отклонение которой определяется по формуле $\sigma_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6$.
- Математическое ожидание (средняя продолжительность работы (i, j)) случайной величины t_{ij} приближенно определяется по формуле:

$$E(t_{ij}) \approx \mu_{ij} = (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6.$$

- Продолжительность проекта (критическое время) T есть сумма продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.
- Поэтому T также является случайной величиной.

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i,j) есть случайная величина с бета-распределением,
- стандартное отклонение которой определяется по формуле $\sigma_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6$.
- Математическое ожидание (средняя продолжительность работы (i,j)) случайной величины t_{ij} приближенно определяется по формуле:

$$E(t_{ij}) \approx \mu_{ij} = (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6.$$

- Продолжительность проекта (критическое время) T есть сумма продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.
- Поэтому T также является случайной величиной.

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i,j) есть случайная величина с бета-распределением,
- стандартное отклонение которой определяется по формуле $\sigma_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6$.
- Математическое ожидание (средняя продолжительность работы (i,j)) случайной величины t_{ij} приближенно определяется по формуле:

$$E(t_{ij}) \approx \mu_{ij} = (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6.$$

- Продолжительность проекта (критическое время) T есть сумма продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.
- Поэтому T также является случайной величиной.

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i,j) есть случайная величина с бета-распределением,
- стандартное отклонение которой определяется по формуле $\sigma_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6$.
- Математическое ожидание (средняя продолжительность работы (i,j)) случайной величины t_{ij} приближенно определяется по формуле:

$$E(t_{ij}) \approx \mu_{ij} = (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6.$$

- Продолжительность проекта (критическое время) T есть сумма продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.
- Поэтому T также является случайной величиной.

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i,j) есть случайная величина с бета-распределением,
- стандартное отклонение которой определяется по формуле $\sigma_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6$.
- Математическое ожидание (средняя продолжительность работы (i,j)) случайной величины t_{ij} приближенно определяется по формуле:

$$E(t_{ij}) \approx \mu_{ij} = (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6.$$

- Продолжительность проекта (критическое время) T есть сумма продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.
- Поэтому T также является случайной величиной.

Бета-распределение продолжительностей работ

- В методе ПЕРТ предполагается, что время выполнения t_{ij} работы (i, j) есть случайная величина с бета-распределением,
- стандартное отклонение которой определяется по формуле $\sigma_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6$.
- Математическое ожидание (средняя продолжительность работы (i, j)) случайной величины t_{ij} приближенно определяется по формуле:

$$E(t_{ij}) \approx \mu_{ij} = (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6.$$

- Продолжительность проекта (критическое время) T есть сумма продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.
- Поэтому T также является случайной величиной.

Математическое ожидание случайной величины T

- В методе ПЕРТ математическое ожидание $E(T)$ случайной величины T вычисляется следующим образом.
- В качестве продолжительности каждой работы (i,j) берется ее средния продолжительность μ_{ij}.
- Для этих продолжительностей определяются *критический путь*
- и $E(T)$ полагается равным сумме средних продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.

Математическое ожидание случайной величины T

- В методе ПЕРТ математическое ожидание $E(T)$ случайной величины T вычисляется следующим образом.
- В качестве продолжительности каждой работы (i, j) берется ее средния продолжительность μ_{ij}.
- Для этих продолжительностей определяются *критический путь*
- и $E(T)$ полагается равным сумме средних продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.

Математическое ожидание случайной величины T

- В методе ПЕРТ математическое ожидание $E(T)$ случайной величины T вычисляется следующим образом.
- В качестве продолжительности каждой работы (i, j) берется ее средния продолжительность μ_{ij}.
- Для этих продолжительностей определяются *критический путь*
- и $E(T)$ полагается равным сумме средних продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.

Математическое ожидание случайной величины T

- В методе ПЕРТ математическое ожидание $E(T)$ случайной величины T вычисляется следующим образом.
- В качестве продолжительности каждой работы (i, j) берется ее средния продолжительность μ_{ij}.
- Для этих продолжительностей определяются *критический путь*
- и $E(T)$ полагается равным сумме средних продолжительностей работ, находящихся на критическом пути.

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ,
- в силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному
- с математическим ожиданием $\mu = E(T)$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)}$.
- По формуле

$$\mathbb{P}(T \le \bar{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\bar{T}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx$$

- мы можем вычислить вероятность завершения проекта к заданному сроку $\bar{T}$.

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ,
- в силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному
- с математическим ожиданием $\mu = E(T)$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)}$.
- По формуле

$$\mathbb{P}(T \le \bar{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\bar{T}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx$$

- мы можем вычислить вероятность завершения проекта к заданному сроку $\bar{T}$.

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ,
- в силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному
- с математическим ожиданием $\mu = E(T)$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)}$.
- По формуле

$$\mathbb{P}(T \leq \bar{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\bar{T}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx$$

- мы можем вычислить вероятность завершения проекта к заданному сроку $\bar{T}$.

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ,
- в силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному
- с математическим ожиданием $\mu = E(T)$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)}$.
- По формуле

$$\mathbb{P}(T \leq \bar{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\bar{T}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx$$

- мы можем вычислить вероятность завершения проекта к заданному сроку $\bar{T}$.

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ,
- в силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному
- с математическим ожиданием $\mu = E(T)$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)}$.
- По формуле

$$\mathbb{P}(T \le \bar{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\bar{T}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx$$

- мы можем вычислить вероятность завершения проекта к заданному сроку $\bar{T}$.

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ,
- в силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному
- с математическим ожиданием $\mu = E(T)$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)}$.
- По формуле

$$\mathbb{P}(T \le \bar{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\bar{T}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx$$

- мы можем вычислить вероятность завершения проекта к заданному сроку $\bar{T}$.

Дисперсия случайной величины T

- В предположении, что продолжительности всех работ являются независимыми случайными величинами,
- дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины T определяется равной сумме дисперсий работ, находящихся на критическом пути.
- Когда на критическом пути находится много работ,
- в силу центральной предельной теоремы, случайная величина T имеет распределение близкое к нормальному
- с математическим ожиданием $\mu = E(T)$ и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)}$.
- По формуле
$$\mathbb{P}(T \leq \bar{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\bar{T}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx$$
- мы можем вычислить вероятность завершения проекта к заданному сроку $\bar{T}$.

Пример анализа проекта по методу ПЕРТ

Работа	Непоср. предш. работы	Оценки продолжительности			Средняя продолжит.	Стандартное отклонение	Дисперсия
		оптимис-тическая	наиболее вероятная	пессимис-тическая			
A	—	2	5	8	5	1	1
B	A	6	9	12	9	1	1
C	A	6	7	8	7	1/3	1/9
D	B,C	1	4	7	4	1	1
E	A	8	8	8	8	0	0
F	C	3	12	21	12	3	9
G	C	4	7	13	$7\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
H	D,E,F	5	7	10	13	2	4
I	D,E,F	6	8	12	$8\frac{1}{3}$	2	4
J	G,H	3	6	9	6	1	1
K	I,J	3	8	11	8	1	1

Пример анализа проекта по методу ПЕРТ

Работа	Непоср. предш. работы	Оценки продолжительности			Средняя продолжит.	Стандартное отклонение	Дисперсия
		оптимистическая	наиболее вероятная	пессимистическая			
A	—	2	5	8	5	1	1
B	A	6	9	12	9	1	1
C	A	6	7	8	7	1/3	1/9
D	B,C	1	4	7	4	1	1
E	A	8	8	8	8	0	0
F	C	3	12	21	12	3	9
G	C	4	7	13	$7\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
H	D,E,F	5	7	10	13	2	4
I	D,E,F	6	8	12	$8\frac{1}{3}$	2	4
J	G,H	3	6	9	6	1	1
K	I,J	3	8	11	8	1	1

Пример анализа проекта по методу ПЕРТ

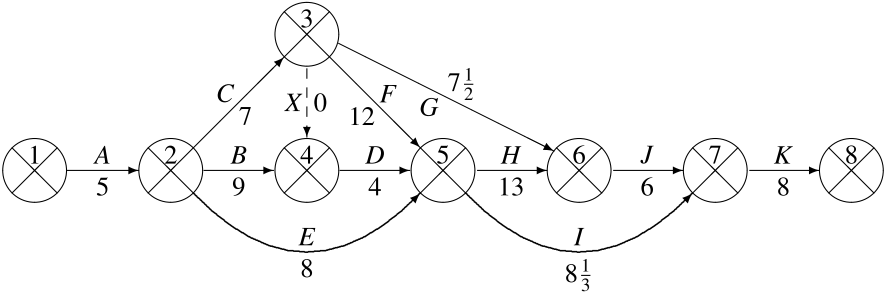
Работа	Непоср. предш. работы	Оценки продолжительности			Средняя продолжит.	Стандартное отклонение	Дисперсия
		оптимистическая	наиболее вероятная	пессимистическая			
A	—	2	5	8	5	1	1
B	A	6	9	12	9	1	1
C	A	6	7	8	7	$1/3$	$1/9$
D	B,C	1	4	7	4	1	1
E	A	8	8	8	8	0	0
F	C	3	12	21	12	3	9
G	C	4	7	13	$7\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
H	D,E,F	5	7	10	13	2	4
I	D,E,F	6	8	12	$8\frac{1}{3}$	2	4
J	G,H	3	6	9	6	1	1
K	I,J	3	8	11	8	1	1

Пример анализа проекта по методу ПЕРТ

Работа	Непоср. предш. работы	Оценки продолжительности: оптимистическая	наиболее вероятная	пессимистическая	Средняя продолжит.	Стандартное отклонение	Дисперсия
A	—	2	5	8	5	1	1
B	A	6	9	12	9	1	1
C	A	6	7	8	7	1/3	1/9
D	B,C	1	4	7	4	1	1
E	A	8	8	8	8	0	0
F	C	3	12	21	12	3	9
G	C	4	7	13	$7\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
H	D,E,F	5	7	10	13	2	4
I	D,E,F	6	8	12	$8\frac{1}{3}$	2	4
J	G,H	3	6	9	6	1	1
K	I,J	3	8	11	8	1	1

К решению

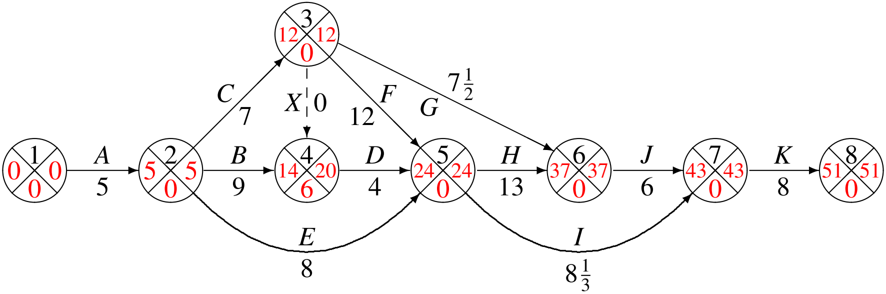
Решение примера методом ПЕРТ



- Расчитываем параметры и находим критический путь.
- Критическое время $T^{\text{кр}} = 51$. Поэтому $\mu = E(T) = 51$
- и $\sigma^2(T) = 1 + 1/9 + 9 + 4 + 1 + 1 = 16\frac{1}{9}$

  а $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)} \approx 4.014$.

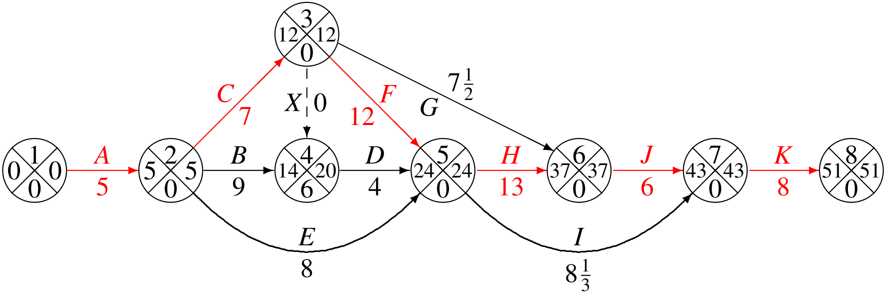
Решение примера методом ПЕРТ



- Расчитываем параметры и находим критический путь.
- Критическое время $T^{\text{кр}} = 51$. Поэтому $\mu = E(T) = 51$
- и $\sigma^2(T) = 1 + 1/9 + 9 + 4 + 1 + 1 = 16\frac{1}{9}$

  а $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)} \approx 4.014.$

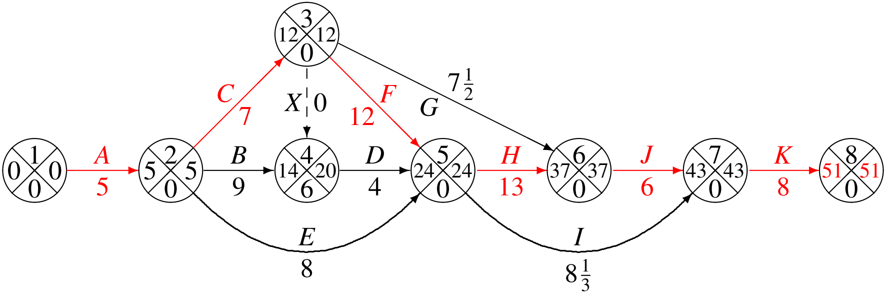
Решение примера методом ПЕРТ



- Расчитываем параметры и находим критический путь.
- Критическое время $T^{\text{кр}} = 51$. Поэтому $\mu = E(T) = 51$
- и $\sigma^2(T) = 1 + 1/9 + 9 + 4 + 1 + 1 = 16\frac{1}{9}$

  а $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)} \approx 4.014$.

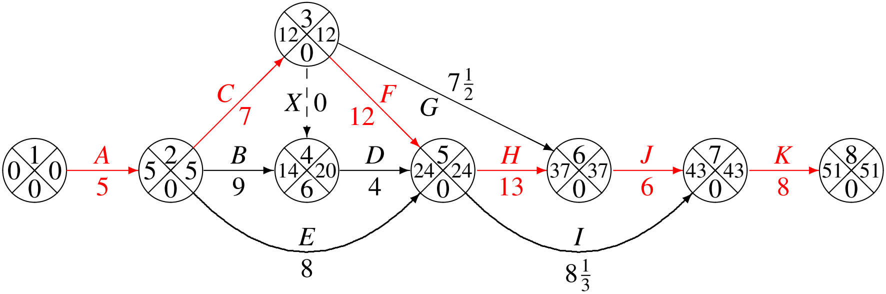
Решение примера методом ПЕРТ



- Расчитываем параметры и находим критический путь.
- Критическое время $T^{\text{кр}} = 51$. Поэтому $\mu = E(T) = 51$
- и $\sigma^2(T) = 1 + 1/9 + 9 + 4 + 1 + 1 = 16\frac{1}{9}$

  а $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)} \approx 4.014$.

Решение примера методом ПЕРТ

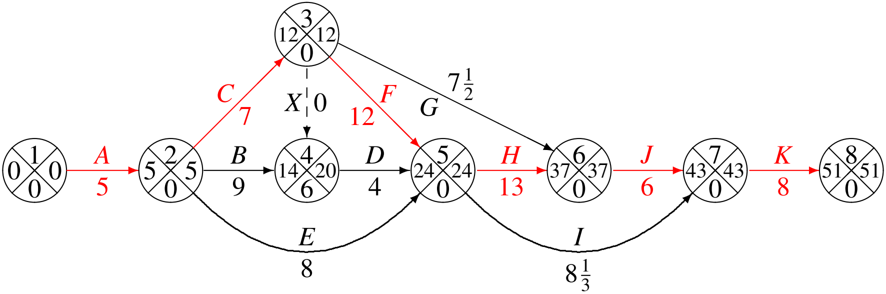


- Расчитываем параметры и находим критический путь.
- Критическое время $T^{\text{кр}} = 51$. Поэтому $\mu = E(T) = 51$
- и $\sigma^2(T) = 1 + 1/9 + 9 + 4 + 1 + 1 = 16\frac{1}{9}$

  а $\sigma = \sqrt{\sigma^2(T)} \approx 4.014$.

К описанию проекта

Решение примера методом ПЕРТ



- Расчитываем параметры и находим критический путь.
- $\mu = E(T) = 51, \quad \sigma^2(T) = 16\frac{1}{9}, \quad \sigma \approx 4.014.$
- Вероятность того, что проект будет завершен за 58 дней:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \le 58) &= \mathbb{P}\left((T-\mu)/\sigma \le \tfrac{58-51}{4.014}\right)\\ &= \mathbb{P}((T-\mu)/\sigma \le 1.74) = 0.9591.\end{aligned}$$

План лекции

1. Сетевые графики
2. Метод критического пути
   - Ранние и поздние сроки наступления событий
   - Резервы времени для работ
3. Метод оценки и пересмотра планов
   - Предположения метода ПЕРТ
   - Критика ПЕРТ
4. Управление проектами при ограниченных ресурсах

Главное предположние метода ПЕРТ не верно

- Главное предположние метода ПЕРТ, что
- математическое ожидание критического времени $E(T)$ равно критическому времени проекта,
- когда продолжительности всех работ равны математическим ожиданиям реальных (случайных) продолжительностей,
- в общем случае не верно.

Главное предположние метода ПЕРТ не верно

- Главное предположние метода ПЕРТ, что
- математическое ожидание критического времени $E(T)$ равно критическому времени проекта,
- когда продолжительности всех работ равны математическим ожиданиям реальных (случайных) продолжительностей,
- в общем случае не верно.

Главное предположние метода ПЕРТ не верно

- Главное предположние метода ПЕРТ, что
- математическое ожидание критического времени $E(T)$ равно критическому времени проекта,
- когда продолжительности всех работ равны математическим ожиданиям реальных (случайных) продолжительностей,
- в общем случае не верно.

Главное предположние метода ПЕРТ не верно

- Главное предположние метода ПЕРТ, что
- математическое ожидание критического времени $E(T)$ равно критическому времени проекта,
- когда продолжительности всех работ равны математическим ожиданиям реальных (случайных) продолжительностей,
- в общем случае не верно.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}\,5 + \frac{1}{2}\,7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Предположние метода ПЕРТ не верно: пример

- Проект состоит только из двух работ A и B,
- которые можно выполнять параллельно.
- Продолжительность t_A работы A постоянна и равна 5,
- а продолжительность t_B работы B есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 3 или 7.
- Поскольку $E(t_A) = E(t_B) = 5$, то согласно ПЕРТ $E(T) = 5$.
- Но критическое время $T = \max\{t_A, t_B\}$ есть дискретная случайная величина, которая с равной вероятностью принимает одно из двух значений 5 или 7.
- Поэтому $E(T) = \frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}7 = 6 > 5$.
- В этом простом примере мы отошли от предположения ПЕРТ, что продолжитетельности работ имеют бета-распределение, чтобы
- не прятать идею за рутиной сложных вычислений.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,
  - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель — найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,
  - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель — найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,
  - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель — найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,
  - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель — найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
    - выполнить множество работ,
    - используя требуемые ресурсы,
    - соблюдая отношения предшествования между работами,
    - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель — найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,
  - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель — найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,
  - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель — найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,
  - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель — найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,
  - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель — найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Ограниченные ресурсы

- В методах критического пути и ПЕРТ единственной характеристикой работы была ее продолжительность.
- Но для выполнения работ нужны еще и ресурсы (люди, машины, различные материалы, деньги и т. д.).
- По сути, в методах крит. пути и ПЕРТ предполагается, что ресурсы доступны в неограниченных объемах.
- В реальной жизни это не так и для реализации проектов выделяется ограниченное количество ресурсов.
- В задаче поиска оптимального расписания для реализации проекта нужно
  - выполнить множество работ,
  - используя требуемые ресурсы,
  - соблюдая отношения предшествования между работами,
  - при выполнении определенных ограничений, таких как выполнение отдельных работ в заданные сроки.
- Цель — найти расписание, которое позволяет реализовать проект в минимальные сроки.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R^r_k единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R^n_k единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ^r_{jk}: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \ldots, q^r\}$;
  - ρ^n_{jk}: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \ldots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R^r_k единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R^n_k единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
    - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
    - p_j: время выполнения;
    - ρ^r_{jk}: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^r\}$;
    - ρ^n_{jk}: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R^r_k единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R^n_k единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ^r_{jk}: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^r\}$;
  - ρ^n_{jk}: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ_{jk}^r: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^r\}$;
  - ρ_{jk}^n: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ_{jk}^r: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^r\}$;
  - ρ_{jk}^n: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R^r_k единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R^n_k единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ^r_{jk}: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^r\}$;
  - ρ^n_{jk}: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R^r_k единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R^n_k единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \ldots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ^r_{jk}: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \ldots, q^r\}$;
  - ρ^n_{jk}: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \ldots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ_{jk}^r: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^r\}$;
  - ρ_{jk}^n: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R^r_k единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R^n_k единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ^r_{jk}: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^r\}$;
  - ρ^n_{jk}: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ_{jk}^r: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^r\}$;
  - ρ_{jk}^n: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R^r_k единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R^n_k единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ^r_{jk}: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^r\}$;
  - ρ^n_{jk}: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Постановка задачи

- Для реалиции проекта используется q^r *возобновляемых* и q^n *невозобновляемых* ресурсов.
- В любой момент времени доступно R_k^r единиц возобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^r$.
- На выполнение проекта выделяется R_k^n единиц невозобновляемого ресурса k, $k = 1, \dots, q^n$.
- Проект состоит из n работ. Для работы j заданы:
  - l_j, u_j: раннее время начала и позднее время окончания;
  - p_j: время выполнения;
  - ρ_{jk}^r: необходимое кол-во возобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^r\}$;
  - ρ_{jk}^n: необход. кол-во невозобновл. ресурса $k \in \{1, \dots, q^n\}$.
- Ацикл. орграф $G = (\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}, E)$ задает *отношения предшествования* между работами:
- для любой дуги $(j_1, j_2) \in E$ работа j_2 не может начаться пока не завершится работа job j_1.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- *Расписание* выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \ldots, u_j - p_j$, $j = 1, \ldots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j $(j = 1, \ldots, n)$, где
- s_j — это время начала выполнения работы j.
- И, наконец, введем еще одну переменную T для представления *длины расписания*, которая равна времени окончания выполнения поледней работы.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- *Расписание* выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \dots, u_j - p_j$, $j = 1, \dots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j $(j = 1, \dots, n)$, где
- s_j — это время начала выполнения работы j.
- И, наконец, введем еще одну переменную T для представления *длины расписания*, которая равна времени окончания выполнения поледней работы.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- *Расписание* выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \dots, u_j - p_j$, $j = 1, \dots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j $(j = 1, \dots, n)$, где
- s_j — это время начала выполнения работы j.
- И, наконец, введем еще одну переменную T для представления *длины расписания*, которая равна времени окончания выполнения поледней работы.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- *Расписание* выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \dots, u_j - p_j$, $j = 1, \dots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j ($j = 1, \dots, n$), где
- s_j — это время начала выполнения работы j.
- И, наконец, введем еще одну переменную T для представления *длины расписания*, которая равна времени окончания выполнения поледней работы.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- *Расписание* выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \dots, u_j - p_j$, $j = 1, \dots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j ($j = 1, \dots, n$), где
- s_j — это время начала выполнения работы j.
- И, наконец, введем еще одну переменную T для представления *длины расписания*, которая равна времени окончания выполнения поледней работы.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- *Расписание* выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \dots, u_j - p_j$, $j = 1, \dots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j ($j = 1, \dots, n$), где
- s_j — это время начала выполнения работы j.
- И, наконец, введем еще одну переменную T для представления *длины расписания*, которая равна времени окончания выполнения поледней работы.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t+1$.
- *Расписание* выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \dots, u_j - p_j$, $j = 1, \dots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j $(j = 1, \dots, n)$, где
- s_j — это время начала выполнения работы j.
- И, наконец, введем еще одну переменную T для представления *длины расписания*, которая равна времени окончания выполнения поледней работы.

Переменные в ЦП формулировке

- Предполагается, что время дискретно, т. е. временной горизонт разделен на периоды:
- период t начинается в момент времени t и заканчивается к моменту времени $t + 1$.
- *Расписание* выполнения отдельных работ проекта определяется значениями бинарных переменных x_{jt}, $t = l_j, \dots, u_j - p_j$, $j = 1, \dots, n$.
- Переменная x_{jt} принимает значение 1, если выполнение работы j начинается в период t; иначе $x_{jt} = 0$.
- Для упрощения формулировки отношений предшествования введем семейство вспомогательных переменных s_j $(j = 1, \dots, n)$, где
- s_j — это время начала выполнения работы j.
- И, наконец, введем еще одну переменную T для представления *длины расписания*, которая равна времени окончания выполнения поледней работы.

ЦП формулировка

$T \to \min,$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U; \; k = 1, \dots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$

$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$

$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j; \; j = 1, \dots, n.$

Минимизируем длину расписания.

ЦП формулировка

$T \to \min,$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho_{jk}^{n} x_{jt} \le R_k^n, \quad k = 1, \ldots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho_{jk}^{r} x_{j\tau} \le R_k^r, \quad t = L, \ldots, U;\ k = 1, \ldots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$

$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \ldots, n,$

$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \ldots, u_j - p_j;\ j = 1, \ldots, n.$

Каждая работа должна начинаться только один раз.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1,l_j\}}^{\min\{t,u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U;\ k = 1, \dots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j;\ j = 1, \dots, n.$$

Нельзя превышать лимиты на все невозобновляемые ресурсы.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U;\ k = 1, \dots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j;\ j = 1, \dots, n.$$

В любой момент времени нельзя превышать лимиты на все возобновляемые ресурсы.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1,l_j\}}^{\min\{t,u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U;\ k = 1, \dots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j;\ j = 1, \dots, n.$$

Вычисляем время начала каждой работы.

ЦП формулировка

Отношения предшествования.

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1,l_j\}}^{\min\{t,u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U;\ k = 1, \dots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j;\ j = 1, \dots, n.$$

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U;\ k = 1, \dots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j;\ j = 1, \dots, n.$$

Длина расписания не меньше времени окончания каждой из работ.

ЦП формулировка

$$T \to \min,$$

$$\sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} \rho^n_{jk} x_{jt} \le R^n_k, \quad k = 1, \dots, q^n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=\max\{t-p_j+1, l_j\}}^{\min\{t, u_j-p_j\}} \rho^r_{jk} x_{j\tau} \le R^r_k, \quad t = L, \dots, U; \; k = 1, \dots, q^r,$$

$$s_j = \sum_{t=l_j}^{u_j-p_j} t \cdot x_{jt}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$s_{j_2} - s_{j_1} \ge p_{j_1}, \quad (j_1, j_2) \in E,$$

$$T - s_j \ge p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\}, \quad t = l_j, \dots, u_j - p_j; \; j = 1, \dots, n.$$

Описываем переменные.