Биматричные игры

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2014

Содержание

Содержание

Определение биматричной игры

- Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется *биматричной игрой.*
- Пусть первый игрок имеет m стратегий, а второй — n стратегий.
- Выигрыши первого и второго игроков задаются матрицами
$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{и} \quad B = [b_{ij}]_{m\times n}.$$
- Если первый игрок применяет стратегию i, а второй — стратегию j,
- то первый игрок выигрывает a_{ij}, а второй — b_{ij}.

Определение биматричной игры

- Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется *биматричной игрой*.
- Пусть первый игрок имеет m стратегий, а второй — n стратегий.
- Выигрыши первого и второго игроков задаются матрицами

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{и} \quad B = [b_{ij}]_{m\times n}.$$

- Если первый игрок применяет стратегию i, а второй — стратегию j,
- то первый игрок выигрывает a_{ij}, а второй — b_{ij}.

Определение биматричной игры

- Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется *биматричной игрой*.
- Пусть первый игрок имеет m стратегий, а второй — n стратегий.
- Выигрыши первого и второго игроков задаются матрицами
$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{и} \quad B = [b_{ij}]_{m\times n}.$$
- Если первый игрок применяет стратегию i, а второй — стратегию j,
- то первый игрок выигрывает a_{ij}, а второй — b_{ij}.

Определение биматричной игры

- Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется *биматричной игрой*.
- Пусть первый игрок имеет m стратегий, а второй — n стратегий.
- Выигрыши первого и второго игроков задаются матрицами
$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{и} \quad B = [b_{ij}]_{m\times n}.$$
- Если первый игрок применяет стратегию i, а второй — стратегию j,
- то первый игрок выигрывает a_{ij}, а второй — b_{ij}.

Определение биматричной игры

- Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется *биматричной игрой.*
- Пусть первый игрок имеет m стратегий, а второй — n стратегий.
- Выигрыши первого и второго игроков задаются матрицами
$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{и} \quad B = [b_{ij}]_{m\times n}.$$
- Если первый игрок применяет стратегию i, а второй — стратегию j,
- то первый игрок выигрывает a_{ij}, а второй — b_{ij}.

Равновесие в чистых стратегиях

- Пара стратегий (i_0, j_0) является *ситуацией равновесия* (*в чистых стратегиях*) в биматричной игре,
- если выполняются неравенства

$$a_{i_0,j_0} \geq a_{i,j_0}, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$b_{i_0,j_0} \geq b_{i_0,j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

- Все ситуации равновесия в чистых стратегиях можно найти следующим образом:
  - в каждом столбце матрицы A отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - в каждой строке матрицы B отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - все пары стратегий (i, j), такие, что оба элемента a_{ij} и b_{ij} отмечены звездочкой являются ситуациями равновесия.

Равновесие в чистых стратегиях

- Пара стратегий (i_0, j_0) является *ситуацией равновесия* (*в чистых стратегиях*) в биматричной игре,
- если выполняются неравенства

$$a_{i_0,j_0} \geq a_{i,j_0}, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$b_{i_0,j_0} \geq b_{i_0,j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

- Все ситуации равновесия в чистых стратегиях можно найти следующим образом:
  - в каждом столбце матрицы A отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - в каждой строке матрицы B отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - все пары стратегий (i, j), такие, что оба элемента a_{ij} и b_{ij} отмечены звездочкой являются ситуациями равновесия.

Равновесие в чистых стратегиях

- Пара стратегий (i_0, j_0) является *ситуацией равновесия* (*в чистых стратегиях*) в биматричной игре,
- если выполняются неравенства

$$a_{i_0,j_0} \geq a_{i,j_0}, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$b_{i_0,j_0} \geq b_{i_0,j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

- Все ситуации равновесия в чистых стратегиях можно найти следующим образом:
  - в каждом столбце матрицы A отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - в каждой строке матрицы B отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - все пары стратегий (i, j), такие, что оба элемента a_{ij} и b_{ij} отмечены звездочкой являются ситуациями равновесия.

Равновесие в чистых стратегиях

- Пара стратегий (i_0, j_0) является *ситуацией равновесия* (*в чистых стратегиях*) в биматричной игре,
- если выполняются неравенства
$$a_{i_0,j_0} \geq a_{i,j_0}, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$b_{i_0,j_0} \geq b_{i_0,j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$
- Все ситуации равновесия в чистых стратегиях можно найти следующим образом:
  - в каждом столбце матрицы A отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - в каждой строке матрицы B отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - все пары стратегий (i, j), такие, что оба элемента a_{ij} и b_{ij} отмечены звездочкой являются ситуациями равновесия.

Равновесие в чистых стратегиях

- Пара стратегий (i_0, j_0) является *ситуацией равновесия* (*в чистых стратегиях*) в биматричной игре,
- если выполняются неравенства
$$a_{i_0,j_0} \geq a_{i,j_0}, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$b_{i_0,j_0} \geq b_{i_0,j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$
- Все ситуации равновесия в чистых стратегиях можно найти следующим образом:
  - в каждом столбце матрицы A отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - в каждой строке матрицы B отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - все пары стратегий (i, j), такие, что оба элемента a_{ij} и b_{ij} отмечены звездочкой являются ситуациями равновесия.

Равновесие в чистых стратегиях

- Пара стратегий (i_0, j_0) является *ситуацией равновесия* (*в чистых стратегиях*) в биматричной игре,
- если выполняются неравенства

$$a_{i_0,j_0} \geq a_{i,j_0}, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$b_{i_0,j_0} \geq b_{i_0,j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

- Все ситуации равновесия в чистых стратегиях можно найти следующим образом:
  - в каждом столбце матрицы A отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - в каждой строке матрицы B отмечаем звездочкой максимальные элементы;
  - все пары стратегий (i, j), такие, что оба элемента a_{ij} и b_{ij} отмечены звездочкой являются ситуациями равновесия.

Содержание

Классификация бесколиционных игр

- В теории бескоалиционных игр исторически сложилась своеобразная классификация игр,
- основанная на сравнение исходов в заданной игре, с исходами в одной из «эталонных» биматричных игр размера 2×2.
- Так, например, если в какой-то бескоалиционной игре имеется несколько неравноценных для всех игроков ситуаций равновесия, то говорят что эта игра есть игра типа «конфликт полов».
- Мы рассмотрим наиболее известные из таких «эталонных» биматричных игр.

Классификация бескоалиционных игр

- В теории бескоалиционных игр исторически сложилась своеобразная классификация игр,
- основанная на сравнение исходов в заданной игре, с исходами в одной из «эталонных» биматричных игр размера 2×2.
- Так, например, если в какой-то бескоалиционной игре имеется несколько неравноценных для всех игроков ситуаций равновесия, то говорят что эта игра есть игра типа «конфликт полов».
- Мы рассмотрим наиболее известные из таких «эталонных» биматричных игр.

Классификация бескоалиционных игр

- В теории бескоалиционных игр исторически сложилась своеобразная классификация игр,
- основанная на сравнение исходов в заданной игре, с исходами в одной из «эталонных» биматричных игр размера 2×2.
- Так, например, если в какой-то бескоалиционной игре имеется несколько неравноценных для всех игроков ситуаций равновесия, то говорят что эта игра есть игра типа «конфликт полов».
- Мы рассмотрим наиболее известные из таких «эталонных» биматричных игр.

Классификация бескоалиционных игр

- В теории бескоалиционных игр исторически сложилась своеобразная классификация игр,
- основанная на сравнение исходов в заданной игре, с исходами в одной из «эталонных» биматричных игр размера 2×2.
- Так, например, если в какой-то бескоалиционной игре имеется несколько неравноценных для всех игроков ситуаций равновесия, то говорят что эта игра есть игра типа «конфликт полов».
- Мы рассмотрим наиболее известные из таких «эталонных» биматричных игр.

Игра «дилемма заключенного»: формулировка

- Два бандита в отдельных камерах ожидают суда по подозрению в тяжком преступлении.
- Прокурор, имея доказательства в совершении подозреваемыми незначительного проступка (1 год тюрьмы),
- предлагает каждому из бандитов признаться в совершении тяжкого преступления.
- За признание обещено освободить из тюрьмы, но напарник будет осужден к 20 годам тюрьмы.
- Если признаются оба бандита, то получат по 5 лет тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: формулировка

- Два бандита в отдельных камерах ожидают суда по подозрению в тяжком преступлении.
- Прокурор, имея доказательства в совершении подозреваемыми незначительного проступка (1 год тюрьмы),
- предлагает каждому из бандитов признаться в совершении тяжкого преступления.
- За признание обещено освободить из тюрьмы, но напарник будет осужден к 20 годам тюрьмы.
- Если признаются оба бандита, то получат по 5 лет тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: формулировка

- Два бандита в отдельных камерах ожидают суда по подозрению в тяжком преступлении.
- Прокурор, имея доказательства в совершении подозреваемыми незначительного проступка (1 год тюрьмы),
- предлагает каждому из бандитов признаться в совершении тяжкого преступления.
- За признание обещено освободить из тюрьмы, но напарник будет осужден к 20 годам тюрьмы.
- Если признаются оба бандита, то получат по 5 лет тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: формулировка

- Два бандита в отдельных камерах ожидают суда по подозрению в тяжком преступлении.
- Прокурор, имея доказательства в совершении подозреваемыми незначительного проступка (1 год тюрьмы),
- предлагает каждому из бандитов признаться в совершении тяжкого преступления.
- За признание обещено освободить из тюрьмы, но напарник будет осужден к 20 годам тюрьмы.
- Если признаются оба бандита, то получат по 5 лет тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: формулировка

- Два бандита в отдельных камерах ожидают суда по подозрению в тяжком преступлении.
- Прокурор, имея доказательства в совершении подозреваемыми незначительного проступка (1 год тюрьмы),
- предлагает каждому из бандитов признаться в совершении тяжкого преступления.
- За признание обещено освободить из тюрьмы, но напарник будет осужден к 20 годам тюрьмы.
- Если признаются оба бандита, то получат по 5 лет тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: анализ

- В данной игре участвуют два игрока: игрок 1 — это бандит 1, игрок 2 — бандит 2.
- Их выигрыши представлены в следующей таблице:

	Призн.	*Не призн.*
Призн.	$-5, -5$	$0, -20$
Не призн.	$-20, 0$	$-1, -1$

.

- Здесь обе матрицы A и B объединены в одну таблицу, в ячейке (i,j) которой записана пара чисел a_{ij}, b_{ij}.
- В этой игре единственная ситуация равновесия — обоим бандитам признаться и получить по пять лет тюрьмы.
- Данная ситуация является доминирующим равновесием.
- Это не самый лучший исход для игроков: если оба бандита не признаются, то оба получат год тюрьмы.
- Но такой исход не является ситуацией равновесия, поскольку у каждого из бандитов остается искушение признаться и избежать тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: анализ

- В данной игре участвуют два игрока: игрок 1 — это бандит 1, игрок 2 — бандит 2.
- Их выигрыши представлены в следующей таблице:

	Призн.	*Не призн.*
Призн.	$-5, -5$	$0, -20$
Не призн.	$-20, 0$	$-1, -1$

.

- Здесь обе матрицы A и B объединены в одну таблицу, в ячейке (i,j) которой записана пара чисел a_{ij}, b_{ij}.
- В этой игре единственная ситуация равновесия — обоим бандитам признаться и получить по пять лет тюрьмы.
- Данная ситуация является доминирующим равновесием.
- Это не самый лучший исход для игроков: если оба бандита не признаются, то оба получат год тюрьмы.
- Но такой исход не является ситуацией равновесия, поскольку у каждого из бандитов остается искушение признаться и избежать тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: анализ

- В данной игре участвуют два игрока: игрок 1 — это бандит 1, игрок 2 — бандит 2.
- Их выигрыши представлены в следующей таблице:

	Призн.	*Не призн.*
Призн.	$-5,-5$	$0,-20$
Не призн.	$-20,0$	$-1,-1$

.

- Здесь обе матрицы A и B объединены в одну таблицу, в ячейке (i,j) которой записана пара чисел a_{ij}, b_{ij}.
- В этой игре единственная ситуация равновесия — обоим бандитам признаться и получить по пять лет тюрьмы.
- Данная ситуация является доминирующим равновесием.
- Это не самый лучший исход для игроков: если оба бандита не признаются, то оба получат год тюрьмы.
- Но такой исход не является ситуацией равновесия, поскольку у каждого из бандитов остается искушение признаться и избежать тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: анализ

- В данной игре участвуют два игрока: игрок 1 — это бандит 1, игрок 2 — бандит 2.
- Их выигрыши представлены в следующей таблице:

	Призн.	*Не призн.*
Призн.	$-5^*, -5^*$	$0^*, -20$
Не призн.	$-20, 0^*$	$-1, -1$

.

- Здесь обе матрицы A и B объединены в одну таблицу, в ячейке (i,j) которой записана пара чисел a_{ij}, b_{ij}.
- В этой игре единственная ситуация равновесия — обоим бандитам признаться и получить по пять лет тюрьмы.
- Данная ситуация является доминирующим равновесием.
- Это не самый лучший исход для игроков: если оба бандита не признаются, то оба получат год тюрьмы.
- Но такой исход не является ситуацией равновесия, поскольку у каждого из бандитов остается искушение признаться и избежать тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: анализ

- В данной игре участвуют два игрока: игрок 1 — это бандит 1, игрок 2 — бандит 2.
- Их выигрыши представлены в следующей таблице:

	Призн.	*Не призн.*
Призн.	$-5^*, -5^*$	$0^*, -20$
Не призн.	$-20, 0^*$	$-1, -1$

.

- Здесь обе матрицы A и B объединены в одну таблицу, в ячейке (i,j) которой записана пара чисел a_{ij}, b_{ij}.
- В этой игре единственная ситуация равновесия — обоим бандитам признаться и получить по пять лет тюрьмы.
- Данная ситуация является доминирующим равновесием.
- Это не самый лучший исход для игроков: если оба бандита не признаются, то оба получат год тюрьмы.
- Но такой исход не является ситуацией равновесия, поскольку у каждого из бандитов остается искушение признаться и избежать тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: анализ

- В данной игре участвуют два игрока: игрок 1 — это бандит 1, игрок 2 — бандит 2.
- Их выигрыши представлены в следующей таблице:

	Призн.	*Не призн.*
Призн.	$-5^*, -5^*$	$0^*, -20$
Не призн.	$-20, 0^*$	$-1, -1$

.

- Здесь обе матрицы A и B объединены в одну таблицу, в ячейке (i, j) которой записана пара чисел a_{ij}, b_{ij}.
- В этой игре единственная ситуация равновесия — обоим бандитам признаться и получить по пять лет тюрьмы.
- Данная ситуация является доминирующим равновесием.
- Это не самый лучший исход для игроков: если оба бандита не признаются, то оба получат год тюрьмы.
- Но такой исход не является ситуацией равновесия, поскольку у каждого из бандитов остается искушение признаться и избежать тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: анализ

- В данной игре участвуют два игрока: игрок 1 — это бандит 1, игрок 2 — бандит 2.
- Их выигрыши представлены в следующей таблице:

	Призн.	*Не призн.*
Призн.	$-5^*, -5^*$	$0^*, -20$
Не призн.	$-20, 0^*$	$-1, -1$

.

- Здесь обе матрицы A и B объединены в одну таблицу, в ячейке (i,j) которой записана пара чисел a_{ij}, b_{ij}.
- В этой игре единственная ситуация равновесия — обоим бандитам признаться и получить по пять лет тюрьмы.
- Данная ситуация является доминирующим равновесием.
- Это не самый лучший исход для игроков: если оба бандита не признаются, то оба получат год тюрьмы.
- Но такой исход не является ситуацией равновесия, поскольку у каждого из бандитов остается искушение признаться и избежать тюрьмы.

Игра «дилемма заключенного»: иная интерпретация

- Сходная ситуация возникает, когда две фирмы (игроки 1 и 2), конкурирующие на одном рынке, продают свои товары по одинаковой цене.
- Каждая фирма намеревается снизить цены с целью захвата большей доли рынка и увеличения своей прибыли.
- Возможные выигрыши фирм представлены в следующей таблице:

	Сохранение цен	*Снижение цен*
Сохранение цен	$3, 3$	$1, 4$
Снижение цен	$4, 1$	$2, 2$

.

- Мы видим, что данная игра совершенно аналогична игре «дилемма заключенного»: в ней есть ситуация, которая для обоих игроков лучше ситуации равновесия.

Игра «дилемма заключенного»: иная интерпретация

- Сходная ситуация возникает, когда две фирмы (игроки 1 и 2), конкурирующие на одном рынке, продают свои товары по одинаковой цене.
- Каждая фирма намеревается снизить цены с целью захвата большей доли рынка и увеличения своей прибыли.
- Возможные выигрыши фирм представлены в следующей таблице:

	Сохранение цен	*Снижение цен*
Сохранение цен	$3, 3$	$1, 4$
Снижение цен	$4, 1$	$2, 2$

.

- Мы видим, что данная игра совершенно аналогична игре «дилемма заключенного»: в ней есть ситуация, которая для обоих игроков лучше ситуации равновесия.

Игра «дилемма заключенного»: иная интерпретация

- Сходная ситуация возникает, когда две фирмы (игроки 1 и 2), конкурирующие на одном рынке, продают свои товары по одинаковой цене.
- Каждая фирма намеревается снизить цены с целью захвата большей доли рынка и увеличения своей прибыли.
- Возможные выигрыши фирм представлены в следующей таблице:

	Сохранение цен	*Снижение цен*
Сохранение цен	$3, 3$	$1, 4$
Снижение цен	$4, 1$	$2, 2$

.

- Мы видим, что данная игра совершенно аналогична игре «дилемма заключенного»: в ней есть ситуация, которая для обоих игроков лучше ситуации равновесия.

Игра «дилемма заключенного»: иная интерпретация

- Сходная ситуация возникает, когда две фирмы (игроки 1 и 2), конкурирующие на одном рынке, продают свои товары по одинаковой цене.
- Каждая фирма намеревается снизить цены с целью захвата большей доли рынка и увеличения своей прибыли.
- Возможные выигрыши фирм представлены в следующей таблице:

	Сохранение цен	*Снижение цен*
Сохранение цен	$3, 3$	$1, 4^*$
Снижение цен	$4^*, 1$	$2^*, 2^*$

.

- Мы видим, что данная игра совершенно аналогична игре «дилемма заключенного»: в ней есть ситуация, которая для обоих игроков лучше ситуации равновесия.

Игра «ястребы и голуби»: формулировка

- А. Шарон и Я. Арафат — это бывшие лидеры Израиля и Палестины.
- Если оба Шарон и Арафат будут ястребами (проводить воинственную политику), то они ничего не добьются.
- Если они будут голубями (проводить миролюбивую политику), то выигрыш каждого оценивается в 2 единицы.
- В противостоянии ястреба и голубя ястреб выигрывает 3 единицы, а голубь только единицу.

Игра «ястребы и голуби»: формулировка

- А. Шарон и Я. Арафат — это бывшие лидеры Израиля и Палестины.
- Если оба Шарон и Арафат будут ястребами (проводить воинственную политику), то они ничего не добьются.
- Если они будут голубями (проводить миролюбивую политику), то выигрыш каждого оценивается в 2 единицы.
- В противостоянии ястреба и голубя ястреб выигрывает 3 единицы, а голубь только единицу.

Игра «ястребы и голуби»: формулировка

- А. Шарон и Я. Арафат — это бывшие лидеры Израиля и Палестины.
- Если оба Шарон и Арафат будут ястребами (проводить воинственную политику), то они ничего не добьются.
- Если они будут голубями (проводить миролюбивую политику), то выигрыш каждого оценивается в 2 единицы.
- В противостоянии ястреба и голубя ястреб выигрывает 3 единицы, а голубь только единицу.

Игра «ястребы и голуби»: формулировка

- А. Шарон и Я. Арафат — это бывшие лидеры Израиля и Палестины.
- Если оба Шарон и Арафат будут ястребами (проводить воинственную политику), то они ничего не добьются.
- Если они будут голубями (проводить миролюбивую политику), то выигрыш каждого оценивается в 2 единицы.
- В противостоянии ястреба и голубя ястреб выигрывает 3 единицы, а голубь только единицу.

Игра «ястребы и голуби»: анализ

- Пусть Шарон — это игрок 1, а Арафат — игрок 2.
- Выигрыши игроков представлены в следующей таблице:

	Ястреб	*Голубь*
Ястреб	$0, 0$	$3, 1$
Голубь	$1, 3$	$2, 2$

.

- Здесь две неравноценные для игроков ситуации равновесия, в которых один из игроков *Ястреб*, а другой *Голубь*.
- В каждой из этих ситуаций *Голубь* может *угрожать* стать *Ястребом*.
- При этом инициатор угрозы (*Голубь*) потеряет меньше: одну единицу против двух у оппонента (*Ястреба*).
- Наличие такой угрозы может побудить игроков к кооперации, поскольку в игре имеется неравновесная ситуация (*Голубь*,*Голубь*), в которой сумма выигрышей игроков такая же, как и в обоих ситуациях равновесия.

Игра «ястребы и голуби»: анализ

- Пусть Шарон — это игрок 1, а Арафат — игрок 2.
- Выигрыши игроков представлены в следующей таблице:

	Ястреб	*Голубь*
Ястреб	$0,0$	$3,1$
Голубь	$1,3$	$2,2$

.

- Здесь две неравноценные для игроков ситуации равновесия, в которых один из игроков *Ястреб*, а другой *Голубь*.
- В каждой из этих ситуаций *Голубь* может *угрожать* стать *Ястребом*.
- При этом инициатор угрозы (*Голубь*) потеряет меньше: одну единицу против двух у оппонента (*Ястреба*).
- Наличие такой угрозы может побудить игроков к кооперации, поскольку в игре имеется неравновесная ситуация (*Голубь*,*Голубь*), в которой сумма выигрышей игроков такая же, как и в обоих ситуациях равновесия.

Игра «ястребы и голуби»: анализ

- Пусть Шарон — это игрок 1, а Арафат — игрок 2.
- Выигрыши игроков представлены в следующей таблице:

	Ястреб	*Голубь*
Ястреб	$0, 0$	$3^*, 1^*$
Голубь	$1^*, 3^*$	$2, 2$

.

- Здесь две неравноценные для игроков ситуации равновесия, в которых один из игроков *Ястреб*, а другой *Голубь*.
- В каждой из этих ситуаций *Голубь* может *угрожать* стать *Ястребом*.
- При этом инициатор угрозы (*Голубь*) потеряет меньше: одну единицу против двух у оппонента (*Ястреба*).
- Наличие такой угрозы может побудить игроков к кооперации, поскольку в игре имеется неравновесная ситуация (*Голубь*,*Голубь*), в которой сумма выигрышей игроков такая же, как и в обоих ситуациях равновесия.

Игра «ястребы и голуби»: анализ

- Пусть Шарон — это игрок 1, а Арафат — игрок 2.
- Выигрыши игроков представлены в следующей таблице:

	Ястреб	*Голубь*
Ястреб	$0, 0$	$3^*, 1^*$
Голубь	$1^*, 3^*$	$2, 2$

.

- Здесь две неравноценные для игроков ситуации равновесия, в которых один из игроков *Ястреб*, а другой *Голубь*.
- В каждой из этих ситуаций *Голубь* может *угрожать* стать *Ястребом*.
- При этом инициатор угрозы (*Голубь*) потеряет меньше: одну единицу против двух у оппонента (*Ястреба*).
- Наличие такой угрозы может побудить игроков к кооперации, поскольку в игре имеется неравновесная ситуация (*Голубь*,*Голубь*), в которой сумма выигрышей игроков такая же, как и в обоих ситуациях равновесия.

Игра «ястребы и голуби»: анализ

- Пусть Шарон — это игрок 1, а Арафат — игрок 2.
- Выигрыши игроков представлены в следующей таблице:

	Ястреб	*Голубь*
Ястреб	$0, 0$	$3^*, 1^*$
Голубь	$1^*, 3^*$	$2, 2$

.

- Здесь две неравноценные для игроков ситуации равновесия, в которых один из игроков *Ястреб*, а другой *Голубь*.
- В каждой из этих ситуаций *Голубь* может *угрожать* стать *Ястребом*.
- При этом инициатор угрозы (*Голубь*) потеряет меньше: одну единицу против двух у оппонента (*Ястреба*).
- Наличие такой угрозы может побудить игроков к кооперации, поскольку в игре имеется неравновесная ситуация (*Голубь*,*Голубь*), в которой сумма выигрышей игроков такая же, как и в обоих ситуациях равновесия.

Игра «ястребы и голуби»: анализ

- Пусть Шарон — это игрок 1, а Арафат — игрок 2.
- Выигрыши игроков представлены в следующей таблице:

	Ястреб	*Голубь*
Ястреб	$0, 0$	$3^*, 1^*$
Голубь	$1^*, 3^*$	$2, 2$

.

- Здесь две неравноценные для игроков ситуации равновесия, в которых один из игроков *Ястреб*, а другой *Голубь*.
- В каждой из этих ситуаций *Голубь* может *угрожать* стать *Ястребом*.
- При этом инициатор угрозы (*Голубь*) потеряет меньше: одну единицу против двух у оппонента (*Ястреба*).
- Наличие такой угрозы может побудить игроков к кооперации, поскольку в игре имеется неравновесная ситуация (*Голубь*,*Голубь*), в которой сумма выигрышей игроков такая же, как и в обоих ситуациях равновесия.

Игра «ястребы и голуби»: анализ

- Пусть Шарон — это игрок 1, а Арафат — игрок 2.
- Выигрыши игроков представлены в следующей таблице:

	Ястреб	*Голубь*
Ястреб	$0, 0$	$3^*, 1^*$
Голубь	$1^*, 3^*$	$2, 2$

.

- Здесь две неравноценные для игроков ситуации равновесия, в которых один из игроков *Ястреб*, а другой *Голубь*.
- В каждой из этих ситуаций *Голубь* может *угрожать* стать *Ястребом*.
- При этом инициатор угрозы (*Голубь*) потеряет меньше: одну единицу против двух у оппонента (*Ястреба*).
- Наличие такой угрозы может побудить игроков к кооперации, поскольку в игре имеется неравновесная ситуация (*Голубь*,*Голубь*), в которой сумма выигрышей игроков такая же, как и в обоих ситуациях равновесия.

Игра «ястребы и голуби»: анализ

- Пусть Шарон — это игрок 1, а Арафат — игрок 2.
- Выигрыши игроков представлены в следующей таблице:

	Ястреб	*Голубь*
Ястреб	$0, 0$	$3^*, 1^*$
Голубь	$1^*, 3^*$	$2, 2$

.

- Здесь две неравноценные для игроков ситуации равновесия, в которых один из игроков *Ястреб*, а другой *Голубь*.
- В каждой из этих ситуаций *Голубь* может *угрожать* стать *Ястребом*.
- При этом инициатор угрозы (*Голубь*) потеряет меньше: одну единицу против двух у оппонента (*Ястреба*).
- Наличие такой угрозы может побудить игроков к кооперации, поскольку в игре имеется неравновесная ситуация (*Голубь*,*Голубь*), в которой сумма выигрышей игроков такая же, как и в обоих ситуациях равновесия.

Игра «конфликт полов»: формулировка

- Муж и жена планируют вместе провести выходной,
- муж хотел бы пойти на футбол,
- а жена — на балет.
- Кроме того, они предпочитают провести свободное время вместе.
- Выигрыши игроков (муж — игрок 1, а жена — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2, 1$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1, 2$

.

Игра «конфликт полов»: формулировка

- Муж и жена планируют вместе провести выходной,
- муж хотел бы пойти на футбол,
- а жена — на балет.
- Кроме того, они предпочитают провести свободное время вместе.
- Выигрыши игроков (муж — игрок 1, а жена — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2, 1$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1, 2$

.

Игра «конфликт полов»: формулировка

- Муж и жена планируют вместе провести выходной,
- муж хотел бы пойти на футбол,
- а жена — на балет.
- Кроме того, они предпочитают провести свободное время вместе.
- Выигрыши игроков (муж — игрок 1, а жена — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2, 1$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1, 2$

.

Игра «конфликт полов»: формулировка

- Муж и жена планируют вместе провести выходной,
- муж хотел бы пойти на футбол,
- а жена — на балет.
- Кроме того, они предпочитают провести свободное время вместе.
- Выигрыши игроков (муж — игрок 1, а жена — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2, 1$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1, 2$

.

Игра «конфликт полов»: формулировка

- Муж и жена планируют вместе провести выходной,
- муж хотел бы пойти на футбол,
- а жена — на балет.
- Кроме того, они предпочитают провести свободное время вместе.
- Выигрыши игроков (муж — игрок 1, а жена — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2, 1$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1, 2$

.

Игра «конфликт полов»: анализ

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2, 1$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1, 2$

- В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда муж и жена идут вместе либо на футбол, либо на балет.
- Заметим, что эти ситуации неравноценны для игроков.
- Эта игра во многом схожа с игрой «ястребы и голуби»,
- но в ней меньше возможностей для кооперации, поскольку здесь нет неравновесной ситуации, приемлемой для обоих игроков.
- Следует также отметить, что возможности договориться существуют и в игре «конфликт полов», но для этого данную игру нужно рассматривать как многораундовую.

Игра «конфликт полов»: анализ

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2^*, 1^*$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1^*, 2^*$

- В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда муж и жена идут вместе либо на футбол, либо на балет.
- Заметим, что эти ситуации неравноценны для игроков.
- Эта игра во многом схожа с игрой «ястребы и голуби»,
- но в ней меньше возможностей для кооперации, поскольку здесь нет неравновесной ситуации, приемлемой для обоих игроков.
- Следует также отметить, что возможности договориться существуют и в игре «конфликт полов», но для этого данную игру нужно рассматривать как многораундовую.

Игра «конфликт полов»: анализ

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2^*, 1^*$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1^*, 2^*$

- В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда муж и жена идут вместе либо на футбол, либо на балет.
- Заметим, что эти ситуации неравноценны для игроков.
- Эта игра во многом схожа с игрой «ястребы и голуби»,
- но в ней меньше возможностей для кооперации, поскольку здесь нет неравновесной ситуации, приемлемой для обоих игроков.
- Следует также отметить, что возможности договориться существуют и в игре «конфликт полов», но для этого данную игру нужно рассматривать как многораундовую.

Игра «конфликт полов»: анализ

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2^*, 1^*$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1^*, 2^*$

- В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда муж и жена идут вместе либо на футбол, либо на балет.
- Заметим, что эти ситуации неравноценны для игроков.
- Эта игра во многом схожа с игрой «ястребы и голуби»,
- но в ней меньше возможностей для кооперации, поскольку здесь нет неравновесной ситуации, приемлемой для обоих игроков.
- Следует также отметить, что возможности договориться существуют и в игре «конфликт полов», но для этого данную игру нужно рассматривать как многораундовую.

Игра «конфликт полов»: анализ

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2^*, 1^*$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1^*, 2^*$

- В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда муж и жена идут вместе либо на футбол, либо на балет.
- Заметим, что эти ситуации неравноценны для игроков.
- Эта игра во многом схожа с игрой «ястребы и голуби»,
- но в ней меньше возможностей для кооперации, поскольку здесь нет неравновесной ситуации, приемлемой для обоих игроков.
- Следует также отметить, что возможности договориться существуют и в игре «конфликт полов», но для этого данную игру нужно рассматривать как многораундовую.

Игра «конфликт полов»: анализ

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2^*, 1^*$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1^*, 2^*$

- В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда муж и жена идут вместе либо на футбол, либо на балет.
- Заметим, что эти ситуации неравноценны для игроков.
- Эта игра во многом схожа с игрой «ястребы и голуби»,
- но в ней меньше возможностей для кооперации, поскольку здесь нет неравновесной ситуации, приемлемой для обоих игроков.
- Следует также отметить, что возможности договориться существуют и в игре «конфликт полов», но для этого данную игру нужно рассматривать как многораундовую.

Игра «координация по Паретто»: формулировка

- Если теноры и сопрано в хоре поют в одном ключе A, то хор поет прекрасно.
- Если все поют в ключе B, то хор поет удовлетворительно (в два раза хуже).
- Но если теноры и сопрано поют в разных ключах, то хор не поет совсем.

Игра «координация по Паретто»: формулировка

- Если теноры и сопрано в хоре поют в одном ключе A, то хор поет прекрасно.
- Если все поют в ключе B, то хор поет удовлетворительно (в два раза хуже).
- Но если теноры и сопрано поют в разных ключах, то хор не поет совсем.

Игра «координация по Паретто»: формулировка

- Если теноры и сопрано в хоре поют в одном ключе A, то хор поет прекрасно.
- Если все поют в ключе B, то хор поет удовлетворительно (в два раза хуже).
- Но если теноры и сопрано поют в разных ключах, то хор не поет совсем.

Игра «координация по Паретто»: анализ

- Выигрыши игроков (теноры — игрок 1, а сопрано — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	A	B
A	$2, 2$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 1$

.

- В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда теноры и сопрано поют в одном ключе.
- Причем здесь ситуация (A, A) предпочтительнее для обоих груп певцов и является *оптимальной по Парето.*
- В экономике оптимальным по Парето называется такое распределение доходов индивидуумов, когда не существует друго распределения, которое увеличивает доход хотя бы одного индивидуума, не уменьшая доходы остальных индивидуумов.

Игра «координация по Паретто»: анализ

- Выигрыши игроков (теноры — игрок 1, а сопрано — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	A	B
A	$2^*, 2^*$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1^*, 1^*$

.

- В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда теноры и сопрано поют в одном ключе.
- Причем здесь ситуация (A, A) предпочтительнее для обоих груп певцов и является *оптимальной по Парето.*
- В экономике оптимальным по Парето называется такое распределение доходов индивидуумов, когда не существует друго распределения, которое увеличивает доход хотя бы одного индивидуума, не уменьшая доходы остальных индивидуумов.

Игра «координация по Паретто»: анализ

- Выигрыши игроков (теноры — игрок 1, а сопрано — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	A	B
A	$2^*, 2^*$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1^*, 1^*$

.

- В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда теноры и сопрано поют в одном ключе.
- Причем здесь ситуация (A, A) предпочтительнее для обоих груп певцов и является *оптимальной по Парето.*
- В экономике оптимальным по Парето называется такое распределение доходов индивидуумов, когда не существует друго распределения, которое увеличивает доход хотя бы одного индивидуума, не уменьшая доходы остальных индивидуумов.

Игра «координация по Паретто»: анализ

- Выигрыши игроков (теноры — игрок 1, а сопрано — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	A	B
A	$2^*, 2^*$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1^*, 1^*$

.

- В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда теноры и сопрано поют в одном ключе.
- Причем здесь ситуация (A, A) предпочтительнее для обоих груп певцов и является *оптимальной по Парето*.
- В экономике оптимальным по Парето называется такое распределение доходов индивидуумов, когда не существует друго распределения, которое увеличивает доход хотя бы одного индивидуума, не уменьшая доходы остальных индивидуумов.

Игра «координация»

- Если два теннисиста тренируются по одному (из двух) плану, то они выиграют парный теннисный турнир.
- Но если они придерживаются разных тренировочных планов, то они проиграют турнир.

- Выигрыши игроков (теннисист 1 — игрок 1, теннисист 2 – игрок 2) представлены в следующей таблице:

	План 1	*План 2*
План 1	$1, 1$	$0, 0$
План 2	$0, 0$	$1, 1$

- В данной игре имеется две равноценные ситуации равновесия, когда оба теннисиста придерживаются одного тренировочного плана.
- Но игрокам нужно согласовать, по какому плану им тренироваться.

Игра «координация»

- Если два теннисиста тренируются по одному (из двух) плану, то они выиграют парный теннисный турнир.
- Но если они придерживаются разных тренировочных планов, то они проиграют турнир.
- Выигрыши игроков (теннисист 1 — игрок 1, теннисист 2 – игрок 2) представлены в следующей таблице:

	План 1	*План 2*
План 1	$1, 1$	$0, 0$
План 2	$0, 0$	$1, 1$

.

- В данной игре имеется две равноценные ситуации равновесия, когда оба теннисиста придерживаются одного тренировочного плана.
- Но игрокам нужно согласовать, по какому плану им тренироваться.

Игра «координация»

- Если два теннисиста тренируются по одному (из двух) плану, то они выиграют парный теннисный турнир.
- Но если они придерживаются разных тренировочных планов, то они проиграют турнир.

- Выигрыши игроков (теннисист 1 — игрок 1, теннисист 2 – игрок 2) представлены в следующей таблице:

	План 1	*План 2*
План 1	$1,1$	$0,0$
План 2	$0,0$	$1,1$

.

- В данной игре имеется две равноценные ситуации равновесия, когда оба теннисиста придерживаются одного тренировочного плана.
- Но игрокам нужно согласовать, по какому плану им тренироваться.

Игра «координация»

- Если два теннисиста тренируются по одному (из двух) плану, то они выиграют парный теннисный турнир.
- Но если они придерживаются разных тренировочных планов, то они проиграют турнир.

- Выигрыши игроков (теннисист 1 — игрок 1, теннисист 2 – игрок 2) представлены в следующей таблице:

	План 1	*План 2*
План 1	$1^*, 1^*$	$0, 0$
План 2	$0, 0$	$1^*, 1^*$

.

- В данной игре имеется две равноценные ситуации равновесия, когда оба теннисиста придерживаются одного тренировочного плана.
- Но игрокам нужно согласовать, по какому плану им тренироваться.

Игра «координация»

- Если два теннисиста тренируются по одному (из двух) плану, то они выиграют парный теннисный турнир.
- Но если они придерживаются разных тренировочных планов, то они проиграют турнир.

- Выигрыши игроков (теннисист 1 — игрок 1, теннисист 2 – игрок 2) представлены в следующей таблице:

	План 1	*План 2*
План 1	$1^*, 1^*$	$0, 0$
План 2	$0, 0$	$1^*, 1^*$

.

- В данной игре имеется две равноценные ситуации равновесия, когда оба теннисиста придерживаются одного тренировочного плана.
- Но игрокам нужно согласовать, по какому плану им тренироваться.

Смешанные стратегии

- Обычно смешанные стратегии применяют в двух случаях:
  1. не существует равносия в чистых стратегиях;
  2. смешанная стратегия доминирует чистые стратегии.
- Пусть $p = (p_1, \dots, p_m)^T$ и $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ — смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков.
- Тогда средние выигрыши первого и второго игроков соответственно равны

$$\phi_1(A, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j = p^T A q,$$

$$\phi_2(B, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, q_j = p^T B q.$$

Смешанные стратегии

- Обычно смешанные стратегии применяют в двух случаях:
  1. не существует равносия в чистых стратегиях;
  2. смешанная стратегия доминирует чистые стратегии.
- Пусть $p = (p_1, \ldots, p_m)^T$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$ — смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков.
- Тогда средние выигрыши первого и второго игроков соответственно равны

$$\phi_1(A, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j = p^T A q,$$

$$\phi_2(B, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, q_j = p^T B q.$$

Смешанные стратегии

- Обычно смешанные стратегии применяют в двух случаях:
  1. не существует равносия в чистых стратегиях;
  2. смешанная стратегия доминирует чистые стратегии.
- Пусть $p = (p_1, \dots, p_m)^T$ и $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ — смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков.
- Тогда средние выигрыши первого и второго игроков соответственно равны

$$\phi_1(A, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j = p^T A q,$$

$$\phi_2(B, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, q_j = p^T B q.$$

Смешанные стратегии

- Обычно смешанные стратегии применяют в двух случаях:
  1. не существует равносия в чистых стратегиях;
  2. смешанная стратегия доминирует чистые стратегии.
- Пусть $p = (p_1, \ldots, p_m)^T$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$ — смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков.
- Тогда средние выигрыши первого и второго игроков соответственно равны

$$\phi_1(A, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = p^T A q,$$

$$\phi_2(B, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i q_j = p^T B q.$$

Смешанные стратегии

- Обычно смешанные стратегии применяют в двух случаях:
  1. не существует равносия в чистых стратегиях;
  2. смешанная стратегия доминирует чистые стратегии.
- Пусть $p = (p_1, \ldots, p_m)^T$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$ — смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков.
- Тогда средние выигрыши первого и второго игроков соответственно равны

$$\phi_1(A, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j = p^T A q,$$

$$\phi_2(B, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, q_j = p^T B q.$$

Содержание

Равновесие в смешанных стратегиях

- Пара смеш. стратегий (p, q) есть ситуация равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда
- каждому игроку в отдельности не выгодно менять свою смешанную стратегию на любую чистую стратегию:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l \ge \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

- Чтобы найти ситуации равновесия нужно решить систему (1) с неизвестными p и q при условиях

$$p \ge 0,\ q \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{2}$$

К док-ву усл. дополн. нежесткости
К сведению к ЛЗД

Равновесие в смешанных стратегиях

- Пара смеш. стратегий (p, q) есть ситуация равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда
- каждому игроку в отдельности не выгодно менять свою смешанную стратегию на любую чистую стратегию:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l &\ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l &\ge \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

- Чтобы найти ситуации равновесия нужно решить систему (1) с неизвестными p и q при условиях

$$p \ge 0,\ q \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{2}$$

К док-ву усл. дополн. нежесткости
К сведению к ЛЗД

Равновесие в смешанных стратегиях

- Пара смеш. стратегий (p, q) есть ситуация равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда
- каждому игроку в отдельности не выгодно менять свою смешанную стратегию на любую чистую стратегию:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l &\geq \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

- Чтобы найти ситуации равновесия нужно решить систему (1) с неизвестными p и q при условиях

$$p \geq 0,\ q \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{2}$$

◂ К док-ву усл. дополн. нежесткости ◂ К сведению к ЛЗД

Равновесие в смешанных стратегиях

- Пара смеш. стратегий (p,q) есть ситуация равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда
- каждому игроку в отдельности не выгодно менять свою смешанную стратегию на любую чистую стратегию:

$$\begin{array}{ll} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\,p_k\,q_l \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j, & i=1,\dots,m, \\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\,p_k\,q_l \geq \sum_{i=1}^{m} b_{ij}p_i, & j=1,\dots,n. \end{array} \quad (1)$$

- Чтобы найти ситуации равновесия нужно решить систему (1) с неизвестными p и q при условиях

$$p \geq 0,\ q \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \quad (2)$$

◂ К док-ву усл. дополн. нежесткости ◂ К сведению к ЛЗД

Равновесие в смешанных стратегиях

- Пара смеш. стратегий (p, q) есть ситуация равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда
- каждому игроку в отдельности не выгодно менять свою смешанную стратегию на любую чистую стратегию:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l &\geq \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

- Чтобы найти ситуации равновесия нужно решить систему (1) с неизвестными p и q при условиях

$$p \geq 0, \; q \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{2}$$

К док-ву усл. дополн. нежесткости
К сведению к ЛЗД

Равновесие в смешанных стратегиях

- Пара смеш. стратегий (p, q) есть ситуация равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда
- каждому игроку в отдельности не выгодно менять свою смешанную стратегию на любую чистую стратегию:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l &\geq \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

- Чтобы найти ситуации равновесия нужно решить систему (1) с неизвестными p и q при условиях

$$p \geq 0,\ q \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{2}$$

К док-ву усл. дополн. нежесткости
К сведению к ЛЗД

Равновесие в смешанных стратегиях

- Пара смеш. стратегий (p,q) есть ситуация равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда
- каждому игроку в отдельности не выгодно менять свою смешанную стратегию на любую чистую стратегию:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\,p_k\,q_l \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j, \quad i=1,\dots,m,\\ &\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\,p_k\,q_l \geq \sum_{i=1}^{m} b_{ij}p_i, \quad j=1,\dots,n. \end{aligned} \tag{1}$$

- Чтобы найти ситуации равновесия нужно решить систему (1) с неизвестными p и q при условиях

$$p \geq 0,\ q \geq 0,\quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{2}$$

К док-ву усл. дополн. нежесткости
К сведению к ЛЗД

Равновесие в смешанных стратегиях

- Пара смеш. стратегий (p, q) есть ситуация равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда
- каждому игроку в отдельности не выгодно менять свою смешанную стратегию на любую чистую стратегию:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l &\ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l &\ge \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

- Чтобы найти ситуации равновесия нужно решить систему (1) с неизвестными p и q при условиях

$$p \ge 0,\ q \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{2}$$

К док-ву усл. дополн. нежесткости К сведению к ЛЗД

Равновесие в смешанных стратегиях

- Пара смеш. стратегий (p, q) есть ситуация равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда
- каждому игроку в отдельности не выгодно менять свою смешанную стратегию на любую чистую стратегию:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l \geq \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

- Чтобы найти ситуации равновесия нужно решить систему (1) с неизвестными p и q при условиях

$$p \geq 0,\ q \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{2}$$

◂ К док-ву усл. дополн. нежесткости ◂ К сведению к ЛЗД

Содержание

Условия дополняющей нежесткости

Теорема

Все решения (p, q) системы неравенств (1) и (2) удовлетворяют следующим условиям:

$$p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$q_j \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

К доказательству К сведению к ЛЗД

Условия дополняющей нежесткости

Теорема

Все решения (p, q) *системы неравенств* (1) *и* (2) *удовлетворяют следующим условиям:*

$$p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3}$$

$$q_j \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{4}$$

К доказательству К сведению к ЛЗД

Условия дополняющей нежесткости

Теорема

Все решения (p, q) *системы неравенств* (1) *и* (2) *удовлетворяют следующим условиям:*

$$p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3}$$

$$q_j \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{4}$$

К доказательству К сведению к ЛЗД

Условия дополняющей нежесткости: доказательство

- Сложив m левых частей равенств (3), каждая из которых неотрицательна в силу (1), получим

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l \right) \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j = 0.$$

- Отсюда следует, что и каждое из слагаемых в первой сумме также равно нулю. Это доказывает (3).
- Условие (4) доказывается аналогично.

Условия дополняющей нежесткости: доказательство

- Сложив m левых частей равенств (3), каждая из которых неотрицательна в силу (1), получим

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l \right) \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j = 0.$$

- Отсюда следует, что и каждое из слагаемых в первой сумме также равно нулю. Это доказывает (3).
- Условие (4) доказывается аналогично.

Условия дополняющей нежесткости: доказательство

- Сложив m левых частей равенств (3), каждая из которых неотрицательна в силу (1), получим

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l \right) \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j = 0.$$

- Отсюда следует, что и каждое из слагаемых в первой сумме также равно нулю. Это доказывает (3).
- Условие (4) доказывается аналогично.

Условия дополняющей нежесткости: доказательство

- Сложив m левых частей равенств (3), каждая из которых неотрицательна в силу (1), получим

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l \right) \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j = 0.$$

- Отсюда следует, что и каждое из слагаемых в первой сумме также равно нулю. Это доказывает (3).
- Условие (4) доказывается аналогично.

Условия дополняющей нежесткости: доказательство

- Сложив m левых частей равенств (3), каждая из которых неотрицательна в силу (1), получим

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l \right) \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j = 0.$$

- Отсюда следует, что и каждое из слагаемых в первой сумме также равно нулю. Это доказывает (3).
- Условие (4) доказывается аналогично.

Условия дополняющей нежесткости: доказательство

- Сложив m левых частей равенств (3), каждая из которых неотрицательна в силу (1), получим

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l \right) \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j = 0.$$

- Отсюда следует, что и каждое из слагаемых в первой сумме также равно нулю. Это доказывает (3).
- Условие (4) доказывается аналогично.

Условия дополняющей нежесткости: доказательство

- Сложив m левых частей равенств (3), каждая из которых неотрицательна в силу (1), получим

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l \right) \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j = 0.$$

- Отсюда следует, что и каждое из слагаемых в первой сумме также равно нулю. Это доказывает (3).
- Условие (4) доказывается аналогично.

Содержание

Линейная задача о дополнительности

- Линейная задача о дополнительности обобщает задачи линейного и квадратичного программирования, биматричные игры и еще много других задач.
- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (*ЛЗД*) нужно найти векторы $w, z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

- В силу неотрицательноыти переменных $w_i, z_i \geq 0$, равенство $w^T z = \sum_{i=1}^n w_i z_i = 0$ эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

- которая требует, чтобы
- из каждой *дополняющей пары* переменных (w_i, z_i) хотя бы одна из двух переменных была равна нулю.

Линейная задача о дополнительности

- Линейная задача о дополнительности обобщает задачи линейного и квадратичного программирования, биматричные игры и еще много других задач.
- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (*ЛЗД*) нужно найти векторы $w, z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

- В силу неотрицательныоти переменных $w_i, z_i \geq 0$, равенство $w^T z = \sum_{i=1}^n w_i z_i = 0$ эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

- которая требует, чтобы
- из каждой *дополняющей пары* переменных (w_i, z_i) хотя бы одна из двух переменных была равна нулю.

Линейная задача о дополнительности

- Линейная задача о дополнительности обобщает задачи линейного и квадратичного программирования, биматричные игры и еще много других задач.
- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (*ЛЗД*) нужно найти векторы $w, z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

- В силу неотрицательноыти переменных $w_i, z_i \geq 0$, равенство $w^T z = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i = 0$ эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

- которая требует, чтобы
- из каждой *дополняющей пары* переменных (w_i, z_i) хотя бы одна из двух переменных была равна нулю.

Линейная задача о дополнительности

- Линейная задача о дополнительности обобщает задачи линейного и квадратичного программирования, биматричные игры и еще много других задач.
- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (*ЛЗД*) нужно найти векторы $w, z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q,\\ w^T z &= 0,\\ w, z &\geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

- В силу неотрицательноыти переменных $w_i, z_i \geq 0$, равенство $w^T z = \sum_{i=1}^n w_i z_i = 0$ эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

- которая требует, чтобы
- из каждой *дополняющей пары* переменных (w_i, z_i) хотя бы одна из двух переменных была равна нулю.

Линейная задача о дополнительности

- Линейная задача о дополнительности обобщает задачи линейного и квадратичного программирования, биматричные игры и еще много других задач.
- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (*ЛЗД*) нужно найти векторы $w, z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

- В силу неотрицательноыти переменных $w_i, z_i \geq 0$, равенство $w^T z = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i = 0$ эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

- которая требует, чтобы
- из каждой *дополняющей пары* переменных (w_i, z_i) хотя бы одна из двух переменных была равна нулю.

Линейная задача о дополнительности

- Линейная задача о дополнительности обобщает задачи линейного и квадратичного программирования, биматричные игры и еще много других задач.
- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (*ЛЗД*) нужно найти векторы $w, z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

- В силу неотрицательноыти переменных $w_i, z_i \geq 0$, равенство $w^T z = \sum_{i=1}^n w_i z_i = 0$ эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

- которая требует, чтобы
- из каждой *дополняющей пары* переменных (w_i, z_i) хотя бы одна из двух переменных была равна нулю.

Линейная задача о дополнительности

- Линейная задача о дополнительности обобщает задачи линейного и квадратичного программирования, биматричные игры и еще много других задач.
- Пусть M есть $n \times n$-матрица, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$.
- В *линейной задаче о дополнительности* (*ЛЗД*) нужно найти векторы $w, z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

- В силу неотрицательноыти переменных $w_i, z_i \geq 0$, равенство $w^T z = \sum_{i=1}^n w_i z_i = 0$ эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

- которая требует, чтобы
- из каждой *дополняющей пары* переменных (w_i, z_i) хотя бы одна из двух переменных была равна нулю.

Алгоритм Лемке

- ЛЗД (5) можно решить симплекс-подобным алгоритмом.
- Допустимый базис для (5), в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым*.
- *Алгоритм Лемке* начинает работу с почти дополняюще-допустимого базиса (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением тех, на которых строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
  1. (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
  2. выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке

- ЛЗД (5) можно решить симплекс-подобным алгоритмом.
- Допустимый базис для (5), в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*
- *Алгоритм Лемке* начинает работу с почти дополняюще-допустимого базиса (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением тех, на которых строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
  1. (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
  2. выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке

- ЛЗД (5) можно решить симплекс-подобным алгоритмом.
- Допустимый базис для (5), в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*
- *Алгоритм Лемке* начинает работу с почти дополняюще-допустимого базиса (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением тех, на которых строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
  1. (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
  2. выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке

- ЛЗД (5) можно решить симплекс-подобным алгоритмом.
- Допустимый базис для (5), в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*
- *Алгоритм Лемке* начинает работу с почти дополняюще-допустимого базиса (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением тех, на которых строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
  1. (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
  2. выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке

- ЛЗД (5) можно решить симплекс-подобным алгоритмом.
- Допустимый базис для (5), в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*
- *Алгоритм Лемке* начинает работу с почти дополняюще-допустимого базиса (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением тех, на которых строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
  1. (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
  2. выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке

- ЛЗД (5) можно решить симплекс-подобным алгоритмом.
- Допустимый базис для (5), в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*
- *Алгоритм Лемке* начинает работу с почти дополняюще-допустимого базиса (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением тех, на которых строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
  1. (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
  2. выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Алгоритм Лемке

- ЛЗД (5) можно решить симплекс-подобным алгоритмом.
- Допустимый базис для (5), в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым.*
- *Алгоритм Лемке* начинает работу с почти дополняюще-допустимого базиса (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи)
- и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис.
- На каждой итерации, за исключением тех, на которых строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:
  1. (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;
  2. выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Рассмотрим биматричную игру с матрицей A выигрышей первого игрока и матрицей B выигрышей второго игрока. Обе матрицы размера $m \times n$.
- Пара смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_m$ образует ситуацию равновесия Нэша тогда и только тогда, когда выполняются неравенства (1),
- которые в векторной форме записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_i^T A q &\le p^T A q, \quad i = 1, \ldots, m, \\ p^T B \mathrm{e}_j &\le p^T B q, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

- Запишем эти неравенства в матричной форме:

$$\begin{aligned} Aq &\le (p^T A q)\mathbf{1}_m\,, \\ B^T p &\le (p^T B q)\mathbf{1}_n, \end{aligned}$$

где $\mathbf{1}_k$ — это вектор размера k, все компоненты которого равны 1.

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Рассмотрим биматричную игру с матрицей A выигрышей первого игрока и матрицей B выигрышей второго игрока. Обе матрицы размера $m \times n$.
- Пара смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_m$ образует ситуацию равновесия Нэша тогда и только тогда, когда выполняются неравенства (1),
- которые в векторной форме записываются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}_i^T A q \le p^T A q, \quad & i = 1, \dots, m, \\
p^T B \mathrm{e}_j \le p^T B q, \quad & j = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

- Запишем эти неравенства в матричной форме:

$$
\begin{aligned}
Aq &\le (p^T A q) \mathbf{1}_m \,, \\
B^T p &\le (p^T B q) \mathbf{1}_n,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{1}_k$ — это вектор размера k, все компоненты которого равны 1.

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Рассмотрим биматричную игру с матрицей A выигрышей первого игрока и матрицей B выигрышей второго игрока. Обе матрицы размера $m \times n$.
- Пара смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_m$ образует ситуацию равновесия Нэша тогда и только тогда, когда выполняются неравенства (1),
- которые в векторной форме записываются следующим образом:

$$e_i^T A q \leq p^T A q, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$p^T B e_j \leq p^T B q, \quad j = 1, \dots, n.$$

- Запишем эти неравенства в матричной форме:

$$Aq \leq (p^T A q) \mathbf{1}_m \,,$$
$$B^T p \leq (p^T B q) \mathbf{1}_n,$$

где $\mathbf{1}_k$ — это вектор размера k, все компоненты которого равны 1.

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Рассмотрим биматричную игру с матрицей A выигрышей первого игрока и матрицей B выигрышей второго игрока. Обе матрицы размера $m \times n$.
- Пара смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_m$ образует ситуацию равновесия Нэша тогда и только тогда, когда выполняются неравенства (1),
- которые в векторной форме записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} e_i^T A q \le p^T A q, \quad i = 1, \dots, m, \\ p^T B e_j \le p^T B q, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

- Запишем эти неравенства в матричной форме:

$$\begin{aligned} Aq \le (p^T A q)\mathbf{1}_m \,, \\ B^T p \le (p^T B q)\mathbf{1}_n, \end{aligned}$$

где $\mathbf{1}_k$ — это вектор размера k, все компоненты которого равны 1.

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Запишем эти неравенства в матричной форме:
$$Aq \leq (p^T A q)\mathbf{1}_m\,,$$
$$B^T p \leq (p^T B q)\mathbf{1}_n,$$
где $\mathbf{1}_k$ — это вектор размера k, все компоненты которого равны 1.
- Вводя переменные недостатка $s \in \mathbb{R}^m_+$ и $t \in \mathbb{R}^n_+$, перепишем последнюю систему неравенств как систему уравнений
$$\begin{aligned} Aq + s &= (p^T A q)\mathbf{1}_m\,, \\ B^T p + t &= (p^T B q)\mathbf{1}_n. \end{aligned} \qquad (6)$$
- Заметим, что в терминах переменных недостатка условия дополняющей нежесткости (3) и (4), записываются как равенства $p^T s = 0$ и $q^T t = 0$.

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Запишем эти неравенства в матричной форме:

$$Aq \le (p^T Aq)\mathbf{1}_m\,,$$
$$B^T p \le (p^T Bq)\mathbf{1}_n,$$

где $\mathbf{1}_k$ — это вектор размера k, все компоненты которого равны 1.

- Вводя переменные недостатка $s \in \mathbb{R}^m_+$ и $t \in \mathbb{R}^n_+$, перепишем последнюю систему неравенств как систему уравнений

$$\begin{aligned} Aq + s &= (p^T Aq)\mathbf{1}_m\,,\\ B^T p + t &= (p^T Bq)\mathbf{1}_n. \end{aligned} \tag{6}$$

- Заметим, что в терминах переменных недостатка условия дополняющей нежесткости ▸ (3) и (4), записываются как равенства $p^T s = 0$ и $q^T t = 0$.

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Вводя переменные недостатка $s \in \mathbb{R}^m_+$ и $t \in \mathbb{R}^n_+$, перепишем последнюю систему неравенств как систему уравнений
$$\begin{aligned} Aq + s &= (p^T Aq)\mathbf{1}_m \,, \\ B^T p + t &= (p^T Bq)\mathbf{1}_n. \end{aligned} \tag{6}$$
- Заметим, что в терминах переменных недостатка условия дополняющей нежесткости (3) и (4), записываются как равенства $p^T s = 0$ и $q^T t = 0$.
- Предположив, что матрицы A и B отрицательны (все $a_{ij} < 0$ и $b_{ij} < 0$), разделим равенства (6) соотв. на положительные числа $-p^T Aq$ и $-p^T Bq$:
$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{-p^T Aq} q\right) + \frac{s}{-p^T Aq} &= -\mathbf{1}_m, \\ B^T\left(\frac{1}{-p^T Bq} p\right) + \frac{t}{-p^T Bq} &= -\mathbf{1}_n. \end{aligned}$$

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Вводя переменные недостатка $s \in \mathbb{R}^m_+$ и $t \in \mathbb{R}^n_+$, перепишем последнюю систему неравенств как систему уравнений
$$\begin{aligned} Aq + s &= (p^T Aq)\mathbf{1}_m\,, \\ B^T p + t &= (p^T Bq)\mathbf{1}_n. \end{aligned} \tag{6}$$
- Заметим, что в терминах переменных недостатка условия дополняющей нежесткости (3) и (4), записываются как равенства $p^T s = 0$ и $q^T t = 0$.
- Предположив, что матрицы A и B отрицательны (все $a_{ij} < 0$ и $b_{ij} < 0$), разделим равенства (6) соотв. на положительные числа $-p^T Aq$ и $-p^T Bq$:
$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{-p^T Aq}\, q\right) + \frac{s}{-p^T Aq} &= -\mathbf{1}_m, \\ B^T\left(\frac{1}{-p^T Bq}\, p\right) + \frac{t}{-p^T Bq} &= -\mathbf{1}_n. \end{aligned}$$

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Вводя переменные недостатка $s \in \mathbb{R}^m_+$ и $t \in \mathbb{R}^n_+$, перепишем последнюю систему неравенств как систему уравнений
$$\begin{aligned} Aq + s &= (p^T Aq)\mathbf{1}_m\,, \\ B^T p + t &= (p^T Bq)\mathbf{1}_n. \end{aligned} \tag{6}$$
- Заметим, что в терминах переменных недостатка условия дополняющей нежесткости (3) и (4), записываются как равенства $p^T s = 0$ и $q^T t = 0$.
- Предположив, что матрицы A и B отрицательны (все $a_{ij} < 0$ и $b_{ij} < 0$), разделим равенства (6) соотв. на положительные числа $-p^T Aq$ и $-p^T Bq$:
$$A\left(\frac{1}{-p^T Aq}\,q\right) + \frac{s}{-p^T Aq} = -\mathbf{1}_m,$$
$$B^T\left(\frac{1}{-p^T Bq}\,p\right) + \frac{t}{-p^T Bq} = -\mathbf{1}_n.$$

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Предположив, что матрицы A и B отрицательны (все $a_{ij} < 0$ и $b_{ij} < 0$), разделим равенства (6) соотв. на положительные числа $-p^T Aq$ и $-p^T Bq$:

$$A\left(\frac{1}{-p^T Aq}q\right) + \frac{s}{-p^T Aq} = -\mathbf{1}_m,$$
$$B^T\left(\frac{1}{-p^T Bq}p\right) + \frac{t}{-p^T Bq} = -\mathbf{1}_n.$$

- Вводя новые переменные

$$x = \frac{p}{-p^T Bq}, \quad y = \frac{q}{-p^T Aq}, \quad u = \frac{s}{-p^T Aq}, \quad v = \frac{t}{-p^T Bq},$$

- перепишем последние равенства в следующем виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_m \\ -\mathbf{1}_n \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Предположив, что матрицы A и B отрицательны (все $a_{ij} < 0$ и $b_{ij} < 0$), разделим равенства (6) соотв. на положительные числа $-p^T Aq$ и $-p^T Bq$:

$$A\left(\frac{1}{-p^T Aq}q\right) + \frac{s}{-p^T Aq} = -\mathbf{1}_m,$$
$$B^T\left(\frac{1}{-p^T Bq}p\right) + \frac{t}{-p^T Bq} = -\mathbf{1}_n.$$

- Вводя новые переменные

$$x = \frac{p}{-p^T Bq}, \quad y = \frac{q}{-p^T Aq}, \quad u = \frac{s}{-p^T Aq}, \quad v = \frac{t}{-p^T Bq},$$

- перепишем последние равенства в следующем виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_m \\ -\mathbf{1}_n \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Вводя новые переменные
$$x = \frac{p}{-p^T Bq}, \quad y = \frac{q}{-p^T Aq}, \quad u = \frac{s}{-p^T Aq}, \quad v = \frac{t}{-p^T Bq},$$
- перепишем последние равенства в следующем виде
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_m \\ -\mathbf{1}_n \end{pmatrix}. \qquad (7)$$
- Условия дополняющей нежесткости $p^T s = 0$ и $q^T t = 0$ в переменных x, y, u, v переписываются след. образом:
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \qquad (8)$$
- Задача поиска неотрицательного решения u, v, x, y системы (7) и (8) является ЛЗД, которую можно решить алгоритмом Лемке.

Сведение биматричной игры к ЛЗД

- Вводя новые переменные

$$x = \frac{p}{-p^T Bq}, \quad y = \frac{q}{-p^T Aq}, \quad u = \frac{s}{-p^T Aq}, \quad v = \frac{t}{-p^T Bq},$$

- перепишем последние равенства в следующем виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_m \\ -\mathbf{1}_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

- Условия дополняющей нежесткости $p^T s = 0$ и $q^T t = 0$ в переменных x, y, u, v переписываются след. образом:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \tag{8}$$

- Задача поиска неотрицательного решения u, v, x, y системы (7) и (8) является ЛЗД, которую можно решить алгоритмом Лемке.

Начальная симплекс-таблица

Записывая систему

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_m \\ -\mathbf{1}_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

в табличном виде, получим следующую симплекс-таблицу:

Базис	q	u	v	x	y	Отношения
u v	$-\mathbf{1}_m$ $-\mathbf{1}_n$	I_m $\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$ I_n	$\mathbf{0}$ B^T	A $\mathbf{0}$	

.

◂ К примеру

Начальная симплекс-таблица

Записывая систему

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_m \\ -\mathbf{1}_n \end{pmatrix} \qquad (7)$$

в табличном виде, получим следующую симплекс-таблицу:

Базис	q	u	v	x	y	Отношения
u v	$-\mathbf{1}_m$ $-\mathbf{1}_n$	I_m $\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$ I_n	$\mathbf{0}$ B^T	A $\mathbf{0}$	

.

◂ К примеру

Содержание

Пример

Нужно решить биматричную игру со следующими исходными данными:

$$\begin{bmatrix} -1,1 & 0,-1 & 0,2 \\ 0,0 & -2,1 & 1,-1 \end{bmatrix}.$$

- В данной игре нет равновесий в чистых стратегиях.
- Будем искать равновесие в смешанных стратегиях алгоритмом Лемке.
- Отняв 2 от всех выигрышей игрока 1 и 3 от всех выигрышей игрока 2, получим эквивалентную игру со следующими матрицами выигрышей игроков:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Пример

Нужно решить биматричную игру со следующими исходными данными:

$$\begin{bmatrix} -1,1 & 0^*,-1 & 0,2^* \\ 0^*,0 & -2,1^* & 1^*,-1 \end{bmatrix}.$$

- В данной игре нет равновесий в чистых стратегиях.
- Будем искать равновесие в смешанных стратегиях алгоритмом Лемке.
- Отняв 2 от всех выигрышей игрока 1 и 3 от всех выигрышей игрока 2, получим эквивалентную игру со следующими матрицами выигрышей игроков:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Пример

Нужно решить биматричную игру со следующими исходными данными:

$$\begin{bmatrix} -1,1 & 0^*,-1 & 0,2^* \\ 0^*,0 & -2,1^* & 1^*,-1 \end{bmatrix}.$$

- В данной игре нет равновесий в чистых стратегиях.
- Будем искать равновесие в смешанных стратегиях алгоритмом Лемке.
- Отняв 2 от всех выигрышей игрока 1 и 3 от всех выигрышей игрока 2, получим эквивалентную игру со следующими матрицами выигрышей игроков:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Пример

Нужно решить биматричную игру со следующими исходными данными:

$$\begin{bmatrix} -1,1 & 0^*,-1 & 0,2^* \\ 0^*,0 & -2,1^* & 1^*,-1 \end{bmatrix}.$$

- В данной игре нет равновесий в чистых стратегиях.
- Будем искать равновесие в смешанных стратегиях алгоритмом Лемке.
- Отняв 2 от всех выигрышей игрока 1 и 3 от всех выигрышей игрока 2, получим эквивалентную игру со следующими матрицами выигрышей игроков:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Пример: начальная симплекс-таблица

Для исходных данных

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

начальная сиплекс-таблица следующая.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	
v_1	-1	0	0	1	0	0	-2	-3	0	0	0	
v_2	-1	0	0	0	1	0	-4	-2	0	0	0	
v_3	-1	0	0	0	0	1	-1	-4	0	0	0	

▸ Показать вид таблицы

Пример: начальная симплекс-таблица

Для исходных данных

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

начальная сиплекс-таблица следующая.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	
v_1	-1	0	0	1	0	0	-2	-3	0	0	0	
v_2	-1	0	0	0	1	0	-4	-2	0	0	0	
v_3	-1	0	0	0	0	1	-1	-4	0	0	0	

▸ Показать вид таблицы

Построение почти дополняюще-допуст. базиса: шаг 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	
v_1	-1	0	0	1	0	0	-2	-3	0	0	0	
v_2	-1	0	0	0	1	0	-4	-2	0	0	0	
v_3	-1	0	0	0	0	1	-1	-4	0	0	0	

- Вводим в базис переменную x_1.
- Вычисляем отношения.
- Максимальное отношение в строке v_3, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Построение почти дополняюще-допуст. базиса: шаг 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	
v_1	-1	0	0	1	0	0	-2	-3	0	0	0	
v_2	-1	0	0	0	1	0	-4	-2	0	0	0	
v_3	-1	0	0	0	0	1	-1	-4	0	0	0	

- Вводим в базис переменную x_1.
- Вычисляем отношения.
- Максимальное отношение в строке v_3, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Построение почти дополняюще-допуст. базиса: шаг 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	
v_1	-1	0	0	1	0	0	-2	-3	0	0	0	$\frac{1}{2}$
v_2	-1	0	0	0	1	0	-4	-2	0	0	0	$\frac{1}{4}$
v_3	-1	0	0	0	0	1	-1	-4	0	0	0	1

- Вводим в базис переменную x_1.
- Вычисляем отношения.
- Максимальное отношение в строке v_3, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Построение почти дополняюще-допуст. базиса: шаг 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	
v_1	-1	0	0	1	0	0	-2	-3	0	0	0	$\frac{1}{2}$
v_2	-1	0	0	0	1	0	-4	-2	0	0	0	$\frac{1}{4}$
v_3	-1	0	0	0	0	1	-1	-4	0	0	0	1

- Вводим в базис переменную x_1.
- Вычисляем отношения.
- Максимальное отношение в строке v_3, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Построение почти дополняюще-допуст. базиса: шаг 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	
v_1	-1	0	0	1	0	0	-2	-3	0	0	0	$\frac{1}{2}$
v_2	-1	0	0	0	1	0	-4	-2	0	0	0	$\frac{1}{4}$
v_3	-1	0	0	0	0	1	-1	-4	0	0	0	1

- Вводим в базис переменную x_1.
- Вычисляем отношения.
- Максимальное отношение в строке v_3, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Построение почти дополняюще-допуст. базиса: шаг 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	
v_1	1	0	0	1	0	-2	0	5	0	0	0	
v_2	3	0	0	0	1	-4	0	14	0	0	0	
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	4	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_3 (дополнение v_3).
- Вычисляем отношения.
- Максимальное отношение в строке u_2, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Построение почти дополняюще-допуст. базиса: шаг 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	
v_1	1	0	0	1	0	-2	0	5	0	0	0	
v_2	3	0	0	0	1	-4	0	14	0	0	0	
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	4	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_3 (дополнение v_3).
- Вычисляем отношения.
- Максимальное отношение в строке u_2, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Построение почти дополняюще-допуст. базиса: шаг 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	$\frac{1}{2}$
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	1
v_1	1	0	0	1	0	-2	0	5	0	0	0	
v_2	3	0	0	0	1	-4	0	14	0	0	0	
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	4	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_3 (дополнение v_3).
- Вычисляем отношения.
- Максимальное отношение в строке u_2, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Построение почти дополняюще-допуст. базиса: шаг 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	$\frac{1}{2}$
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	1
v_1	1	0	0	1	0	-2	0	5	0	0	0	
v_2	3	0	0	0	1	-4	0	14	0	0	0	
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	4	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_3 (дополнение v_3).
- Вычисляем отношения.
- Максимальное отношение в строке u_2, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Построение почти дополняюще-допуст. базиса: шаг 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-3	-2	-2	$\frac{1}{2}$
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	-1	1
v_1	1	0	0	1	0	-2	0	5	0	0	0	
v_2	3	0	0	0	1	-4	0	14	0	0	0	
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	4	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_3 (дополнение v_3).
- Вычисляем отношения.
- Максимальное отношение в строке u_2, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	1	6	0	
y_3	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	4	1	
v_1	1	0	0	1	0	-2	0	5	0	0	0	
v_2	3	0	0	0	1	-4	0	14	0	0	0	
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	4	0	0	0	

- Вводим в базис переменную x_2 (дополнение u_2).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке v_1, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	1	6	0	
y_3	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	4	1	
v_1	1	0	0	1	0	-2	0	5	0	0	0	
v_2	3	0	0	0	1	-4	0	14	0	0	0	
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	4	0	0	0	

- Вводим в базис переменную x_2 (дополнение u_2).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке v_1, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	1	6	0	
y_3	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	4	1	
v_1	1	0	0	1	0	-2	0	5	0	0	0	$\frac{1}{5}$
v_2	3	0	0	0	1	-4	0	14	0	0	0	$\frac{3}{14}$
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	4	0	0	0	$\frac{1}{4}$

- Вводим в базис переменную x_2 (дополнение u_2).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке v_1, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	1	6	0	
y_3	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	4	1	
v_1	1	0	0	1	0	-2	0	5	0	0	0	$\frac{1}{5}$
v_2	3	0	0	0	1	-4	0	14	0	0	0	$\frac{3}{14}$
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	4	0	0	0	$\frac{1}{4}$

- Вводим в базис переменную x_2 (дополнение u_2).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке v_1, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 1

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	1	6	0	
y_3	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	4	1	
v_1	1	0	0	1	0	-2	0	5	0	0	0	$\frac{1}{5}$
v_2	3	0	0	0	1	-4	0	14	0	0	0	$\frac{3}{14}$
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	4	0	0	0	$\frac{1}{4}$

- Вводим в базис переменную x_2 (дополнение u_2).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке v_1, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	1	6	0	
y_3	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	4	1	
x_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	
v_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_1 (дополнение v_1).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке y_3, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	1	6	0	
y_3	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	4	1	
x_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	
v_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_1 (дополнение v_1).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке y_3, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	1	6	0	1
y_3	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	4	1	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	
v_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_1 (дополнение v_1).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке y_3, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	1	6	0	1
y_3	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	4	1	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	
v_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_1 (дополнение v_1).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке y_3, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 2

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	1	6	0	1
y_3	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	4	1	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	
v_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_1 (дополнение v_1).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке y_3, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	4	$-\frac{1}{2}$	
y_1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	
x_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	
v_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную v_3 (дополнение y_3).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке v_2, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	4	$-\frac{1}{2}$	
y_1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	
x_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	
v_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную v_3 (дополнение y_3).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке v_2, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	4	$-\frac{1}{2}$	
y_1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	
x_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	∞
v_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$

- Вводим в базис переменную v_3 (дополнение y_3).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке v_2, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	4	$-\frac{1}{2}$	
y_1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	
x_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	∞
v_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$

- Вводим в базис переменную v_3 (дополнение y_3).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке v_2, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 3

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	4	$-\frac{1}{2}$	
y_1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	
x_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	∞
v_2	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$

- Вводим в базис переменную v_3 (дополнение y_3).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке v_2, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 4

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	4	$-\frac{1}{2}$	
y_1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_2 (дополнение v_2).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке u_1, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 4

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	4	$-\frac{1}{2}$	
y_1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_2 (дополнение v_2).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке u_1, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 4

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
y_1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_2 (дополнение v_2).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке u_1, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 4

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
y_1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_2 (дополнение v_2).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке u_1, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 4

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
y_1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Вводим в базис переменную y_2 (дополнение v_2).
- Вычисляем отношения.
- Минимальное отношение в строке u_1, которую объявляем ведущей.
- Выполняем операцию замещения.

Итерация 5

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
y_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	
y_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{3}{4}$	
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Нужно вводить в базис переменную x_1 (дополнение u_1), но x_1 уже в базисе.
- Построен дополняюще-допустимый базис.
- Решение ЛЗД: $x^0 = (1/8, 1/4)^T$, $y^0 = (1/4, 1/8, 0)^T$.
- Равновесные смешанные стратегии:
  $p^0 = x^0/(1/8 + 1/4) = (1/3, 2/3)^T$,
  $q^0 = y^0/(1/4 + 1/8 + 0) = (2/3, 1/3, 0)^T$.

Итерация 5

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
y_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	
y_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{3}{4}$	
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Нужно вводить в базис переменную x_1 (дополнение u_1), но x_1 уже в базисе.
- Построен дополняюще-допустимый базис.
- Решение ЛЗД: $x^0 = (1/8, 1/4)^T$, $y^0 = (1/4, 1/8, 0)^T$.
- Равновесные смешанные стратегии:
  $p^0 = x^0/(1/8 + 1/4) = (1/3, 2/3)^T$,
  $q^0 = y^0/(1/4 + 1/8 + 0) = (2/3, 1/3, 0)^T$.

Итерация 5

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
y_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	
y_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{3}{4}$	
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Нужно вводить в базис переменную x_1 (дополнение u_1), но x_1 уже в базисе.
- Построен дополняюще-допустимый базис.
- Решение ЛЗД: $x^0 = (1/8, 1/4)^T$, $y^0 = (1/4, 1/8, 0)^T$.
- Равновесные смешанные стратегии:
  $p^0 = x^0/(1/8 + 1/4) = (1/3, 2/3)^T$,
  $q^0 = y^0/(1/4 + 1/8 + 0) = (2/3, 1/3, 0)^T$.

Итерация 5

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
y_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	
y_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{3}{4}$	
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Нужно вводить в базис переменную x_1 (дополнение u_1), но x_1 уже в базисе.
- Построен дополняюще-допустимый базис.
- Решение ЛЗД: $x^0 = (1/8, 1/4)^T$, $y^0 = (1/4, 1/8, 0)^T$.
- Равновесные смешанные стратегии:
  $p^0 = x^0/(1/8 + 1/4) = (1/3, 2/3)^T$,
  $q^0 = y^0/(1/4 + 1/8 + 0) = (2/3, 1/3, 0)^T$.

Итерация 5

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
y_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	
y_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{3}{4}$	
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Нужно вводить в базис переменную x_1 (дополнение u_1), но x_1 уже в базисе.
- Построен дополняюще-допустимый базис.
- Решение ЛЗД: $x^0 = (1/8, 1/4)^T$, $y^0 = (1/4, 1/8, 0)^T$.
- Равновесные смешанные стратегии:
  $p^0 = x^0/(1/8 + 1/4) = (1/3, 2/3)^T$,
  $q^0 = y^0/(1/4 + 1/8 + 0) = (2/3, 1/3, 0)^T$.

Итерация 5

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
y_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	
y_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{3}{4}$	
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Нужно вводить в базис переменную x_1 (дополнение u_1), но x_1 уже в базисе.
- Построен дополняюще-допустимый базис.
- Решение ЛЗД: $x^0 = (1/8, 1/4)^T$, $y^0 = (1/4, 1/8, 0)^T$.
- Равновесные смешанные стратегии: $p^0 = x^0/(1/8 + 1/4) = (1/3, 2/3)^T$, $q^0 = y^0/(1/4 + 1/8 + 0) = (2/3, 1/3, 0)^T$.

Итерация 5

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
y_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	
y_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{3}{4}$	
x_2	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	1	0	0	0	0	0	
x_1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0	0	0	0	

- Нужно вводить в базис переменную x_1 (дополнение u_1), но x_1 уже в базисе.
- Построен дополняюще-допустимый базис.
- Решение ЛЗД: $x^0 = (1/8, 1/4)^T$, $y^0 = (1/4, 1/8, 0)^T$.
- Равновесные смешанные стратегии: $p^0 = x^0/(1/8 + 1/4) = (1/3, 2/3)^T$, $q^0 = y^0/(1/4 + 1/8 + 0) = (2/3, 1/3, 0)^T$.