Теория массового обслуживания

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2014

План лекции

1. Системы массового обслуживания (СМО)
   - Потоки событий
   - Схема гибели и размножения
   - Формулы Литтла
2. Примеры систем массового обслуживания
   - Многоканальная СМО с отказами
   - Одноканальная СМО с неограниченной очередью
   - Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Системы массового обслуживания

- Каждая *система массового обслуживания* (СМО) состоит из одного или нескольких «приборов», которые мы будем называть *каналами* обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.
- СМО могут быть *одноканальными* и *многоканальными*.
- Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или «требований»), которые поступают в случайные моменты времени.
- Обслуживание заявки продолжается какое-то время (в общем случае продолжительность обслуживания заявки есть случайная величина),
- после чего канал освобождается и готов к обслуживанию следующей заявки.

Системы массового обслуживания

- Каждая *система массового обслуживания* (СМО) состоит из одного или нескольких «приборов», которые мы будем называть *каналами* обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.
- СМО могут быть *одноканальными* и *многоканальными*.
- Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или «требований»), которые поступают в случайные моменты времени.
- Обслуживание заявки продолжается какое-то время (в общем случае продолжительность обслуживания заявки есть случайная величина),
- после чего канал освобождается и готов к обслуживанию следующей заявки.

Системы массового обслуживания

- Каждая *система массового обслуживания* (СМО) состоит из одного или нескольких «приборов», которые мы будем называть *каналами* обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.
- СМО могут быть *одноканальными* и *многоканальными*.
- Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или «требований»), которые поступают в случайные моменты времени.
- Обслуживание заявки продолжается какое-то время (в общем случае продолжительность обслуживания заявки есть случайная величина),
- после чего канал освобождается и готов к обслуживанию следующей заявки.

Системы массового обслуживания

- Каждая *система массового обслуживания* (СМО) состоит из одного или нескольких «приборов», которые мы будем называть *каналами* обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.
- СМО могут быть *одноканальными* и *многоканальными*.
- Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или «требований»), которые поступают в случайные моменты времени.
- Обслуживание заявки продолжается какое-то время (в общем случае продолжительность обслуживания заявки есть случайная величина),
- после чего канал освобождается и готов к обслуживанию следующей заявки.

Системы массового обслуживания

- Каждая *система массового обслуживания* (СМО) состоит из одного или нескольких «приборов», которые мы будем называть *каналами* обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.
- СМО могут быть *одноканальными* и *многоканальными*.
- Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или «требований»), которые поступают в случайные моменты времени.
- Обслуживание заявки продолжается какое-то время (в общем случае продолжительность обслуживания заявки есть случайная величина),
- после чего канал освобождается и готов к обслуживанию следующей заявки.

Системы массового обслуживания

- Каждая *система массового обслуживания* (СМО) состоит из одного или нескольких «приборов», которые мы будем называть *каналами* обслуживания.
- Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, вебсерверы, серверы баз данных и др.
- СМО могут быть *одноканальными* и *многоканальными*.
- Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или «требований»), которые поступают в случайные моменты времени.
- Обслуживание заявки продолжается какое-то время (в общем случае продолжительность обслуживания заявки есть случайная величина),
- после чего канал освобождается и готов к обслуживанию следующей заявки.

План лекции

1. Системы массового обслуживания (СМО)
   - Потоки событий
   - Схема гибели и размножения
   - Формулы Литтла

2. Примеры систем массового обслуживания
   - Многоканальная СМО с отказами
   - Одноканальная СМО с неограниченной очередью
   - Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,
  - или завершается обслуживание некоторой заявки,
  - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются *пуассоновскими*.

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,
  - или завершается обслуживание некоторой заявки,
  - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются *пуассоновскими*.

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,
  - или завершается обслуживание некоторой заявки,
  - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются *пуассоновскими*.

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
    - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
    - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
    - появляется новая заявка,
    - или завершается обслуживание некоторой заявки,
    - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются *пуассоновскими*.

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,
  - или завершается обслуживание некоторой заявки,
  - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются *пуассоновскими*.

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,
  - или завершается обслуживание некоторой заявки,
  - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются *пуассоновскими*.

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,
  - или завершается обслуживание некоторой заявки,
  - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются *пуассоновскими*.

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,
  - или завершается обслуживание некоторой заявки,
  - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются *пуассоновскими*.

Потоки заявок и обслуживаний

- Случайный характер потока заявок и продолжит. их обслуживания приводит к тому, что
  - в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными);
  - в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- состояние СМО меняется скачком в моменты, когда
  - появляется новая заявка,
  - или завершается обслуживание некоторой заявки,
  - или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются *пуассоновскими*.

Пуассоновские случайные процессы

- Бесконечное семейство случайных величин $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ называется *пуассоновским процессом с параметром* (или *средним*) λ, если оно удовлетворяет следующим условиям:
  1. $X(0) = 0$;
  2. (*отсутствие памяти*) приращения $X(\tau_i + t_i) - X(\tau_i)$ на произвольных непересекающихся интервалах $[\tau_i, \tau_i + t_i]$, $i = 1, \ldots, k$, — независимые случайные величины;
  3. (*стационарность*) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ случайная величина $X(t)$ имеет распределение Пуассона $\pi_{\lambda t}$.
- Дискретная случайная величина Y, принимающая неотрицательные целые значения, имеет распределение Пуассона π_α с параметром α, если

$$\mathbb{P}(Y = k) = \pi_\alpha(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\alpha}}{k!}\alpha^k \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пуассоновские случайные процессы

- Бесконечное семейство случайных величин $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ называется *пуассоновским процессом с параметром* (или *средним*) λ, если оно удовлетворяет следующим условиям:
  1. $X(0) = 0$;
  2. (*отсутствие памяти*) приращения $X(\tau_i + t_i) - X(\tau_i)$ на произвольных непересекающихся интервалах $[\tau_i, \tau_i + t_i]$, $i = 1, \ldots, k$, — независимые случайные величины;
  3. (*стационарность*) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ случайная величина $X(t)$ имеет распределение Пуассона $\pi_{\lambda t}$.
- Дискретная случайная величина Y, принимающая неотрицательные целые значения, имеет распределение Пуассона π_α с параметром α, если

$$\mathbb{P}(Y = k) = \pi_\alpha(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\alpha}}{k!}\alpha^k \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пуассоновские случайные процессы

- Бесконечное семейство случайных величин $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ называется *пуассоновским процессом с параметром* (или *средним*) λ, если оно удовлетворяет следующим условиям:
  1. $X(0) = 0$;
  2. (*отсутствие памяти*) приращения $X(\tau_i + t_i) - X(\tau_i)$ на произвольных непересекающихся интервалах $[\tau_i, \tau_i + t_i]$, $i = 1, \ldots, k$, — независимые случайные величины;
  3. (*стационарность*) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ случайная величина $X(t)$ имеет распределение Пуассона $\pi_{\lambda t}$.
- Дискретная случайная величина Y, принимающая неотрицательные целые значения, имеет распределение Пуассона π_α с параметром α, если

$$\mathbb{P}(Y = k) = \pi_\alpha(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\alpha}}{k!}\alpha^k \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пуассоновские случайные процессы

- Бесконечное семейство случайных величин $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ называется *пуассоновским процессом с параметром* (или *средним*) λ, если оно удовлетворяет следующим условиям:
  1. $X(0) = 0$;
  2. (*отсутствие памяти*) приращения $X(\tau_i + t_i) - X(\tau_i)$ на произвольных непересекающихся интервалах $[\tau_i, \tau_i + t_i]$, $i = 1, \ldots, k$, — независимые случайные величины;
  3. (*стационарность*) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ случайная величина $X(t)$ имеет распределение Пуассона $\pi_{\lambda t}$.
- Дискретная случайная величина Y, принимающая неотрицательные целые значения, имеет распределение Пуассона π_α с параметром α, если

$$\mathbb{P}(Y = k) = \pi_\alpha(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\alpha}}{k!}\alpha^k \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пуассоновские случайные процессы

- Бесконечное семейство случайных величин $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ называется *пуассоновским процессом с параметром* (или *средним*) λ, если оно удовлетворяет следующим условиям:
  1. $X(0) = 0$;
  2. (*отсутствие памяти*) приращения $X(\tau_i + t_i) - X(\tau_i)$ на произвольных непересекающихся интервалах $[\tau_i, \tau_i + t_i]$, $i = 1, \dots, k$, — независимые случайные величины;
  3. (*стационарность*) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ случайная величина $X(t)$ имеет распределение Пуассона $\pi_{\lambda t}$.
- Дискретная случайная величина Y, принимающая неотрицательные целые значения, имеет распределение Пуассона π_α с параметром α, если

$$\mathbb{P}(Y = k) = \pi_\alpha(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{k!}\alpha^k \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2, \ldots$ могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого *потока событий*, каким может быть
  - поток автомобилей на некотором перекрестке,
  - поток покупателей у кассы в супермаркете,
  - поток вызовов скорой помощи,
  - поток отказов некоторого технического устройства,
  - поток запросов информации с некоторого вебсервера и т. д..

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2, \ldots$ могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого *потока событий*, каким может быть
  - поток автомобилей на некотором перекрестке,
  - поток покупателей у кассы в супермаркете,
  - поток вызовов скорой помощи,
  - поток отказов некоторого технического устройства,
  - поток запросов информации с некоторого вебсервера и т. д..

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2, \ldots$ могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого *потока событий*, каким может быть
  - поток автомобилей на некотором перекрестке,
  - поток покупателей у кассы в супермаркете,
  - поток вызовов скорой помощи,
  - поток отказов некоторого технического устройства,
  - поток запросов информации с некоторого вебсервера и т. д..

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \ldots$, имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2, \ldots$ могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого *потока событий*, каким может быть
  - поток автомобилей на некотором перекрестке,
  - поток покупателей у кассы в супермаркете,
  - поток вызовов скорой помощи,
  - поток отказов некоторого технического устройства,
  - поток запросов информации с некоторого вебсервера и т. д..

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2, \ldots$ могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого *потока событий*, каким может быть
    - поток автомобилей на некотором перекрестке,
    - поток покупателей у кассы в супермаркете,
    - поток вызовов скорой помощи,
    - поток отказов некоторого технического устройства,
    - поток запросов информации с некоторого вебсервера и т. д..

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \ldots$, имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Например, $T_1, T_2, \ldots$ могут быть интервалы времени между последовательными событиями некоторого *потока событий*, каким может быть
  - поток автомобилей на некотором перекрестке,
  - поток покупателей у кассы в супермаркете,
  - поток вызовов скорой помощи,
  - поток отказов некоторого технического устройства,
  - поток запросов информации с некоторого вебсервера и т. д..

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Поскольку средняя продолжит. интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр λ можно рассматривать как *интенсивность потока*,
- которая равна среднему количеству событий, происходящих в единицу времени.
- Обозначим через $N(t)$ количество событий, произошедших в промежутке времени $[0, t]$.
- Можно доказать, что семейство $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ является пуассоновским процессом с параметром λ.
- В частности, $\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(T_1 + T_2 + \cdots + T_k \leq t) = \pi_{\lambda t}(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Поскольку средняя продолжит. интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр λ можно рассматривать как *интенсивность потока*,
- которая равна среднему количеству событий, происходящих в единицу времени.
- Обозначим через $N(t)$ количество событий, произошедших в промежутке времени $[0, t]$.
- Можно доказать, что семейство $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ является пуассоновским процессом с параметром λ.
- В частности, $\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(T_1 + T_2 + \cdots + T_k \leq t) = \pi_{\lambda t}(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \ldots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Поскольку средняя продолжит. интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр λ можно рассматривать как *интенсивность потока*,
- которая равна среднему количеству событий, происходящих в единицу времени.
- Обозначим через $N(t)$ количество событий, произошедших в промежутке времени $[0, t]$.
- Можно доказать, что семейство $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ является пуассоновским процессом с параметром λ.
- В частности, $\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(T_1 + T_2 + \cdots + T_k \leq t) = \pi_{\lambda t}(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \dots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Поскольку средняя продолжит. интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр λ можно рассматривать как *интенсивность потока*,
- которая равна среднему количеству событий, происходящих в единицу времени.
- Обозначим через $N(t)$ количество событий, произошедших в промежутке времени $[0, t]$.
- Можно доказать, что семейство $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ является пуассоновским процессом с параметром λ.
- В частности, $\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(T_1 + T_2 + \dots + T_k \leq t) = \pi_{\lambda t}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Интерпретация пуассоновского процесса

- Рассмотрим бесконечную последовательность случайных величин $T_1, T_2, \dots,$ имеющих экспоненциальную плотность распределения $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$.
- Поскольку средняя продолжит. интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр λ можно рассматривать как *интенсивность потока*,
- которая равна среднему количеству событий, происходящих в единицу времени.
- Обозначим через $N(t)$ количество событий, произошедших в промежутке времени $[0, t]$.
- Можно доказать, что семейство $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ является пуассоновским процессом с параметром λ.
- В частности, $\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(T_1 + T_2 + \cdots + T_k \leq t) = \pi_{\lambda t}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$

План лекции

1. Системы массового обслуживания (СМО)
   - Потоки событий
   - Схема гибели и размножения
   - Формулы Литтла
2. Примеры систем массового обслуживания
   - Многоканальная СМО с отказами
   - Одноканальная СМО с неограниченной очередью
   - Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Граф состояний

- Термин «схема гибели и размножения» в биологии описывает изменение численности популяции.
- Схема гибели и размножения очень часто встречается и в задачах теории массового обслуживания, поэтому мы и начинаем с ее рассмотрения.
- Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет следующий вид,
- где состояние S_k означает, что численность популяции равна k.

Граф состояний

- Термин «схема гибели и размножения» в биологии описывает изменение численности популяции.
- Схема гибели и размножения очень часто встречается и в задачах теории массового обслуживания, поэтому мы и начинаем с ее рассмотрения.
- Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет следующий вид,
- где состояние S_k означает, что численность популяции равна k.

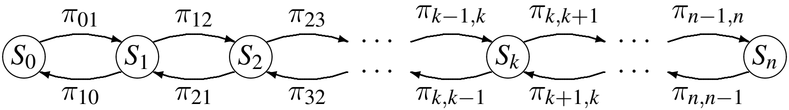
Граф состояний

- Термин «схема гибели и размножения» в биологии описывает изменение численности популяции.
- Схема гибели и размножения очень часто встречается и в задачах теории массового обслуживания, поэтому мы и начинаем с ее рассмотрения.
- Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет следующий вид,
- где состояние S_k означает, что численность популяции равна k.

$$
\begin{tikzcd}
S_0 \arrow[r, bend left, "\pi_{01}"] & S_1 \arrow[l, bend left, "\pi_{10}"] \arrow[r, bend left, "\pi_{12}"] & S_2 \arrow[l, bend left, "\pi_{21}"] \arrow[r, bend left, "\pi_{23}"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\pi_{32}"] \arrow[r, bend left, "\pi_{k-1,k}"] & S_k \arrow[l, bend left, "\pi_{k,k-1}"] \arrow[r, bend left, "\pi_{k,k+1}"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\pi_{k+1,k}"] \arrow[r, bend left, "\pi_{n-1,n}"] & S_n \arrow[l, bend left, "\pi_{n,n-1}"]
\end{tikzcd}
$$

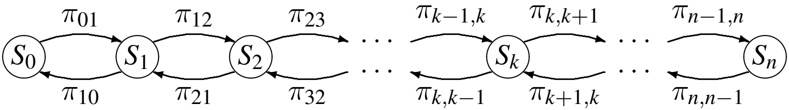
Граф состояний

- Термин «схема гибели и размножения» в биологии описывает изменение численности популяции.
- Схема гибели и размножения очень часто встречается и в задачах теории массового обслуживания, поэтому мы и начинаем с ее рассмотрения.
- Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет следующий вид,
- где состояние S_k означает, что численность популяции равна k.



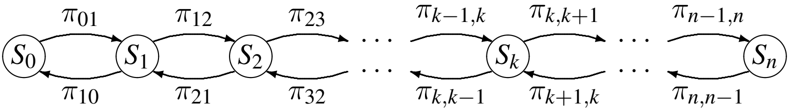
Граф состояний

- Термин «схема гибели и размножения» в биологии описывает изменение численности популяции.
- Схема гибели и размножения очень часто встречается и в задачах теории массового обслуживания, поэтому мы и начинаем с ее рассмотрения.
- Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет следующий вид,
- где состояние S_k означает, что численность популяции равна k.



Вернуться к финальным вероятностям

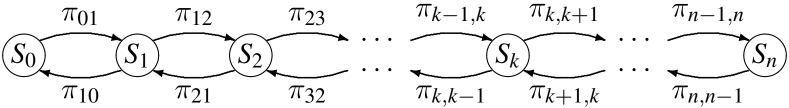
Уравнения Колмогорова



- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью
  - $\pi_{k-1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};
  - $\pi_{k+1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k+1};
  - $1 - (\pi_{k,k-1} + \pi_{k,k+1})\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_k.
- Поэтому справедливо равенство

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t$$
$$+p_k(t)\left(1 - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})\Delta t\right).$$

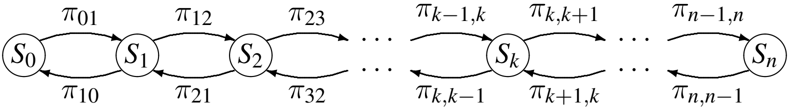
Уравнения Колмогорова



- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью
  - $\pi_{k-1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};
  - $\pi_{k+1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k+1};
  - $1 - (\pi_{k,k-1} + \pi_{k,k+1})\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_k.
- Поэтому справедливо равенство

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t$$
$$+p_k(t)\left(1 - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})\Delta t\right).$$

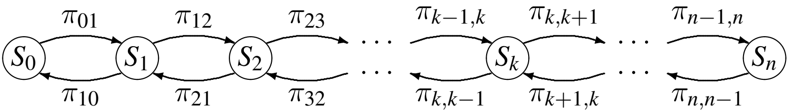
Уравнения Колмогорова



- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью
  - $\pi_{k-1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};
  - $\pi_{k+1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k+1};
  - $1 - (\pi_{k,k-1} + \pi_{k,k+1})\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_k.
- Поэтому справедливо равенство

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t$$
$$+p_k(t)\left(1 - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})\Delta t\right).$$

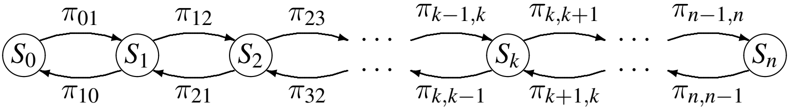
Уравнения Колмогорова



- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью
  - $\pi_{k-1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};
  - $\pi_{k+1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k+1};
  - $1 - (\pi_{k,k-1} + \pi_{k,k+1})\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_k.
- Поэтому справедливо равенство

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t$$
$$+p_k(t)\left(1 - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})\Delta t\right).$$

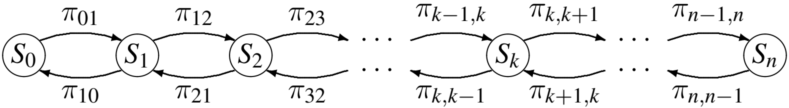
Уравнения Колмогорова



- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью
  - $\pi_{k-1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};
  - $\pi_{k+1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k+1};
  - $1 - (\pi_{k,k-1} + \pi_{k,k+1})\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_k.
- Поэтому справедливо равенство

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t$$
$$+p_k(t)\left(1 - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})\Delta t\right).$$

Уравнения Колмогорова



- Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k.
- Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$ с вероятностью
    - $\pi_{k-1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};
    - $\pi_{k+1,k}\,\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k+1};
    - $1 - (\pi_{k,k-1} + \pi_{k,k+1})\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_k.
- Поэтому справедливо равенство

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t$$
$$+p_k(t)\left(1 - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})\Delta t\right).$$

Уравнения Колмогорова

- Разделив на Δt обе части равенства

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t$$
$$+p_k(t)\left(1-(\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})\Delta t\right),$$

- получим $\dfrac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta t} =$

$$\pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) - (\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})p_k(t).$$

- Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t)$$
$$-(\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})p_k(t), \quad k = 1,\dots,n-1.$$

- Аналогично получаем уравнения для $k=0$ и $k=n$:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \pi_{10}p_1(t) - \pi_{01}p_0(t),$$
$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \pi_{n-1,n}p_{n-1}(t) - \pi_{n,n-1}p_n(t).$$

Уравнения Колмогорова

- Разделив на Δt обе части равенства

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t + p_k(t)\left(1 - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})\Delta t\right),$$

- получим $\dfrac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} =$

$$\pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k(t).$$

- Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k(t), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

- Аналогично получаем уравнения для $k = 0$ и $k = n$:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \pi_{10}p_1(t) - \pi_{01}p_0(t),$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \pi_{n-1,n}p_{n-1}(t) - \pi_{n,n-1}p_n(t).$$

Уравнения Колмогорова

- Разделив на Δt обе части равенства

$$p_k(t+\Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t$$
$$+p_k(t)\left(1-(\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})\Delta t\right),$$

- получим $\dfrac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta t} =$

$$\pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) - (\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})p_k(t).$$

- Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t)$$
$$-(\pi_{k,k+1}+\pi_{k,k-1})p_k(t), \quad k = 1,\dots,n-1.$$

- Аналогично получаем уравнения для $k=0$ и $k=n$:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \pi_{10}p_1(t) - \pi_{01}p_0(t),$$
$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \pi_{n-1,n}p_{n-1}(t) - \pi_{n,n-1}p_n(t).$$

Уравнения Колмогорова

- Разделив на Δt обе части равенства
$$p_k(t+\Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t \\ + p_k(t)\left(1 - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})\Delta t\right),$$
- получим $\dfrac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} =$
$$\pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k(t).$$
- Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим
$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) \\ -(\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k(t), \quad k = 1, \dots, n-1.$$
- Аналогично получаем уравнения для $k = 0$ и $k = n$:
$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \pi_{10}p_1(t) - \pi_{01}p_0(t),$$
$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \pi_{n-1,n}p_{n-1}(t) - \pi_{n,n-1}p_n(t).$$

Стационарный режим

- Если в системе установился стационарный режим, то все вероятности $p_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} p_k$ не зависят от времени.
- Мы можем вычислить *финальные вероятности* $p_0, p_1, \dots, p_n$ состояний системы, где p_i есть доля времени, когда система пребывает в состоянии S_i,
- решая систему уравнений Колмогорова, с учетом того, что $\frac{dp_k(t)}{dt} = 0$ для $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$

$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

Стационарный режим

- Если в системе установился стационарный режим, то все вероятности $p_k(t) \overset{\text{def}}{=} p_k$ не зависят от времени.
- Мы можем вычислить *финальные вероятности* $p_0, p_1, \ldots, p_n$ состояний системы, где p_i есть доля времени, когда система пребывает в состоянии S_i,
- решая систему уравнений Колмогорова, с учетом того, что $\frac{dp_k(t)}{dt} = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$
$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$
$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

Стационарный режим

- Если в системе установился стационарный режим, то все вероятности $p_k(t) \overset{\text{def}}{=} p_k$ не зависят от времени.
- Мы можем вычислить *финальные вероятности* $p_0, p_1, \ldots, p_n$ состояний системы, где p_i есть доля времени, когда система пребывает в состоянии S_i,
- решая систему уравнений Колмогорова, с учетом того, что $\frac{dp_k(t)}{dt} = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$
$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$
$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

Стационарный режим

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$
$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0, \quad k = 1, \dots, n-1,$$
$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

- Для состояния S_0 справедливо равенство: $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$.
- Для состояния S_1 имеем: $(\pi_{10} + \pi_{12})p_1 = \pi_{01}p_0 + \pi_{21}p_2$.
- С учетом равенства $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$, последнее равенство приводится к виду $\pi_{12}p_1 = \pi_{21}p_2$.
- Далее, совершенно аналогично получаем равенство $\pi_{23}p_2 = \pi_{32}p_3$.
- Для любого $k = 1, \dots, n$ имеем: $\pi_{k-1,k}p_{k-1} = \pi_{k,k-1}p_k$.

Стационарный режим

$$\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,$$
$$\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1} - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0, \quad k = 1, \dots, n-1,$$
$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.$$

- Для состояния S_0 справедливо равенство: $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$.
- Для состояния S_1 имеем: $(\pi_{10} + \pi_{12})p_1 = \pi_{01}p_0 + \pi_{21}p_2$.
- С учетом равенства $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$, последнее равенство приводится к виду $\pi_{12}p_1 = \pi_{21}p_2$.
- Далее, совершенно аналогично получаем равенство $\pi_{23}p_2 = \pi_{32}p_3$.
- Для любого $k = 1, \dots, n$ имеем: $\pi_{k-1,k}p_{k-1} = \pi_{k,k-1}p_k$.

Стационарный режим

$$
\begin{aligned}
&\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,\\
&\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1}\\
&\qquad\qquad -(\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0, \quad k = 1,\dots,n-1,\\
&\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.
\end{aligned}
$$

- Для состояния S_0 справедливо равенство: $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$.
- Для состояния S_1 имеем: $(\pi_{10} + \pi_{12})p_1 = \pi_{01}p_0 + \pi_{21}p_2$.
- С учетом равенства $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$, последнее равенство приводится к виду $\pi_{12}p_1 = \pi_{21}p_2$.
- Далее, совершенно аналогично получаем равенство $\pi_{23}p_2 = \pi_{32}p_3$.
- Для любого $k = 1,\dots,n$ имеем: $\pi_{k-1,k}p_{k-1} = \pi_{k,k-1}p_k$.

Стационарный режим

$$\begin{aligned}
&\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,\\
&\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1}\\
&\qquad\qquad -(\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0, \quad k = 1, \dots, n-1,\\
&\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.
\end{aligned}$$

- Для состояния S_0 справедливо равенство: $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$.
- Для состояния S_1 имеем: $(\pi_{10} + \pi_{12})p_1 = \pi_{01}p_0 + \pi_{21}p_2$.
- С учетом равенства $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$, последнее равенство приводится к виду $\pi_{12}p_1 = \pi_{21}p_2$.
- Далее, совершенно аналогично получаем равенство $\pi_{23}p_2 = \pi_{32}p_3$.
- Для любого $k = 1, \dots, n$ имеем: $\pi_{k-1,k}p_{k-1} = \pi_{k,k-1}p_k$.

Стационарный режим

$$
\begin{aligned}
&\pi_{10}p_1 - \pi_{01}p_0 = 0,\\
&\pi_{k+1,k}p_{k+1} + \pi_{k-1,k}p_{k-1}\\
&\qquad\qquad -(\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k = 0, \quad k = 1, \dots, n-1,\\
&\pi_{n-1,n}p_{n-1} - \pi_{n,n-1}p_n = 0.
\end{aligned}
$$

- Для состояния S_0 справедливо равенство: $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$.
- Для состояния S_1 имеем: $(\pi_{10} + \pi_{12})p_1 = \pi_{01}p_0 + \pi_{21}p_2$.
- С учетом равенства $\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$, последнее равенство приводится к виду $\pi_{12}p_1 = \pi_{21}p_2$.
- Далее, совершенно аналогично получаем равенство $\pi_{23}p_2 = \pi_{32}p_3$.
- Для любого $k = 1, \dots, n$ имеем: $\pi_{k-1,k}p_{k-1} = \pi_{k,k-1}p_k$.

Финальные вероятности

Итак, финальные вероятности удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}
\pi_{01}p_0 &= \pi_{10}p_1,\\
\pi_{12}p_1 &= \pi_{21}p_2,\\
&\dots\\
\pi_{k-1,k}p_{k-1} &= \pi_{k,k-1}p_k,\\
&\dots\\
\pi_{n-1,n}p_{n-1} &= \pi_{n,n-1}p_n.
\end{aligned}$$

- Из первого уравнения выразим $p_1 = \dfrac{\pi_{01}}{\pi_{10}}p_0$.
- Из второго найдем $p_2 = \dfrac{\pi_{12}}{\pi_{21}}p_1 = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}}p_0$.
- Из третьего получим $p_3 = \dfrac{\pi_{23}}{\pi_{32}}p_2 = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}\pi_{23}}{\pi_{32}\pi_{21}\pi_{10}}p_0$.
- В общем случае $p_k = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1,\dots,n.$

Финальные вероятности

Итак, финальные вероятности удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}
\pi_{01}p_0 &= \pi_{10}p_1,\\
\pi_{12}p_1 &= \pi_{21}p_2,\\
&\dots\\
\pi_{k-1,k}p_{k-1} &= \pi_{k,k-1}p_k,\\
&\dots\\
\pi_{n-1,n}p_{n-1} &= \pi_{n,n-1}p_n.
\end{aligned}$$

- Из первого уравнения выразим $p_1 = \dfrac{\pi_{01}}{\pi_{10}}p_0$.
- Из второго найдем $p_2 = \dfrac{\pi_{12}}{\pi_{21}}p_1 = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}}p_0$.
- Из третьего получим $p_3 = \dfrac{\pi_{23}}{\pi_{32}}p_2 = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}\pi_{23}}{\pi_{32}\pi_{21}\pi_{10}}p_0$.
- В общем случае $p_k = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1,\dots,n.$

Финальные вероятности

Итак, финальные вероятности удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \pi_{01}p_0 &= \pi_{10}p_1, \\ \pi_{12}p_1 &= \pi_{21}p_2, \\ &\dots \\ \pi_{k-1,k}p_{k-1} &= \pi_{k,k-1}p_k, \\ &\dots \\ \pi_{n-1,n}p_{n-1} &= \pi_{n,n-1}p_n. \end{aligned}$$

- Из первого уравнения выразим $p_1 = \dfrac{\pi_{01}}{\pi_{10}} p_0.$
- Из второго найдем $p_2 = \dfrac{\pi_{12}}{\pi_{21}} p_1 = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} p_0.$
- Из третьего получим $p_3 = \dfrac{\pi_{23}}{\pi_{32}} p_2 = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}\pi_{23}}{\pi_{32}\pi_{21}\pi_{10}} p_0.$
- В общем случае $p_k = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}} p_0, \quad k = 1, \dots, n.$

Финальные вероятности

Итак, финальные вероятности удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \pi_{01}p_0 &= \pi_{10}p_1, \\ \pi_{12}p_1 &= \pi_{21}p_2, \\ &\dots \\ \pi_{k-1,k}p_{k-1} &= \pi_{k,k-1}p_k, \\ &\dots \\ \pi_{n-1,n}p_{n-1} &= \pi_{n,n-1}p_n. \end{aligned}$$

- Из первого уравнения выразим $p_1 = \dfrac{\pi_{01}}{\pi_{10}}p_0.$
- Из второго найдем $p_2 = \dfrac{\pi_{12}}{\pi_{21}}p_1 = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}}p_0.$
- Из третьего получим $p_3 = \dfrac{\pi_{23}}{\pi_{32}}p_2 = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}\pi_{23}}{\pi_{32}\pi_{21}\pi_{10}}p_0.$
- В общем случае $p_k = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1,\dots,n.$

Финальные вероятности

Итак, финальные вероятности удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \pi_{01}p_0 &= \pi_{10}p_1, \\ \pi_{12}p_1 &= \pi_{21}p_2, \\ &\dots \\ \pi_{k-1,k}p_{k-1} &= \pi_{k,k-1}p_k, \\ &\dots \\ \pi_{n-1,n}p_{n-1} &= \pi_{n,n-1}p_n. \end{aligned}$$

- Из первого уравнения выразим $p_1 = \dfrac{\pi_{01}}{\pi_{10}}p_0.$
- Из второго найдем $p_2 = \dfrac{\pi_{12}}{\pi_{21}}p_1 = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}}p_0.$
- Из третьего получим $p_3 = \dfrac{\pi_{23}}{\pi_{32}}p_2 = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}\pi_{23}}{\pi_{32}\pi_{21}\pi_{10}}p_0.$
- В общем случае $p_k = \dfrac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1,\dots,n.$

Финальные вероятности

- В полученной формуле
$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1,\dots,n,$$
- числитель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих слева направо от состояния S_0 до состояния S_k,
- а знаменатель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих справа налево от состояния S_k до состояния S_0.
- Подставив выражения для $p_1,\dots,p_n$ в равенство
$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$
- найдем
$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \dots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1}.$$

Финальные вероятности

- В полученной формуле
$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}} p_0, \quad k = 1, \dots, n,$$
- числитель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих слева направо от состояния S_0 до состояния S_k,
- а знаменатель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих справа налево от состояния S_k до состояния S_0.
- Подставив выражения для $p_1, \dots, p_n$ в равенство
$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$
- найдем
$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \dots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1}.$$

Финальные вероятности

- В полученной формуле
$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\ldots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\ldots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1,\ldots,n,$$
- числитель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих слева направо от состояния S_0 до состояния S_k,
- а знаменатель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих справа налево от состояния S_k до состояния S_0. К графу состояний
- Подставив выражения для $p_1,\ldots,p_n$ в равенство
$$p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1,$$
- найдем
$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \cdots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\ldots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\ldots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1}.$$

Финальные вероятности

- В полученной формуле
$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}} p_0, \quad k = 1,\dots,n,$$
- числитель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих слева направо от состояния S_0 до состояния S_k,
- а знаменатель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих справа налево от состояния S_k до состояния S_0.
- Подставив выражения для $p_1,\dots,p_n$ в равенство
$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$
- найдем
$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \dots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1}.$$

Финальные вероятности

- В полученной формуле
$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1,\dots,n,$$
- числитель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих слева направо от состояния S_0 до состояния S_k,
- а знаменатель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих справа налево от состояния S_k до состояния S_0.
- Подставив выражения для $p_1,\dots,p_n$ в равенство
$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$
- найдем
$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \dots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1}.$$

План лекции

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,
- и поток заявок, *покидающих* СМО.
- Если в системе установился предельный стационарный режим,
- то среднее число заявок, поступающих в СМО, равно среднему числу заявок, покидающих СМО,
- т. е. оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,
- и поток заявок, *покидающих* СМО.
- Если в системе установился предельный стационарный режим,
- то среднее число заявок, поступающих в СМО, равно среднему числу заявок, покидающих СМО,
- т. е. оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,
- и поток заявок, *покидающих* СМО.
- Если в системе установился предельный стационарный режим,
- то среднее число заявок, поступающих в СМО, равно среднему числу заявок, покидающих СМО,
- т. е. оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,
- и поток заявок, *покидающих* СМО.
- Если в системе установился предельный стационарный режим,
- то среднее число заявок, поступающих в СМО, равно среднему числу заявок, покидающих СМО,
- т. е. оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,
- и поток заявок, *покидающих* СМО.
- Если в системе установился предельный стационарный режим,
- то среднее число заявок, поступаюших в СМО, равно среднему числу заявок, покидающих СМО,
- т. е. оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий:
- поток заявок, *поступающих* в СМО,
- и поток заявок, *покидающих* СМО.
- Если в системе установился предельный стационарный режим,
- то среднее число заявок, поступаюших в СМО, равно среднему числу заявок, покидающих СМО,
- т. е. оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ — число заявок, покинувших СМО до момента t.
- И та и другая функции являются случайными,
  - $X(t)$ увеличиваются на единицу в момент поступления новой заявки,
  - а $Y(t)$ уменьшается на единицу в момент, когда некоторая заявка покидает систему.
- Для любого момента t разность $Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} X(t) - Y(t)$ есть число заявок, находящихся в СМО. Когда $Z(t) = 0$, в системе нет заявок.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ — число заявок, покинувших СМО до момента t.
- И та и другая функции являются случайными,
  - $X(t)$ увеличиваются на единицу в момент поступления новой заявки,
  - а $Y(t)$ уменьшается на единицу в момент, когда некоторая заявка покидает систему.
- Для любого момента t разность $Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} X(t) - Y(t)$ есть число заявок, находящихся в СМО. Когда $Z(t) = 0$, в системе нет заявок.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ — число заявок, покинувших СМО до момента t.
- И та и другая функции являются случайными,
  - $X(t)$ увеличиваются на единицу в момент поступления новой заявки,
  - а $Y(t)$ уменьшается на единицу в момент, когда некоторая заявка покидает систему.
- Для любого момента t разность $Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} X(t) - Y(t)$ есть число заявок, находящихся в СМО. Когда $Z(t) = 0$, в системе нет заявок.

Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ — число заявок, покинувших СМО до момента t.
- И та и другая функции являются случайными,
  - $X(t)$ увеличиваются на единицу в момент поступления новой заявки,
  - а $Y(t)$ уменьшается на единицу в момент, когда некоторая заявка покидает систему.
- Для любого момента t разность $Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} X(t) - Y(t)$ есть число заявок, находящихся в СМО. Когда $Z(t) = 0$, в системе нет заявок.

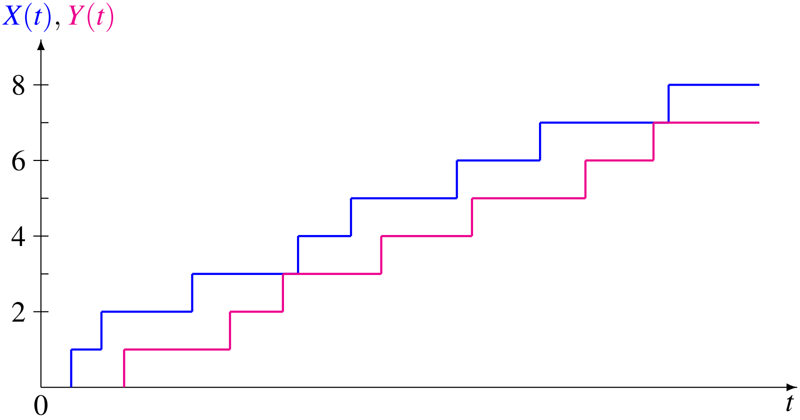
Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ — число заявок, покинувших СМО до момента t.
- И та и другая функции являются случайными,
  - $X(t)$ увеличиваются на единицу в момент поступления новой заявки,
  - а $Y(t)$ уменьшается на единицу в момент, когда некоторая заявка покидает систему.
- Для любого момента t разность $Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} X(t) - Y(t)$ есть число заявок, находящихся в СМО. Когда $Z(t) = 0$, в системе нет заявок.

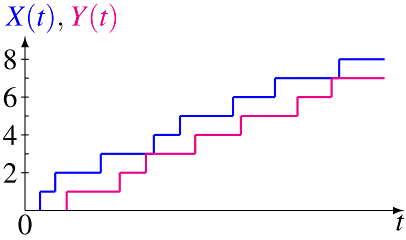
Потоки заявок и обслуживаний в стационарном режиме

- Обозначим через $X(t)$ число заявок, поступивших в СМО до момента времени t,
- а через $Y(t)$ — число заявок, покинувших СМО до момента t.
- И та и другая функции являются случайными,
  - $X(t)$ увеличиваются на единицу в момент поступления новой заявки,
  - а $Y(t)$ уменьшается на единицу в момент, когда некоторая заявка покидает систему.
- Для любого момента t разность $Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} X(t) - Y(t)$ есть число заявок, находящихся в СМО. Когда $Z(t) = 0$, в системе нет заявок.

Поведение функций $X(t)$ и $Y(t)$

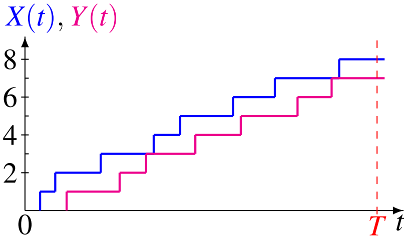


Первая формула Литтла



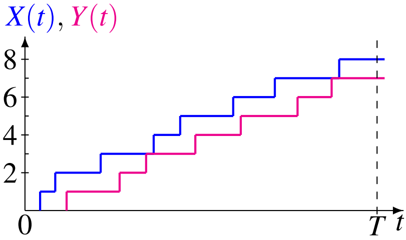
- Рассмотрим очень большой промежуток времени T
- и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt.$
- Этот интеграл равен площади заштрихованной фигуры.
- Фигура состоит из прямоугольников, k-й из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени t_k пребывания в системе заявки, поступившей k-й по счету.

Первая формула Литтла



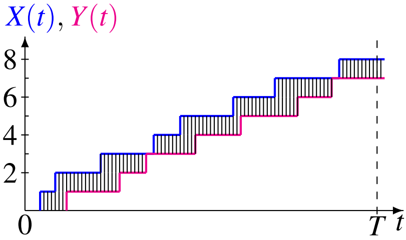
- Рассмотрим очень большой промежуток времени T
- и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt$.
- Этот интеграл равен площади заштрихованной фигуры.
- Фигура состоит из прямоугольников, k-й из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени t_k пребывания в системе заявки, поступившей k-й по счету.

Первая формула Литтла



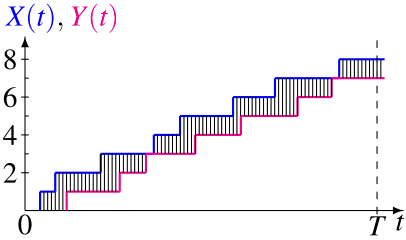
- Рассмотрим очень большой промежуток времени T
- и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T Z(t)dt.$
- Этот интеграл равен площади заштрихованной фигуры.
- Фигура состоит из прямоугольников, k-й из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени t_k пребывания в системе заявки, поступившей k-й по счету.

Первая формула Литтла



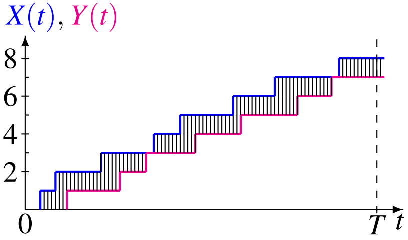
- Рассмотрим очень большой промежуток времени T
- и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $$\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt.$$
- Этот интеграл равен площади заштрихованной фигуры.
- Фигура состоит из прямоугольников, k-й из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени t_k пребывания в системе заявки, поступившей k-й по счету.

Первая формула Литтла



- Рассмотрим очень большой промежуток времени T
- и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО: $\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt.$
- Этот интеграл равен площади заштрихованной фигуры.
- Фигура состоит из прямоугольников, k-й из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени t_k пребывания в системе заявки, поступившей k-й по счету.

Первая формула Литтла

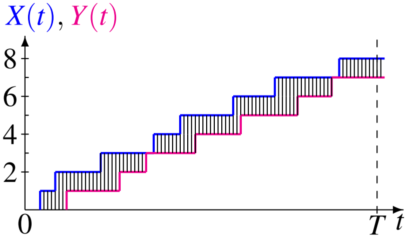


- В конце промежутка $[0, T]$ некоторые прямоугольники войдут в заштрихованную фигуру не полностью,
- но при достаточно больших T

$$\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt \approx \sum_{k=1}^{k(T)} t_k,$$

- где $k(T)$ — количество заявок, поступивших в СМО за время T.

Первая формула Литтла

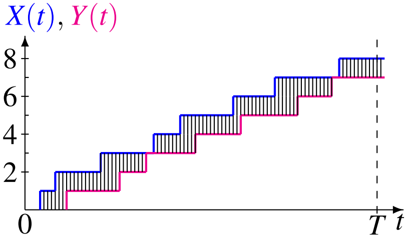


- В конце промежутка $[0, T]$ некоторые прямоугольники войдут в заштрихованную фигуру не полностью,
- но при достаточно больших T

$$\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt \approx \sum_{k=1}^{k(T)} t_k,$$

- где $k(T)$ — количество заявок, поступивших в СМО за время T.

Первая формула Литтла



- В конце промежутка $[0, T]$ некоторые прямоугольники войдут в заштрихованную фигуру не полностью,
- но при достаточно больших T

$$\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt \approx \sum_{k=1}^{k(T)} t_k,$$

- где $k(T)$ — количество заявок, поступивших в СМО за время T.

Первая формула Литтла

- Среднее число заявок, находящихся в СМО (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), равно

$$L_{\text{сист}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{k(T)} t_k$$

$$= \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda}\sum_{k=1}^{k(T)} t_k.$$

- Но величина $T\lambda$ есть среднее число заявок, поступивших за время T.
- Поэтому $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda}\sum\limits_{k=1}^{k(T)} t_k$ есть среднее время пребывания заявки в системе, которое обозначаем через $W_{\text{сист}}$.
- Итак $L_{\text{сист}} = \lambda W_{\text{сист}}$.

Первая формула Литтла

- Среднее число заявок, находящихся в СМО (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), равно

$$L_{\text{сист}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{k(T)} t_k$$

$$= \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda}\sum_{k=1}^{k(T)} t_k.$$

- Но величина $T\lambda$ есть среднее число заявок, поступивших за время T.
- Поэтому $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda}\sum_{k=1}^{k(T)} t_k$ есть среднее время пребывания заявки в системе, которое обозначаем через $W_{\text{сист}}$.
- Итак $L_{\text{сист}} = \lambda W_{\text{сист}}$.

Первая формула Литтла

- Среднее число заявок, находящихся в СМО (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), равно

$$L_{\text{сист}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{k(T)} t_k$$

$$= \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda}\sum_{k=1}^{k(T)} t_k.$$

- Но величина $T\lambda$ есть среднее число заявок, поступивших за время T.
- Поэтому $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda}\sum_{k=1}^{k(T)} t_k$ есть среднее время пребывания заявки в системе, которое обозначаем через $W_{\text{сист}}$.
- Итак $L_{\text{сист}} = \lambda W_{\text{сист}}$.

Первая формула Литтла

- Среднее число заявок, находящихся в СМО (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), равно

$$L_{\text{сист}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k$$

$$= \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k.$$

- Но величина $T\lambda$ есть среднее число заявок, поступивших за время T.
- Поэтому $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda} \sum\limits_{k=1}^{k(T)} t_k$ есть среднее время пребывания заявки в системе, которое обозначаем через $W_{\text{сист}}$.
- Итак $L_{\text{сист}} = \lambda W_{\text{сист}}$.

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$:

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,
- при любой дисциплине обслуживания
- *среднее время пребывания заявки в системе*
- равно *среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.*

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$:

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,
- при любой дисциплине обслуживания
- *среднее время пребывания заявки в системе*
- равно *среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.*

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$:

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,
- при любой дисциплине обслуживания
- *среднее время пребывания заявки в системе*
- равно *среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.*

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$:

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,
- при любой дисциплине обслуживания
- *среднее время пребывания заявки в системе*
- равно *среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.*

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$:

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,
- при любой дисциплине обслуживания
- *среднее время пребывания заявки в системе*
- равно *среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.*

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \dfrac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$:

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,
- при любой дисциплине обслуживания
- *среднее время пребывания заявки в системе*
- равно *среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.*

Первая формула Литтла

Первая формула Литтла $W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$:

- для любой СМО,
- при любом характере потока заявок,
- при любом распределении времени обслуживания,
- при любой дисциплине обслуживания
- *среднее время пребывания заявки в системе*
- равно *среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.*

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}.$$

- Для вывода второй формулы Литтла достаточно заменить функцию Y на функцию U,
- где $U(t)$ есть количество заявок, покинувших очередь до момента t.
- Если заявка, поступая в систему, обслуживается сразу, не становясь в очередь, то считаем, что она пробыла в очереди нулевое время.

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}.$$

- Для вывода второй формулы Литтла достаточно заменить функцию Y на функцию U,
- где $U(t)$ есть количество заявок, покинувших очередь до момента t.
- Если заявка, поступая в систему, обслуживается сразу, не становясь в очередь, то считаем, что она пробыла в очереди нулевое время.

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}.$$

- Для вывода второй формулы Литтла достаточно заменить функцию Y на функцию U,
- где $U(t)$ есть количество заявок, покинувших очередь до момента t.
- Если заявка, поступая в систему, обслуживается сразу, не становясь в очередь, то считаем, что она пробыла в очереди нулевое время.

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}.$$

- Для вывода второй формулы Литтла достаточно заменить функцию Y на функцию U,
- где $U(t)$ есть количество заявок, покинувших очередь до момента t.
- Если заявка, поступая в систему, обслуживается сразу, не становясь в очередь, то считаем, что она пробыла в очереди нулевое время.

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}.$$

- Для вывода второй формулы Литтла достаточно заменить функцию Y на функцию U,
- где $U(t)$ есть количество заявок, покинувших очередь до момента t.
- Если заявка, поступая в систему, обслуживается сразу, не становясь в очередь, то считаем, что она пробыла в очереди нулевое время.

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}.$$

- Для вывода второй формулы Литтла достаточно заменить функцию Y на функцию U,
- где $U(t)$ есть количество заявок, покинувших очередь до момента t.
- Если заявка, поступая в систему, обслуживается сразу, не становясь в очередь, то считаем, что она пробыла в очереди нулевое время.

Вторая формула Литтла

- Точно таким же образом выводится *вторая формула Литтла*,
- связывающая среднее время пребывания заявки в очереди $W_{\text{оч}}$
- и среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

Вторая формула Литтла

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}.$$

- Для вывода второй формулы Литтла достаточно заменить функцию Y на функцию U,
- где $U(t)$ есть количество заявок, покинувших очередь до момента t.
- Если заявка, поступая в систему, обслуживается сразу, не становясь в очередь, то считаем, что она пробыла в очереди нулевое время.

План лекции

1. Системы массового обслуживания (СМО)
   - Потоки событий
   - Схема гибели и размножения
   - Формулы Литтла
2. Примеры систем массового обслуживания
   - Многоканальная СМО с отказами
   - Одноканальная СМО с неограниченной очередью
   - Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A — абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
  - Q — относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
  - $P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
  - $\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A — абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
  - Q — относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
  - $P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
  - $\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A — абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
  - Q — относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
  - $P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
  - $\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
    - A — абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
    - Q — относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
    - $P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
    - $\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A — абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
  - Q — относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
  - $P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
  - $\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A — абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
  - Q — относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
  - $P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
  - $\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A — абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
  - Q — относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
  - $P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
  - $\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.

Задача Эрланга

- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
- Если нет свободных каналов в момент поступления какой-то заявки, то эта заявка сразу покидает СМО.
- Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - A — абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
  - Q — относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
  - $P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
  - $\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.

Граф состояний n-канальной СМО с отказами

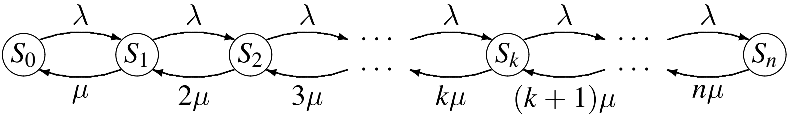
- Состояние СМО определяется числом заявок в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):
- S_k — в СМО находится k заявок ($k = 1, \ldots, n$).
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения, представленной на рисунке.

Граф состояний n-канальной СМО с отказами

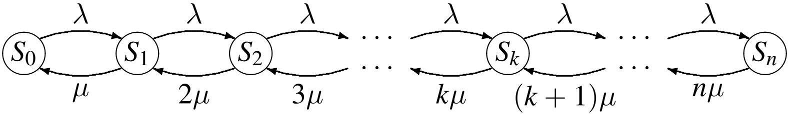
- Состояние СМО определяется числом заявок в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):
- S_k — в СМО находится k заявок $(k = 1, \dots, n)$.
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения, представленной на рисунке.

Граф состояний n-канальной СМО с отказами

- Состояние СМО определяется числом заявок в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):
- S_k — в СМО находится k заявок ($k = 1, \ldots, n$).
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения, представленной на рисунке.



Формулы Эрланга



- По формулам

$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \dots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1},$$

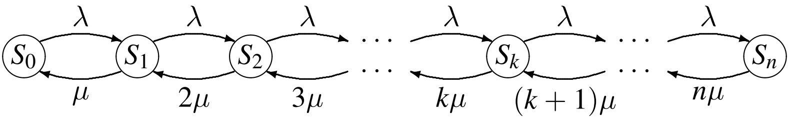
$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}p_0, \quad k = 1,\dots,n,$$

- найдем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \dots \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k}p_0, \quad k = 1,\dots,n.$$

Формулы Эрланга



- По формулам

$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \cdots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1},$$

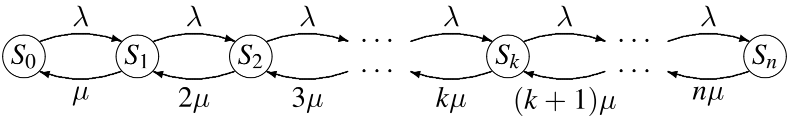
$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}} p_0, \quad k = 1, \dots, n,$$

- найдем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} + \cdots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \dots \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Формулы Эрланга



- По формулам

$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \dots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\dots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\dots\pi_{21}\pi_{10}} p_0, \quad k = 1, \dots, n,$$

- найдем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \dots \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его *приведенной интенсивностью потока заявок.*
- Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.
- Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы для финальных вероятностей следующим образом:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, \ldots, k.$$

- Эти формулы известны как формулы Эрланга.

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его *приведенной интенсивностью потока заявок.*
- Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.
- Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы для финальных вероятностей следующим образом:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, \dots, k.$$

- Эти формулы известны как формулы Эрланга.

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его *приведенной интенсивностью потока заявок.*
- Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.
- Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы для финальных вероятностей следующим образом:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, \ldots, k.$$

- Эти формулы известны как формулы Эрланга.

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его *приведенной интенсивностью потока заявок.*
- Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.
- Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы для финальных вероятностей следующим образом:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, \dots, k.$$

- Эти формулы известны как формулы Эрланга.

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его *приведенной интенсивностью потока заявок.*
- Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.
- Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы для финальных вероятностей следующим образом:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, \ldots, k.$$

- Эти формулы известны как формулы Эрланга.

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его *приведенной интенсивностью потока заявок.*
- Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.
- Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы для финальных вероятностей следующим образом:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, \ldots, k.$$

- Эти формулы известны как формулы Эрланга.

Формулы Эрланга

- Обозначим отношение λ/μ через ρ
- и назовем его *приведенной интенсивностью потока заявок.*
- Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.
- Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы для финальных вероятностей следующим образом:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = 1, \dots, k.$$

- Эти формулы известны как формулы Эрланга.

Характеристики эффективности СМО

- Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

- *Относительная пропускная способность* (вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена) равна

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

- Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q:

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right).$$

- Каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок.
- Следовательно, среднее число занятых каналов $\bar{k} = A/\mu$.

Характеристики эффективности СМО

- Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна
$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$
- *Относительная пропускная способность* (вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена) равна
$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$
- Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q:
$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right).$$
- Каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок.
- Следовательно, среднее число занятых каналов $\bar{k} = A/\mu$.

Характеристики эффективности СМО

- Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна
$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$
- *Относительная пропускная способность* (вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена) равна
$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$
- Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q:
$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right).$$
- Каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок.
- Следовательно, среднее число занятых каналов $\bar{k} = A/\mu$.

Характеристики эффективности СМО

- Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна
$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$
- *Относительная пропускная способность* (вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена) равна
$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$
- Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q:
$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right).$$
- Каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок.
- Следовательно, среднее число занятых каналов $\bar{k} = A/\mu$.

Характеристики эффективности СМО

- Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна
$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$
- *Относительная пропускная способность* (вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена) равна
$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$
- Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q:
$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right).$$
- Каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок.
- Следовательно, среднее число занятых каналов $\bar{k} = A/\mu$.

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,
- среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты.

1. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$.
2. Сколько нужно каналов, чтобы удовлетворять не менее 80 % заявок?
3. Какая доля каналов при этом будет простаивать?

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,
- среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты.

1. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$.
2. Сколько нужно каналов, чтобы удовлетворять не менее 80 % заявок?
3. Какая доля каналов при этом будет простаивать?

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,
- среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты.

1. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$.
2. Сколько нужно каналов, чтобы удовлетворять не менее 80 % заявок?
3. Какая доля каналов при этом будет простаивать?

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,
- среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты.

1. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$.
2. Сколько нужно каналов, чтобы удовлетворять не менее 80 % заявок?
3. Какая доля каналов при этом будет простаивать?

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,
- среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты.

1. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$.
2. Сколько нужно каналов, чтобы удовлетворять не менее 80 % заявок?
3. Какая доля каналов при этом будет простаивать?

Пример: постановка задачи

- Станция связи имеет три канала ($n = 3$),
- интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту,
- среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты.

1. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$.
2. Сколько нужно каналов, чтобы удовлетворять не менее 80 % заявок?
3. Какая доля каналов при этом будет простаивать?

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем
$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/6} = \frac{1}{1 + 3 + 9/2 + 27/6} = 1/13.$$
- Теперь мы можем вычислить вероятность отказа
$$P_{\text{отк}} = p_3 = (\rho^3/3!)p_0 = (3^3/6) \cdot (1/13) = 9/26,$$
- относительную пропускную способность системы
$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 9/26 = 15/26,$$
- абсолютную пропускную способность системы
$$A = \lambda Q = (3/2) \cdot (15/26) = 45/52,$$
- и среднее число занятых каналов
$$\bar{k} = A/\mu = (45/52)/(1/2) = 45/26.$$

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2/2+\rho^3/6} = \frac{1}{1+3+9/2+27/6} = 1/13.$$

- Теперь мы можем вычислить вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = p_3 = (\rho^3/3!)p_0 = (3^3/6)\cdot(1/13) = 9/26,$$

- относительную пропускную способность системы

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 9/26 = 15/26,$$

- абсолютную пропускную способность системы

$$A = \lambda Q = (3/2)\cdot(15/26) = 45/52,$$

- и среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = A/\mu = (45/52)/(1/2) = 45/26.$$

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем
$$p_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2/2+\rho^3/6} = \frac{1}{1+3+9/2+27/6} = 1/13.$$
- Теперь мы можем вычислить вероятность отказа
$$P_{\text{отк}} = p_3 = (\rho^3/3!)p_0 = (3^3/6)\cdot(1/13) = 9/26,$$
- относительную пропускную способность системы
$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 9/26 = 15/26,$$
- абсолютную пропускную способность системы
$$A = \lambda Q = (3/2)\cdot(15/26) = 45/52,$$
- и среднее число занятых каналов
$$\bar{k} = A/\mu = (45/52)/(1/2) = 45/26.$$

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем
$$p_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2/2+\rho^3/6} = \frac{1}{1+3+9/2+27/6} = 1/13.$$
- Теперь мы можем вычислить вероятность отказа
$$P_{\text{отк}} = p_3 = (\rho^3/3!)p_0 = (3^3/6)\cdot(1/13) = 9/26,$$
- относительную пропускную способность системы
$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 9/26 = 15/26,$$
- абсолютную пропускную способность системы
$$A = \lambda Q = (3/2)\cdot(15/26) = 45/52,$$
- и среднее число занятых каналов
$$\bar{k} = A/\mu = (45/52)/(1/2) = 45/26.$$

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем
$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/6} = \frac{1}{1 + 3 + 9/2 + 27/6} = 1/13.$$
- Теперь мы можем вычислить вероятность отказа
$$P_{\text{отк}} = p_3 = (\rho^3/3!)p_0 = (3^3/6) \cdot (1/13) = 9/26,$$
- относительную пропускную способность системы
$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 9/26 = 15/26,$$
- абсолютную пропускную способность системы
$$A = \lambda Q = (3/2) \cdot (15/26) = 45/52,$$
- и среднее число занятых каналов
$$\bar{k} = A/\mu = (45/52)/(1/2) = 45/26.$$

Пример: решение

- Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- Сначала вычисляем

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/6} = \frac{1}{1 + 3 + 9/2 + 27/6} = 1/13.$$

- Теперь мы можем вычислить вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = p_3 = (\rho^3/3!)p_0 = (3^3/6) \cdot (1/13) = 9/26,$$

- относительную пропускную способность системы

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 9/26 = 15/26,$$

- абсолютную пропускную способность системы

$$A = \lambda Q = (3/2) \cdot (15/26) = 45/52,$$

- и среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = A/\mu = (45/52)/(1/2) = 45/26.$$

План лекции

1. Системы массового обслуживания (СМО)
   - Потоки событий
   - Схема гибели и размножения
   - Формулы Литтла
2. Примеры систем массового обслуживания
   - Многоканальная СМО с отказами
   - Одноканальная СМО с неограниченной очередью
   - Многоканальная СМО с неограниченной очередью

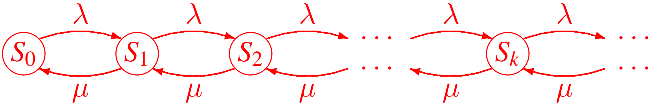
Одноканальная СМО с неограниченной очередью

- Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).
- В СМО поступает поток заявок интенсивности λ,
- а поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
  - $L_{\text{сист}}$ — среднее число заявок в системе;
  - $W_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания заявки в системе;
  - $L_{\text{оч}}$ — среднее число заявок в очереди;
  - $W_{\text{оч}}$ — среднее время пребывания заявки в очереди;
  - $P_{\text{зан}}$ — вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью

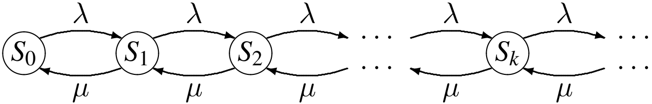
- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k — в СМО находится k заявок ($k = 1, 2, \dots$).
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.
- При $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать.
- Поэтому финальные вероятности существуют не всегда, а только когда система не перегружена.
- Можно доказать, что если $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\mu < 1$, то финальные вероятности существуют,
- а при $\rho \geq 1$ очередь при $t \to \infty$ растет неограниченно.

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



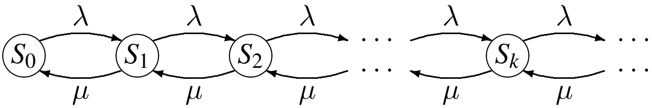
- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k — в СМО находится k заявок $(k = 1, 2, \dots)$.
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.
- При $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать.
- Поэтому финальные вероятности существуют не всегда, а только когда система не перегружена.
- Можно доказать, что если $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\mu < 1$, то финальные вероятности существуют,
- а при $\rho \geq 1$ очередь при $t \to \infty$ растет неограниченно.

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



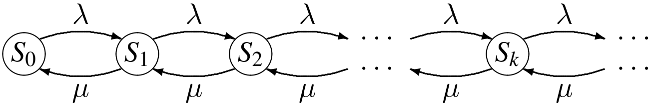
- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k — в СМО находится k заявок ($k = 1, 2, \dots$).
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.
- При $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать.
- Поэтому финальные вероятности существуют не всегда, а только когда система не перегружена.
- Можно доказать, что если $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\mu < 1$, то финальные вероятности существуют,
- а при $\rho \geq 1$ очередь при $t \to \infty$ растет неограниченно.

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



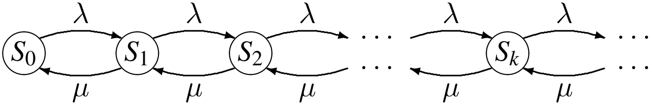
- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k — в СМО находится k заявок $(k = 1, 2, \dots)$.
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.
- При $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать.
- Поэтому финальные вероятности существуют не всегда, а только когда система не перегружена.
- Можно доказать, что если $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\mu < 1$, то финальные вероятности существуют,
- а при $\rho \geq 1$ очередь при $t \to \infty$ растет неограниченно.

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k — в СМО находится k заявок ($k = 1, 2, \dots$).
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.
- При $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать.
- Поэтому финальные вероятности существуют не всегда, а только когда система не перегружена.
- Можно доказать, что если $\rho \overset{\text{def}}{=} \lambda/\mu < 1$, то финальные вероятности существуют,
- а при $\rho \geq 1$ очередь при $t \to \infty$ растет неограниченно.

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k — в СМО находится k заявок ($k = 1, 2, \dots$).
- Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения с бесконечным числом состояний.
- При $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать.
- Поэтому финальные вероятности существуют не всегда, а только когда система не перегружена.
- Можно доказать, что если $\rho \overset{\text{def}}{=} \lambda/\mu < 1$, то финальные вероятности существуют,
- а при $\rho \geq 1$ очередь при $t \to \infty$ растет неограниченно.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот — регулярен,
- и время обслуживания — тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.
- Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным — и очередь уже будет расти до бесконечности.
- На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди» — абстракция.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот — регулярен,
- и время обслуживания — тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.
- Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным — и очередь уже будет расти до бесконечности.
- На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди» — абстракция.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот — регулярен,
- и время обслуживания — тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.
- Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным — и очередь уже будет расти до бесконечности.
- На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди» — абстракция.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот — регулярен,
- и время обслуживания — тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.
- Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным — и очередь уже будет расти до бесконечности.
- На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди» — абстракция.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот — регулярен,
- и время обслуживания — тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.
- Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным — и очередь уже будет расти до бесконечности.
- На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди» — абстракция.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот — регулярен,
- и время обслуживания — тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.
- Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным — и очередь уже будет расти до бесконечности.
- На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди» — абстракция.

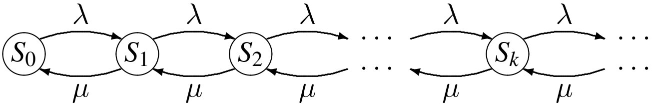
Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот — регулярен,
- и время обслуживания — тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.
- Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным — и очередь уже будет расти до бесконечности.
- На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди» — абстракция.

Почему очередь бесконечно растет при $\rho = 1$?

- Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований:
- за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке.
- При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот — регулярен,
- и время обслуживания — тоже не случайное и равно интервалу между заявками.
- В этом «идеальном» случае очереди в СМО не будет,
- канал будет постоянно занят.
- Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным — и очередь уже будет расти до бесконечности.
- На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди» — абстракция.

Финальные вероятности

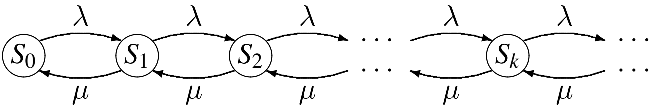


- Формулы для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения были выведены только для случая конечного числа состояний.
- Мы позволим себе вольность и воспользуемся ими и для бесконечного числа состояний:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \dots + \frac{\lambda^k}{\mu^k} + \dots\right)^{-1}.$$
$$= (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

- Ряд в этой формуле представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\mu$.

Финальные вероятности

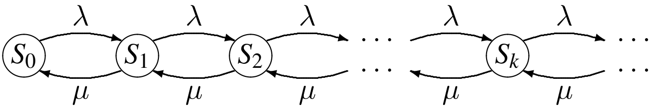


- Формулы для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения были выведены только для случая конечного числа состояний.
- Мы позволим себе вольность и воспользуемся ими и для бесконечного числа состояний:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \dots + \frac{\lambda^k}{\mu^k} + \dots\right)^{-1}.$$
$$= (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

- Ряд в этой формуле представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\mu$.

Финальные вероятности

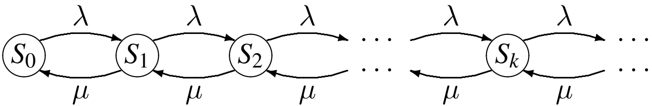


- Формулы для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения были выведены только для случая конечного числа состояний.
- Мы позволим себе вольность и воспользуемся ими и для бесконечного числа состояний:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \dots + \frac{\lambda^k}{\mu^k} + \dots\right)^{-1}.$$
$$= (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

- Ряд в этой формуле представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho \overset{\text{def}}{=} \lambda/\mu$.

Финальные вероятности



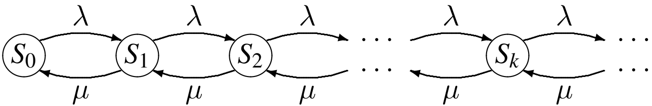
$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

- При $\rho \geq 1$ ряд расходится, что косвенно подтверждает то, что финальные вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ существуют только при $\rho < 1$.
- При $\rho < 1$ ряд сходится и $p_0 = 1 - \rho$.
- Поскольку $p_k = \rho^k p_0$, то остальные вероятности $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ определяются по формулам:

$$p_1 = \rho(1-\rho),\ p_2 = \rho^2(1-\rho),\ \dots,\ p_k = \rho^k(1-\rho),\ \dots$$

- Как ни странно, но, поскольку максимальная из этих вероятностей есть p_0, то наиболее вероятное число заявок в системе будет 0.

Финальные вероятности



$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

- При $\rho \geq 1$ ряд расходится, что косвенно подтверждает то, что финальные вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ существуют только при $\rho < 1$.
- При $\rho < 1$ ряд сходится и $p_0 = 1 - \rho$.
- Поскольку $p_k = \rho^k p_0$, то остальные вероятности $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ определяются по формулам:

$$p_1 = \rho(1-\rho),\ p_2 = \rho^2(1-\rho),\ \dots,\ p_k = \rho^k(1-\rho),\ \dots$$

- Как ни странно, но, поскольку максимальная из этих вероятностей есть p_0, то наиболее вероятное число заявок в системе будет 0.

Финальные вероятности

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & S_1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & S_2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & S_k \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

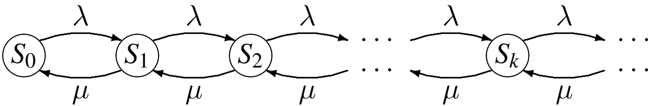
$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

- При $\rho \geq 1$ ряд расходится, что косвенно подтверждает то, что финальные вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ существуют только при $\rho < 1$.
- При $\rho < 1$ ряд сходится и $p_0 = 1 - \rho$.
- Поскольку $p_k = \rho^k p_0$, то остальные вероятности $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ определяются по формулам:

$$p_1 = \rho(1-\rho),\ p_2 = \rho^2(1-\rho),\ \dots,\ p_k = \rho^k(1-\rho),\ \dots$$

- Как ни странно, но, поскольку максимальная из этих вероятностей есть p_0, то наиболее вероятное число заявок в системе будет 0.

Финальные вероятности



$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

- При $\rho \geq 1$ ряд расходится, что косвенно подтверждает то, что финальные вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ существуют только при $\rho < 1$.
- При $\rho < 1$ ряд сходится и $p_0 = 1 - \rho$.
- Поскольку $p_k = \rho^k p_0$, то остальные вероятности $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ определяются по формулам:

  $p_1 = \rho(1-\rho),\ p_2 = \rho^2(1-\rho),\ \dots,\ p_k = \rho^k(1-\rho),\ \dots$
- Как ни странно, но, поскольку максимальная из этих вероятностей есть p_0, то наиболее вероятное число заявок в системе будет 0.

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k (1-\rho) = \rho(1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^k = \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k$$

$$= \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} \frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho) \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$
$$= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k$$
$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в системе

- Случайная величина ξ — *число заявок в системе* —
- принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$
- Ее математическое ожидание равно

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k (1-\rho) = \rho(1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1}$$
$$= \rho(1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^k = \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k$$
$$= \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho} \frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho) \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Применим формулу Литтла и найдем *среднее время пребывания заявки* в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.
- Математическое ожидание такой случайной величины равно $P_{\text{зан}}$ — вероятности того, что канал занят.
- Ясно, что $P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - \rho/(1-\rho) = \rho$.
- Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно $L_{\text{об}} = \rho$, откуда

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

- По формуле Литтла найдем *среднее время пребывания заявки в очереди:*

$$W_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.
- Математическое ожидание такой случайной величины равно $P_{\text{зан}}$ — вероятности того, что канал занят.
- Ясно, что $P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - \rho/(1-\rho) = \rho$.
- Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно $L_{\text{об}} = \rho$, откуда

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

- По формуле Литтла найдем *среднее время пребывания заявки в очереди:*

$$W_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.
- Математическое ожидание такой случайной величины равно $P_{\text{зан}}$ — вероятности того, что канал занят.
- Ясно, что $P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - \rho/(1-\rho) = \rho$.
- Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно $L_{\text{об}} = \rho$, откуда
$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$
- По формуле Литтла найдем *среднее время пребывания заявки в очереди*:
$$W_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{оч}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{сист}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.
- Математическое ожидание такой случайной величины равно $P_{зан}$ — вероятности того, что канал занят.
- Ясно, что $P_{зан} = 1 - p_0 = 1 - \rho/(1-\rho) = \rho$.
- Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно $L_{об} = \rho$, откуда

$$L_{оч} = L_{сист} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

- По формуле Литтла найдем *среднее время пребывания заявки в очереди:*

$$W_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.
- Математическое ожидание такой случайной величины равно $P_{\text{зан}}$ — вероятности того, что канал занят.
- Ясно, что $P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - \rho/(1-\rho) = \rho$.
- Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно $L_{\text{об}} = \rho$, откуда

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

- По формуле Литтла найдем *среднее время пребывания заявки в очереди:*

$$W_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в очереди

- Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием.
- Число заявок под обслуживанием $= 0$, если канал свободен, либо $= 1$, если канал занят.
- Математическое ожидание такой случайной величины равно $P_{\text{зан}}$ — вероятности того, что канал занят.
- Ясно, что $P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - \rho/(1-\rho) = \rho$.
- Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно $L_{\text{об}} = \rho$, откуда
$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$
- По формуле Литтла найдем *среднее время пребывания заявки в очереди:*
$$W_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

Пример: постановка задачи

- Ресторан MacDonalds планирует открыть drive-through окно для обслуживания своих клиентов.
- Менеджеры оценили, что клиенты будут прибывать с интенсивностью 15 клиентов в час.
- Кассир, который будет работать в данном окне, в среднем тратит три минуты на обслуживание одного клиента.
- Нужно определить параметры эффектвности данной СМО.

Пример: постановка задачи

- Ресторан MacDonalds планирует открыть drive-through окно для обслуживания своих клиентов.
- Менеджеры оценили, что клиенты будут прибывать с интенсивностью 15 клиентов в час.
- Кассир, который будет работать в данном окне, в среднем тратит три минуты на обслуживание одного клиента.
- Нужно определить параметры эффектвности данной СМО.

Пример: постановка задачи

- Ресторан MacDonalds планирует открыть drive-through окно для обслуживания своих клиентов.
- Менеджеры оценили, что клиенты будут прибывать с интенсивностью 15 клиентов в час.
- Кассир, который будет работать в данном окне, в среднем тратит три минуты на обслуживание одного клиента.
- Нужно определить параметры эффектвности данной СМО.

Пример: постановка задачи

- Ресторан MacDonalds планирует открыть drive-through окно для обслуживания своих клиентов.
- Менеджеры оценили, что клиенты будут прибывать с интенсивностью 15 клиентов в час.
- Кассир, который будет работать в данном окне, в среднем тратит три минуты на обслуживание одного клиента.
- Нужно определить параметры эффектвности данной СМО.

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
$$\lambda = 15,\ \mu = 60/3 = 20.$$
- Средняя занятость кассира
$$\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75\ (75\ \%).$$
- Среднее число клиентов в системе:
$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.75}{1-0.75} = 3 \text{ клиента}.$$
- Среднее число клиентов в очереди:
$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 3 - 0.75 = 2.25 \text{ клиента}.$$
- Среднее время ожидания в системе:
$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}} = \frac{3}{15} = 0.2 \text{ ч.} = 12 \text{ мин.}$$
- Среднее время ожидания в очереди:
$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}} = \frac{2.25}{15} = 0.15 \text{ ч.} = 9 \text{ мин.}$$

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
$$\lambda = 15,\ \mu = 60/3 = 20.$$
- Средняя занятость кассира
$$\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75\ (75\ \%).$$
- Среднее число клиентов в системе:
$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.75}{1-0.75} = 3 \text{ клиента.}$$
- Среднее число клиентов в очереди:
$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 3 - 0.75 = 2.25 \text{ клиента.}$$
- Среднее время ожидания в системе:
$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}} = \frac{3}{15} = 0.2 \text{ ч.} = 12 \text{ мин.}$$
- Среднее время ожидания в очереди:
$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}} = \frac{2.25}{15} = 0.15 \text{ ч.} = 9 \text{ мин.}$$

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
$$\lambda = 15,\ \mu = 60/3 = 20.$$
- Средняя занятость кассира
$$\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75\ (75\ \%).$$
- Среднее число клиентов в системе:
$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.75}{1-0.75} = 3 \text{ клиента.}$$
- Среднее число клиентов в очереди:
$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 3 - 0.75 = 2.25 \text{ клиента.}$$
- Среднее время ожидания в системе:
$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}} = \frac{3}{15} = 0.2 \text{ ч.} = 12 \text{ мин.}$$
- Среднее время ожидания в очереди:
$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}} = \frac{2.25}{15} = 0.15 \text{ ч.} = 9 \text{ мин.}$$

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
$$\lambda = 15, \ \mu = 60/3 = 20.$$
- Средняя занятость кассира
$$\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75 \ (75\ \%).$$
- Среднее число клиентов в системе:
$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.75}{1-0.75} = 3 \text{ клиента}.$$
- Среднее число клиентов в очереди:
$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 3 - 0.75 = 2.25 \text{ клиента}.$$
- Среднее время ожидания в системе:
$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}} = \frac{3}{15} = 0.2 \text{ ч.} = 12 \text{ мин.}$$
- Среднее время ожидания в очереди:
$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}} = \frac{2.25}{15} = 0.15 \text{ ч.} = 9 \text{ мин.}$$

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
$$\lambda = 15,\ \mu = 60/3 = 20.$$
- Средняя занятость кассира
$$\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75\ (75\ \%).$$
- Среднее число клиентов в системе:
$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.75}{1-0.75} = 3 \text{ клиента}.$$
- Среднее число клиентов в очереди:
$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 3 - 0.75 = 2.25 \text{ клиента}.$$
- Среднее время ожидания в системе:
$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}} = \frac{3}{15} = 0.2 \text{ ч.} = 12 \text{ мин.}$$
- Среднее время ожидания в очереди:
$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}} = \frac{2.25}{15} = 0.15 \text{ ч.} = 9 \text{ мин.}$$

Пример: решение

- Параметры данной СМО следующие:
$$\lambda = 15,\ \mu = 60/3 = 20.$$
- Средняя занятость кассира
$$\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75\ (75\ \%).$$
- Среднее число клиентов в системе:
$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.75}{1-0.75} = 3 \text{ клиента.}$$
- Среднее число клиентов в очереди:
$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 3 - 0.75 = 2.25 \text{ клиента.}$$
- Среднее время ожидания в системе:
$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}} = \frac{3}{15} = 0.2 \text{ ч.} = 12 \text{ мин.}$$
- Среднее время ожидания в очереди:
$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}} = \frac{2.25}{15} = 0.15 \text{ ч.} = 9 \text{ мин.}$$

План лекции

1. Системы массового обслуживания (СМО)
   - Потоки событий
   - Схема гибели и размножения
   - Формулы Литтла
2. Примеры систем массового обслуживания
   - Многоканальная СМО с отказами
   - Одноканальная СМО с неограниченной очередью
   - Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Нумерация состояний теперь следующая:

- S_k — занято k каналов, остальные свободны $(k = 0, \ldots, n)$;
- S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди $(r = 1, 2, \ldots)$.
- Граф состояний СМО представляет схему гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

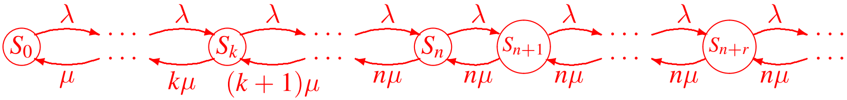
Нумерация состояний теперь следующая:

- S_k — занято k каналов, остальные свободны ($k = 0, \dots, n$);
- S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди ($r = 1, 2, \dots$).
- Граф состояний СМО представляет схему гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний.

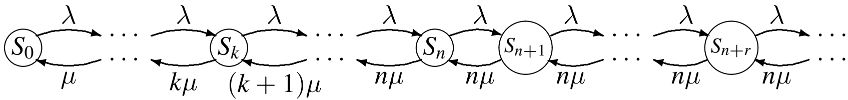
Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Нумерация состояний теперь следующая:

- S_k — занято k каналов, остальные свободны ($k = 0, \ldots, n$);
- S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди ($r = 1, 2, \ldots$).
- Граф состояний СМО представляет схему гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний.



Финальные вероятности



- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.
- Сначала найдем

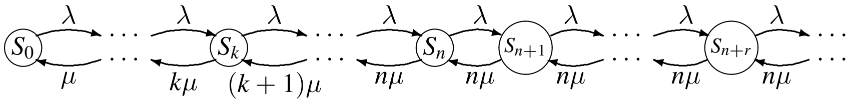
$$\frac{1}{p_0} = 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \frac{\rho^{n+3}}{n^3 \cdot n!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}\left(1 + \frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}.$$

- Теперь найдем остальные вероятности:

Финальные вероятности



- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.
- Сначала найдем

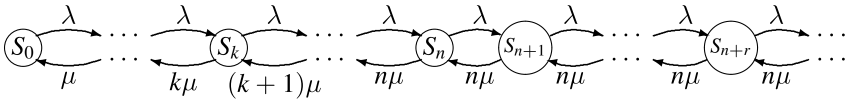
$$\frac{1}{p_0} = 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \frac{\rho^{n+3}}{n^3 \cdot n!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}\left(1 + \frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}.$$

- Теперь найдем остальные вероятности:

Финальные вероятности



- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.
- Сначала найдем

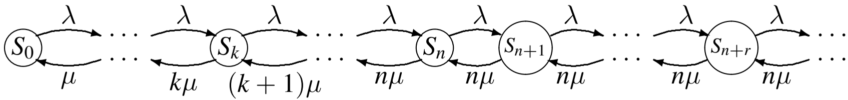
$$\frac{1}{p_0} = 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \frac{\rho^{n+3}}{n^3 \cdot n!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}\left(1 + \frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}.$$

- Теперь найдем остальные вероятности:

Финальные вероятности



- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.
- Сначала найдем

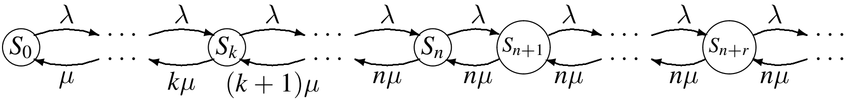
$$\frac{1}{p_0} = 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \frac{\rho^{n+3}}{n^3 \cdot n!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}\left(1 + \frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}.$$

- Теперь найдем остальные вероятности:

Финальные вероятности



- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.
- Итак

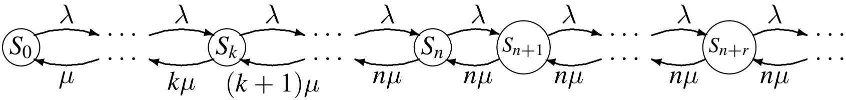
$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

- Теперь найдем остальные вероятности:

$$p_1 = \frac{\rho}{1!}p_0, \ \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \ \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0,$$

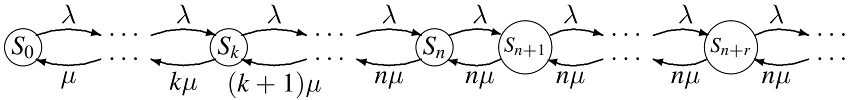
$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_0, \ \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0, \ \ldots$$

Финальные вероятности



- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.
- Итак
$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$
- Теперь найдем остальные вероятности:
$$p_1 = \frac{\rho}{1!}p_0, \ \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \ \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0,$$
$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_0, \ \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0, \ \ldots$$

Финальные вероятности



- Примем без доказательства естественное условие существования финальных вероятностей: $\rho/n = (\lambda/\mu)/n < 1$.
- Итак
$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$
- Теперь найдем остальные вероятности:
$$p_1 = \frac{\rho}{1!}p_0, \ \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \ \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0,$$
$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_0, \ \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0, \ \ldots$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$
$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$
$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n} \right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1 - \rho/n} \right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1 - \rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1 - \rho/n} \right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1 - \rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Характеристики эффективности СМО

- *Среднее число заявок в очереди*

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r}$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2}.$$

- *Среднее число заявок в системе* рано $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}$,
- где $\bar{k}$ обозначает *среднее число занятых каналов*,
- которое для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \rho = \lambda/\mu$.
- По формулам Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления A,
  - а другая — на маршруты направления B.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0.45$ (пассажира в минуту).
- Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu_A = \mu_B = 0.5$).
- Определите среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для каждой из двух касс (одноканальных СМО с очередью).
- Как изменятся эти параметры эффективности, если две очереди объединить в одну и обе кассы начнут продавать билеты на оба напрвления?

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления A,
  - а другая — на маршруты направления B.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0.45$ (пассажира в минуту).
- Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu_A = \mu_B = 0.5$).
- Определите среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для каждой из двух касс (одноканальных СМО с очередью).
- Как изменятся эти параметры эффективности, если две очереди объединить в одну и обе кассы начнут продавать билеты на оба напрвления?

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления A,
  - а другая — на маршруты направления B.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0.45$ (пассажира в минуту).
- Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu_A = \mu_B = 0.5$).
- Определите среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для каждой из двух касс (одноканальных СМО с очередью).
- Как изменятся эти параметры эффективности, если две очереди объединить в одну и обе кассы начнут продавать билеты на оба напрвления?

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления A,
  - а другая — на маршруты направления B.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0.45$ (пассажира в минуту).
- Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu_A = \mu_B = 0.5$).
- Определите среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для каждой из двух касс (одноканальных СМО с очередью).
- Как изменятся эти параметры эффективности, если две очереди объединить в одну и обе кассы начнут продавать билеты на оба напрвления?

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления A,
  - а другая — на маршруты направления B.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0.45$ (пассажира в минуту).
- Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu_A = \mu_B = 0.5$).
- Определите среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для каждой из двух касс (одноканальных СМО с очередью).
- Как изменятся эти параметры эффективности, если две очереди объединить в одну и обе кассы начнут продавать билеты на оба напрвления?

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления A,
  - а другая — на маршруты направления B.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0.45$ (пассажира в минуту).
- Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu_A = \mu_B = 0.5$).
- Определите среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для каждой из двух касс (одноканальных СМО с очередью).
- Как изменятся эти параметры эффективности, если две очереди объединить в одну и обе кассы начнут продавать билеты на оба напрвления?

Пример: постановка задачи

- На автовоклале имеются всего две кассы:
  - одна продает билеты на маршруты направления A,
  - а другая — на маршруты направления B.
- Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0.45$ (пассажира в минуту).
- Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu_A = \mu_B = 0.5$).
- Определите среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для каждой из двух касс (одноканальных СМО с очередью).
- Как изменятся эти параметры эффективности, если две очереди объединить в одну и обе кассы начнут продавать билеты на оба напрвления?

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 0.5$.
- Поскольку $\rho = \lambda/\mu = 0.9 < 1$, то финальные вероятности существуют.
- Вычисляем среднюю длину очереди:
$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.9^2}{1-0.9} = 8.1.$$
- Среднее время ожидания в очереди
$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{8.1}{0.45} \approx 18 \text{ (минут)}.$$

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 0.5$.
- Поскольку $\rho = \lambda/\mu = 0.9 < 1$, то финальные вероятности существуют.
- Вычисляем среднюю длину очереди:
$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.9^2}{1-0.9} = 8.1.$$
- Среднее время ожидания в очереди
$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{8.1}{0.45} \approx 18 \text{ (минут)}.$$

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 0.5$.
- Поскольку $\rho = \lambda/\mu = 0.9 < 1$, то финальные вероятности существуют.
- Вычисляем среднюю длину очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.9^2}{1-0.9} = 8.1.$$

- Среднее время ожидания в очереди

$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{8.1}{0.45} \approx 18 \text{ (минут)}.$$

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 0.5$.
- Поскольку $\rho = \lambda/\mu = 0.9 < 1$, то финальные вероятности существуют.
- Вычисляем среднюю длину очереди:
$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.9^2}{1-0.9} = 8.1.$$
- Среднее время ожидания в очереди
$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{8.1}{0.45} \approx 18 \text{ (минут)}.$$

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 0.5$.
- Поскольку $\rho = \lambda/\mu = 0.9 < 1$, то финальные вероятности существуют.
- Вычисляем среднюю длину очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.9^2}{1-0.9} = 8.1.$$

- Среднее время ожидания в очереди

$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{8.1}{0.45} \approx 18 \text{ (минут)}.$$

Каждая касса продает билеты на одно направление

- Мы имеем две одноканальных СМО;
- на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0.45$;
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 0.5$.
- Поскольку $\rho = \lambda/\mu = 0.9 < 1$, то финальные вероятности существуют.
- Вычисляем среднюю длину очереди:
$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.9^2}{1-0.9} = 8.1.$$
- Среднее время ожидания в очереди
$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{8.1}{0.45} \approx 18 \text{ (минут)}.$$

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.
- $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то фин. вероятности существуют.
- Вычисляем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^3}{2(2-1.8)}\right) - 1 \approx 0.0525.$$

- Среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} = \frac{1.8^3 \cdot 0.0525}{2 \cdot 2(1-1.8/2)^2} \approx 7.68.$$

- Среднее время ожидания в очереди

$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{7.68}{0.9} \approx 8.54 \text{ (минуты)}.$$

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.
- $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то фин. вероятности существуют.
- Вычисляем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^3}{2(2-1.8)}\right) -1 \approx 0.0525.$$

- Среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} = \frac{1.8^3 \cdot 0.0525}{2 \cdot 2(1-1.8/2)^2} \approx 7.68.$$

- Среднее время ожидания в очереди

$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{7.68}{0.9} \approx 8.54 \text{ (минуты)}.$$

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.
- $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то фин. вероятности существуют.
- Вычисляем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^3}{2(2-1.8)}\right) -1 \approx 0.0525.$$

- Среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} = \frac{1.8^3 \cdot 0.0525}{2 \cdot 2(1-1.8/2)^2} \approx 7.68.$$

- Среднее время ожидания в очереди

$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{7.68}{0.9} \approx 8.54 \text{ (минуты)}.$$

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.
- $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то фин. вероятности существуют.
- Вычисляем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^3}{2(2-1.8)}\right) - 1 \approx 0.0525.$$

- Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} = \frac{1.8^3 \cdot 0.0525}{2 \cdot 2(1-1.8/2)^2} \approx 7.68.$$

- Среднее время ожидания в очереди

$$W_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{7.68}{0.9} \approx 8.54 \text{ (минуты)}.$$

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.
- $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то фин. вероятности существуют.
- Вычисляем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^3}{2(2-1.8)}\right) -1 \approx 0.0525.$$

- Среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} = \frac{1.8^3 \cdot 0.0525}{2 \cdot 2(1-1.8/2)^2} \approx 7.68.$$

- Среднее время ожидания в очереди

$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{7.68}{0.9} \approx 8.54 \text{ (минуты)}.$$

Обе кассы продают билеты на оба направления

- На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$.
- Интенсивность потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$.
- $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то фин. вероятности существуют.
- Вычисляем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^3}{2(2-1.8)}\right) -1 \approx 0.0525.$$

- Среднее число заявок в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} = \frac{1.8^3 \cdot 0.0525}{2 \cdot 2(1-1.8/2)^2} \approx 7.68.$$

- Среднее время ожидания в очереди

$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{7.68}{0.9} \approx 8.54 \text{ (минуты)}.$$

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18, \quad W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров:
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления);
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
   - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.
   - А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18, \quad W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров:
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления);
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
   - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.
   - А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W^{1+1}_{\text{оч}} \approx 18, \quad W^{2}_{\text{оч}} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров:
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления);
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
   - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.
   - А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W^{1+1}_{\text{оч}} \approx 18, \quad W^{2}_{\text{оч}} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров:
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления);
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
   - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.
   - А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18, \quad W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
    - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров:
    - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
    - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления);
    - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
    - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
    - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.
    - А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18, \quad W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров:
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления);
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
   - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.
   - А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18, \quad W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров:
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления);
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
   - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.
   - А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18, \quad W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров:
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления);
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
   - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.
   - А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.

Обсуждение результатов

1. Почему произошло сокращение времени ожидания в очереди? ($W_{\text{оч}}^{1+1} \approx 18, \quad W_{\text{оч}}^{2} \approx 8.54$)
   - В двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров:
   - кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать
   - в двуканальной СМО, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления);
   - при двух одноканальных СМО, если в очереди нет пассажиров на его направление.
2. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)?
   - Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей.
   - Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти.
   - А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.