Кооперативные игры

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2014

Содержание

Условия неантагонистического конфликта

- Участвует n лиц (игроков).
- Допускается заключение взаимообязывающих соглашений между игроками.
- Выигрыши игроков измеряются в одной общей единице.
- Имеется механизм перераспределения выигрышей между игроками.
- Поэтому достаточно рассмотреть только выигрыши игроков, которые образуют коалиции.

Условия неантагонистического конфликта

- Участвует n лиц (игроков).
- Допускается заключение взаимообязывающих соглашений между игроками.
- Выигрыши игроков измеряются в одной общей единице.
- Имеется механизм перераспределения выигрышей между игроками.
- Поэтому достаточно рассмотреть только выигрыши игроков, которые образуют коалиции.

Условия неантагонистического конфликта

- Участвует n лиц (игроков).
- Допускается заключение взаимообязывающих соглашений между игроками.
- Выигрыши игроков измеряются в одной общей единице.
- Имеется механизм перераспределения выигрышей между игроками.
- Поэтому достаточно рассмотреть только выигрыши игроков, которые образуют коалиции.

Условия неантагонистического конфликта

- Участвует n лиц (игроков).
- Допускается заключение взаимообязывающих соглашений между игроками.
- Выигрыши игроков измеряются в одной общей единице.
- Имеется механизм перераспределения выигрышей между игроками.
- Поэтому достаточно рассмотреть только выигрыши игроков, которые образуют коалиции.

Условия неантагонистического конфликта

- Участвует n лиц (игроков).
- Допускается заключение взаимообязывающих соглашений между игроками.
- Выигрыши игроков измеряются в одной общей единице.
- Имеется механизм перераспределения выигрышей между игроками.
- Поэтому достаточно рассмотреть только выигрыши игроков, которые образуют коалиции.

Сила коалиции

- Сила *коалиции* $S \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом.
- Игроки коалиции S рассматриваются как объединенный игрок 1, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выигрышей всех игроков из S.
- В худшем случае для этого коллективного игрока 1 остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2, интересы которого диаметрально противоположны интересам игрока 1.
- В результате коалиция S (как игрок 1) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры.
- Будем считать, что значение $v(S)$ существует для каждой коалиции $S \subseteq N$, а $v(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Сила коалиции

- Сила *коалиции* $S \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом.
- Игроки коалиции S рассматриваются как объединенный игрок 1, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выйгрышей всех игроков из S.
- В худшем случае для этого коллективного игрока 1 остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2, интересы которого диаметрально противоположны интересам игрока 1.
- В результате коалиция S (как игрок 1) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры.
- Будем считать, что значение $v(S)$ существует для каждой коалиции $S \subseteq N$, а $v(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Сила коалиции

- Сила *коалиции* $S \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом.
- Игроки коалиции S рассматриваются как объединенный игрок 1, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выигрышей всех игроков из S.
- В худшем случае для этого коллективного игрока 1 остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2, интересы которого диаметрально противоположны интересам игрока 1.
- В результате коалиция S (как игрок 1) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры.
- Будем считать, что значение $v(S)$ существует для каждой коалиции $S \subseteq N$, а $v(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Сила коалиции

- Сила *коалиции* $S \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом.
- Игроки коалиции S рассматриваются как объединенный игрок 1, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выйгрышей всех игроков из S.
- В худшем случае для этого коллективного игрока 1 остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2, интересы которого диаметрально противоположны интересам игрока 1.
- В результате коалиция S (как игрок 1) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры.
- Будем считать, что значение $v(S)$ существует для каждой коалиции $S \subseteq N$, а $v(\emptyset) \overset{\text{def}}{=} 0$.

Сила коалиции

- Сила *коалиции* $S \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом.
- Игроки коалиции S рассматриваются как объединенный игрок 1, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выйгрышей всех игроков из S.
- В худшем случае для этого коллективного игрока 1 остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2, интересы которого диаметрально противоположны интересам игрока 1.
- В результате коалиция S (как игрок 1) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры.
- Будем считать, что значение $v(S)$ существует для каждой коалиции $S \subseteq N$, а $v(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Сила коалиции

- Сила *коалиции* $S \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом.
- Игроки коалиции S рассматриваются как объединенный игрок 1, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выйгрышей всех игроков из S.
- В худшем случае для этого коллективного игрока 1 остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2, интересы которого диаметрально противоположны интересам игрока 1.
- В результате коалиция S (как игрок 1) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры.
- Будем считать, что значение $v(S)$ существует для каждой коалиции $S \subseteq N$, а $v(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Сила коалиции

- Сила *коалиции* $S \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом.
- Игроки коалиции S рассматриваются как объединенный игрок 1, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выйгрышей всех игроков из S.
- В худшем случае для этого коллективного игрока 1 остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2, интересы которого диаметрально противоположны интересам игрока 1.
- В результате коалиция S (как игрок 1) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры.
- Будем считать, что значение $v(S)$ существует для каждой коалиции $S \subseteq N$, а $v(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Сила коалиции

- Сила *коалиции* $S \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом.
- Игроки коалиции S рассматриваются как объединенный игрок 1, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выйгрышей всех игроков из S.
- В худшем случае для этого коллективного игрока 1 остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2, интересы которого диаметрально противоположны интересам игрока 1.
- В результате коалиция S (как игрок 1) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры.
- Будем считать, что значение $v(S)$ существует для каждой коалиции $S \subseteq N$, а $v(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Сила коалиции

- Сила *коалиции* $S \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом.
- Игроки коалиции S рассматриваются как объединенный игрок 1, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выйгрышей всех игроков из S.
- В худшем случае для этого коллективного игрока 1 остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2, интересы которого диаметрально противоположны интересам игрока 1.
- В результате коалиция S (как игрок 1) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры.
- Будем считать, что значение $v(S)$ существует для каждой коалиции $S \subseteq N$, а $v(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Определить выигрыши всех коалиций в игры трех лиц, если каждый из игроков имеет по две стратегии, а платежи определяются по правилу:

Если игрок 1 выбирает стратегию 1

Игрок 3:

		1	2
Игрок 2:	1	3, 0, 1	4, 2, 3
	2	0, 2, 5	3, 3, 1

Если игрок 1 выбирает стратегию 2

Игрок 3:

		1	2
Игрок 2:	1	4, 2, 1	1, 3, 4
	2	2, 3, 0	4, 2, 1

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Определить выигрыши всех коалиций в игры трех лиц, если каждый из игроков имеет по две стратегии, а платежи определяются по правилу:

Если игрок 1 выбирает стратегию 1

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$3,0,1$	$4,2,3$
	2	$0,2,5$	$3,3,1$

Если игрок 1 выбирает стратегию 2

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$4,2,1$	$1,3,4$
	2	$2,3,0$	$4,2,1$

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Определить выигрыши всех коалиций в игры трех лиц, если каждый из игроков имеет по две стратегии, а платежи определяются по правилу:

Если игрок 1 выбирает стратегию 1

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$3, 0, 1$	$4, 2, 3$
	2	$0, 2, 5$	$3, 3, 1$

Если игрок 1 выбирает стратегию 2

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$4, 2, 1$	$1, 3, 4$
	2	$2, 3, 0$	$4, 2, 1$

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Игрок 1 выбирает страт. 1

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$3, 0, 1$	$4, 2, 3$
	2	$0, 2, 5$	$3, 3, 1$

Игрок 1 выбирает страт. 2

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$4, 2, 1$	$1, 3, 4$
	2	$2, 3, 0$	$4, 2, 1$

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Игрок 1 выбирает страт. 1

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$3, 0, 1$	$4, 2, 3$
	2	$0, 2, 5$	$3, 3, 1$

Игрок 1 выбирает страт. 2

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$4, 2, 1$	$1, 3, 4$
	2	$2, 3, 0$	$4, 2, 1$

$v(\emptyset) = 0$,

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Игрок 1 выбирает страт. 1

Игрок 3:

Игрок 2:	1	2
1	$3, 0, 1$	$4, 2, 3$
2	$0, 2, 5$	$3, 3, 1$

Игрок 1 выбирает страт. 2

Игрок 3:

Игрок 2:	1	2
1	$4, 2, 1$	$1, 3, 4$
2	$2, 3, 0$	$4, 2, 1$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1, 2, 3) = 9$ есть макс. суммарный выигрыш 3-х игроков, который достигается в ситуации $(1, 1, 2)$

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Игрок 1 выбирает страт. 1

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$3, 0, 1$	$4, 2, 3$
	2	$0, 2, 5$	$3, 3, 1$

Игрок 1 выбирает страт. 2

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$4, 2, 1$	$1, 3, 4$
	2	$2, 3, 0$	$4, 2, 1$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1, 2, 3) = 9$,

$v(1)=8/5$

есть цена матричной игры

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
1	3	4	0	3
2	4	1	2	4

,

в которой игрок 1 играет против коалиции $\{2, 3\}$.

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Игрок 1 выбирает страт. 1

Игрок 3:

Игрок 2:	1	2
1	$3,0,1$	$4,2,3$
2	$0,2,5$	$3,3,1$

Игрок 1 выбирает страт. 2

Игрок 3:

Игрок 2:	1	2
1	$4,2,1$	$1,3,4$
2	$2,3,0$	$4,2,1$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1,2,3) = 9$,

$v(1)=8/5$, $v(2)=2$

есть цена матричной игры

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
1	0	2	2	3
2	2	3	3	2

,

в которой игрок 2 играет против коалиции $\{1,3\}$.

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Игрок 1 выбирает страт. 1

Игрок 3:

Игрок 2:	1	2
1	3, 0, 1	4, 2, 3
2	0, 2, 5	3, 3, 1

Игрок 1 выбирает страт. 2

Игрок 3:

Игрок 2:	1	2
1	4, 2, 1	1, 3, 4
2	2, 3, 0	4, 2, 1

$v(\emptyset) = 0$, $v(1,2,3) = 9$,
$v(1)=8/5$, $v(2)=2$, $v(3)=1$
есть цена матричной игры

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
1	1	5	1	0
2	3	1	4	1

,

в которой игрок 3 играет против коалиции $\{1,2\}$.

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Игрок 1 выбирает страт. 1

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	3, 0, 1	4, 2, 3
	2	0, 2, 5	3, 3, 1

Игрок 1 выбирает страт. 2

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	4, 2, 1	1, 3, 4
	2	2, 3, 0	4, 2, 1

$v(\emptyset) = 0$, $v(1,2,3) = 9$,

$v(1){=}8/5$, $v(2){=}2$, $v(3){=}1$,

$v(1,2) = 16/3$

есть цена матричной игры

	1	2
(1,1)	3	6
(1,2)	2	6
(2,1)	6	4
(2,2)	5	6

,

в которой коалиция $\{1,2\}$ играет против игрока 3.

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Игрок 1 выбирает страт. 1

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$3,0,1$	$4,2,3$
	2	$0,2,5$	$3,3,1$

Игрок 1 выбирает страт. 2

Игрок 3:

Игрок 2:		1	2
	1	$4,2,1$	$1,3,4$
	2	$2,3,0$	$4,2,1$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1,2,3) = 9$,
$v(1)=8/5$, $v(2)=2$, $v(3)=1$,
$v(1,2) = 16/3$,
$v(1,3) = 5$
есть цена матричной игры

	1	2
(1,1)	4	5
(1,2)	7	4
(2,1)	5	2
(2,2)	5	5

,

в которой коалиция $\{1,3\}$ играет против игрока 2.

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Игрок 1 выбирает страт. 1

Игрок 3:

Игрок 2:	1	2
1	$3,0,1$	$4,2,3$
2	$0,2,5$	$3,3,1$

Игрок 1 выбирает страт. 2

Игрок 3:

Игрок 2:	1	2
1	$4,2,1$	$1,3,4$
2	$2,3,0$	$4,2,1$

$v(\emptyset) = 0,\ v(1,2,3) = 9,$

$v(1)=8/5,\ \ v(2)=2,\ \ v(3)=1,$

$v(1,2) = 16/3,$

$v(1,3) = 5,$

$v(2,3) = 19/3$

есть цена матричной игры

	1	2
(1,1)	1	3
(1,2)	5	7
(2,1)	7	3
(2,2)	4	3

,

в которой коалиция $\{2,3\}$ играет против игрока 1.

Пример 1 вычисления выигрышей коалиций

Игрок 1 выбирает страт. 1

Игрок 3:

		1	2
Игрок 2:	1	3, 0, 1	4, 2, 3
	2	0, 2, 5	3, 3, 1

Игрок 1 выбирает страт. 2

Игрок 3:

		1	2
Игрок 2:	1	4, 2, 1	1, 3, 4
	2	2, 3, 0	4, 2, 1

$v(\emptyset) = 0$, $v(1,2,3) = 9$,
$v(1){=}8/5$, $v(2){=}2$, $v(3){=}1$,
$v(1,2) = 16/3$,
$v(1,3) = 5$,
$v(2,3) = 19/3$.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит \$1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.
- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$.
- Коалиции $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1,3) = 1800$ и $v(2,3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1,2,3){=}2000$.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит \$1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.

- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$.
- Коалиции $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1,3) = 1800$ и $v(2,3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1,2,3)$=2000.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит \$1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.
- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$.
- Коалиции $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1,3) = 1800$ и $v(2,3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1,2,3)$=2000.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит $1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.

- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$.
- Коалиции $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1,3) = 1800$ и $v(2,3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1,2,3)$=2000.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит \$1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.
- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$.
- Коалиции $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1,3) = 1800$ и $v(2,3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1,2,3)$=2000.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит \$1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.
- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1, 2) = 0$.
- Коалиции $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1, 3) = 1800$ и $v(2, 3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1, 2, 3)$=2000.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит \$1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.
- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$.
- Коалиции $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1,3) = 1800$ и $v(2,3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1,2,3)$=2000.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит \$1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.
- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$.
- Коалиции $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1,3) = 1800$ и $v(2,3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1,2,3)=2000$.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит \$1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.

- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$.
- Коалиции $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1,3) = 1800$ и $v(2,3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1,2,3)=2000$.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит \$1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.

- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1, 2) = 0$.
- Коалиции $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1, 3) = 1800$ и $v(2, 3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1, 2, 3){=}2000$.

Пример 2 вычисления выигрышей коалиций

- Имеется три фирмы.
- Фирма 1 может выпускать товары D_1 в кол-ве 900 единиц,
- фирма 2 — товары D_1 в количестве 700 единиц,
- фирма 3 — товары D_2 в количестве 1000 единиц.
- Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2.
- Единица обоих товаров стоит \$1.
- Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.

- Т.к. фирмы 1 и 2 не могут производить комплекты, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0$.
- Коалиции $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1,3) = 1800$ и $v(2,3) = 1400$.
- А коалиция из трех фирм получит доход $v(1,2,3)=2000$.

К поиску ядра К поиску вектора Шепли

Определение кооперативной игры

- *Кооперативной игрой* n лиц называется пара (N, v),
- где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \dots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S, T \subset N, \ S \cap T = \emptyset$$

(супераддитивность).

- Подмножества множества N называются *коалициями*.
- Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры*,
- где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S,
- Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Определение кооперативной игры

- *Кооперативной игрой* n лиц называется пара (N, v),
- где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \dots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$v(\emptyset) = 0,$$
$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S, T \subset N, \ S \cap T = \emptyset$$
(супераддитивность).

- Подмножества множества N называются *коалициями*.
- Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры*,
- где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S,
- Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Определение кооперативной игры

- *Кооперативной игрой* n лиц называется пара (N, v),
- где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \dots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$v(\emptyset) = 0,$$
$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$
$$\text{(супераддитивность).}$$

- Подмножества множества N называются *коалициями.*
- Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры,*
- где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S,
- Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Определение кооперативной игры

- *Кооперативной игрой* n лиц называется пара (N, v),
- где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \dots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$

(супераддитивность).

- Подмножества множества N называются *коалициями.*
- Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры,*
- где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S,
- Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Определение кооперативной игры

- *Кооперативной игрой* n лиц называется пара (N, v),
- где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \ldots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$

(супераддитивность).

- Подмножества множества N называются *коалициями.*
- Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры,*
- где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S,
- Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Определение кооперативной игры

- *Кооперативной игрой* n лиц называется пара (N, v),
- где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \dots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$v(\emptyset) = 0,$$
$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$
(супераддитивность).

- Подмножества множества N называются *коалициями*.
- Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры*,
- где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S,
- Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Определение кооперативной игры

- *Кооперативной игрой n* лиц называется пара (N, v),
- где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \dots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$v(\emptyset) = 0,$$
$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S, T \subset N, \ S \cap T = \emptyset$$
(супераддитивность).

- Подмножества множества N называются *коалициями*.
- Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры*,
- где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S,
- Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Определение кооперативной игры

- *Кооперативной игрой* n лиц называется пара (N, v),
- где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \ldots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$v(\emptyset) = 0,$$
$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$

(супераддитивность).

- Подмножества множества N называются *коалициями*.
- Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры*,
- где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S,
- Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Определение кооперативной игры

- *Кооперативной игрой* n лиц называется пара (N, v),
- где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \dots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$v(\emptyset) = 0,$$
$$v(S \cup T) \ge v(S) + v(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$
(супераддитивность).

- Подмножества множества N называются *коалициями*.
- Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры*,
- где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S,
- Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Определение кооперативной игры

- *Кооперативной игрой* n лиц называется пара (N, v),
- где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \ldots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S, T \subset N, \; S \cap T = \emptyset$$

(супераддитивность).

- Подмножества множества N называются *коалициями*.
- Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры*,
- где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S,
- Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Дележи

- *Дележом* в игре (N, v) называется вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, который удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \text{(коллективной рациональности)},$$

$$x_i \geq v(i), \quad i \in N \quad \text{(индивидуальной рациональности)}.$$

- Условие *коллективной рациональности* требует, чтобы вся полезность была распределена.
- Условие *индивидуальной рациональности* означает, что в любой коалиции каждый игрок должен получать не меньше того, что он может выиграть самостоятельно. Иначе, игрок откажется участвовать в такой коалиции.

Дележи

- *Дележом* в игре (N, v) называется вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, который удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \text{(коллективной рациональности)},$$

$$x_i \geq v(i), \quad i \in N \quad \text{(индивидуальной рациональности)}.$$

- Условие *коллективной рациональности* требует, чтобы вся полезность была распределена.
- Условие *индивидуальной рациональности* означает, что в любой коалиции каждый игрок должен получать не меньше того, что он может выиграть самостоятельно. Иначе, игрок откажется участвовать в такой коалиции.

Дележи

- *Дележом* в игре (N, v) называется вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, который удовлетворяет следующим условиям:

  $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (коллективной рациональности),

  $x_i \geq v(i), \quad i \in N$ (индивидуальной рациональности).
- Условие *коллективной рациональности* требует, чтобы вся полезность была распределена.
- Условие *индивидуальной рациональности* означает, что в любой коалиции каждый игрок должен получать не меньше того, что он может выиграть самостоятельно. Иначе, игрок откажется участвовать в такой коалиции.

Дележи

- *Дележом* в игре (N, v) называется вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, который удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \text{(коллективной рациональности)},$$

$$x_i \geq v(i), \quad i \in N \quad \text{(индивидуальной рациональности)}.$$

- Условие *коллективной рациональности* требует, чтобы вся полезность была распределена.
- Условие *индивидуальной рациональности* означает, что в любой коалиции каждый игрок должен получать не меньше того, что он может выиграть самостоятельно. Иначе, игрок откажется участвовать в такой коалиции.

Дележи

- *Дележом* в игре (N, v) называется вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, который удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \text{(коллективной рациональности)},$$

$$x_i \geq v(i), \quad i \in N \quad \text{(индивидуальной рациональности)}.$$

- Условие *коллективной рациональности* требует, чтобы вся полезность была распределена.
- Условие *индивидуальной рациональности* означает, что в любой коалиции каждый игрок должен получать не меньше того, что он может выиграть самостоятельно. Иначе, игрок откажется участвовать в такой коалиции.

План лекции

1. Характеристическая функция и дележи
   - Ядро
   - Игры с пустым ядром
   - Приближенное ядро
2. Справедливые дележи
   - Значение игры по Шепли
   - Сердцевина
3. Кооперация для минимизации издержек
   - Ядро и значение Шепли
   - Размещение центров обслуживания

Стабильные дележи

- *Дележ x нестабилен из-за коалиции $S \subset N$*, если $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$.
- В таком случае суммарный выигрыш игроков коалиции S меньше того, что коалиция может получить действуя самостоятельно.
- Поэтому игроки коалиции S объединившись, смогут расстроить соглашение, приведшее к формированию дележа x.
- Мы также говорим, что дележ *нестабилен*, если он нестабилен из-за какой-либо коалиции,
- иначе дележ называется *стабильным*.
- Множество $C(N, v)$ всех стабильных дележей составляет *ядро* кооперативной игры.
- По определению

$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}.$$

Стабильные дележи

- Дележ x *нестабилен из-за коалиции* $S \subset N$, если $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$.
- В таком случае суммарный выигрыш игроков коалиции S меньше того, что коалиция может получить действуя самостоятельно.
- Поэтому игроки коалиции S объединившись, смогут расстроить соглашение, приведшее к формированию дележа x.
- Мы также говорим, что дележ *нестабилен*, если он нестабилен из-за какой-либо коалиции,
- иначе дележ называется *стабильным*.
- Множество $C(N, v)$ всех стабильных дележей составляет *ядро* кооперативной игры.
- По определению
$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}.$$

Стабильные дележи

- Дележ x *нестабилен из-за коалиции* $S \subset N$, если $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$.
- В таком случае суммарный выигрыш игроков коалиции S меньше того, что коалиция может получить действуя самостоятельно.
- Поэтому игроки коалиции S объединившись, смогут расстроить соглашение, приведшее к формированию дележа x.
- Мы также говорим, что дележ *нестабилен*, если он нестабилен из-за какой-либо коалиции,
- иначе дележ называется *стабильным*.
- Множество $C(N, v)$ всех стабильных дележей составляет *ядро* кооперативной игры.
- По определению
$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}.$$

Стабильные дележи

- Дележ x *нестабилен из-за коалиции* $S \subset N$, если $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$.
- В таком случае суммарный выигрыш игроков коалиции S меньше того, что коалиция может получить действуя самостоятельно.
- Поэтому игроки коалиции S объединившись, смогут расстроить соглашение, приведшее к формированию дележа x.
- Мы также говорим, что дележ *нестабилен*, если он нестабилен из-за какой-либо коалиции,
- иначе дележ называется *стабильным*.
- Множество $C(N, v)$ всех стабильных дележей составляет *ядро* кооперативной игры.
- По определению
$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}.$$

Стабильные дележи

- Дележ x *нестабилен из-за коалиции* $S \subset N$, если $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$.
- В таком случае суммарный выигрыш игроков коалиции S меньше того, что коалиция может получить действуя самостоятельно.
- Поэтому игроки коалиции S объединившись, смогут расстроить соглашение, приведшее к формированию дележа x.
- Мы также говорим, что дележ *нестабилен*, если он нестабилен из-за какой-либо коалиции,
- иначе дележ называется *стабильным*.
- Множество $C(N, v)$ всех стабильных дележей составляет *ядро* кооперативной игры.
- По определению
$$C(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}.$$

Стабильные дележи

- Дележ x *нестабилен из-за коалиции* $S \subset N$, если $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$.
- В таком случае суммарный выигрыш игроков коалиции S меньше того, что коалиция может получить действуя самостоятельно.
- Поэтому игроки коалиции S объединившись, смогут расстроить соглашение, приведшее к формированию дележа x.
- Мы также говорим, что дележ *нестабилен*, если он нестабилен из-за какой-либо коалиции,
- иначе дележ называется *стабильным*.
- Множество $C(N, v)$ всех стабильных дележей составляет *ядро* кооперативной игры.
- По определению
$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}.$$

Стабильные дележи

- Дележ x *нестабилен из-за коалиции* $S \subset N$, если $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$.
- В таком случае суммарный выигрыш игроков коалиции S меньше того, что коалиция может получить действуя самостоятельно.
- Поэтому игроки коалиции S объединившись, смогут расстроить соглашение, приведшее к формированию дележа x.
- Мы также говорим, что дележ *нестабилен*, если он нестабилен из-за какой-либо коалиции,
- иначе дележ называется *стабильным*.
- Множество $C(N, v)$ всех стабильных дележей составляет *ядро* кооперативной игры.
- По определению

$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}.$$

Ядро для игры 3-х фирм, производящих комплекты

Характеристическая функция данной игры: Показать описание

$$v(S) = \begin{cases} 0, & S \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\}, \\ 1800, & S = \{1,3\}, \\ 1400, & S = \{2,3\}, \\ 2000, & S = \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Ядро этой игры задается следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2000, \\ x_1 + x_3 &\geq 1800, \\ x_2 + x_3 &\geq 1400, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ядро — заштрихованная зона.

Ядро для игры 3-х фирм, производящих комплекты

Характеристическая функция данной игры:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & S \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\}, \\ 1800, & S = \{1,3\}, \\ 1400, & S = \{2,3\}, \\ 2000, & S = \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Ядро этой игры задается следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2000, \\ x_1 + x_3 &\geq 1800, \\ x_2 + x_3 &\geq 1400, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ядро — заштрихованная зона.

Ядро для игры 3-х фирм, производящих комплекты

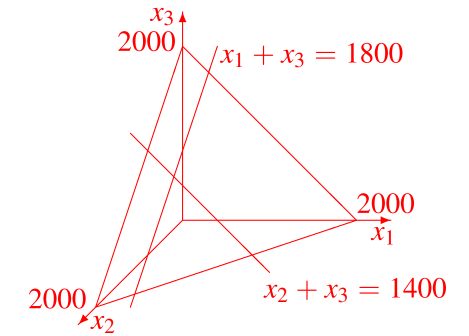
Характеристическая функция данной игры:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & S \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\}, \\ 1800, & S = \{1,3\}, \\ 1400, & S = \{2,3\}, \\ 2000, & S = \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Ядро этой игры задается следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2000, \\ x_1 + x_3 &\geq 1800, \\ x_2 + x_3 &\geq 1400, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ядро — заштрихованная зона.



Ядро для игры 3-х фирм, производящих комплекты

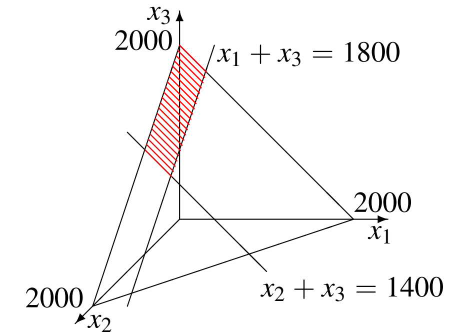
Характеристическая функция данной игры:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & S \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\}, \\ 1800, & S = \{1,3\}, \\ 1400, & S = \{2,3\}, \\ 2000, & S = \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Ядро этой игры задается следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2000, \\ x_1 + x_3 &\geq 1800, \\ x_2 + x_3 &\geq 1400, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ядро — заштрихованная зона.



Графическое представление ядра в игры трех лиц

Поскольку в игре трех лиц ядро лежит на гиперплоскости $x_1 + x_2 + x_3 = v(1,2,3)$, то нам будет удобнее изображать ядро не в трехмерном пространстве, а на этой гиперплоскости.

Пример

Определить ядро для игры со следуюшей характ. функцией:

$$v(\emptyset) = v(2) = 0, \quad v(1) = v(3) = 1, \quad v(1,2,3) = 8,$$
$$v(1,2) = 4, \quad v(1,3) = 3, \quad v(2,3) = 5.$$

Дележами являются точки $(x_1, x_2, x_3)^T$, удовлетворяющие ограничениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8, \quad x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1.$$

Множество решений этой системы есть треугольник в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(7,0,1)^T$, $(1,6,1)^T$ и $(1,0,7)^T$.

Графическое представление ядра в игры трех лиц

Поскольку в игре трех лиц ядро лежит на гиперплоскости $x_1 + x_2 + x_3 = v(1, 2, 3)$, то нам будет удобнее изображать ядро не в трехмерном пространстве, а на этой гиперплоскости.

Пример

Определить ядро для игры со следуюшей характ. функцией:

$$v(\emptyset) = v(2) = 0, \quad v(1) = v(3) = 1, \quad v(1,2,3) = 8,$$
$$v(1,2) = 4, \quad v(1,3) = 3, \quad v(2,3) = 5.$$

Дележами являются точки $(x_1, x_2, x_3)^T$, удовлетворяющие ограничениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8, \quad x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1.$$

Множество решений этой системы есть треугольник в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(7,0,1)^T$, $(1,6,1)^T$ и $(1,0,7)^T$.

Графическое представление ядра в игры трех лиц

Поскольку в игре трех лиц ядро лежит на гиперплоскости $x_1 + x_2 + x_3 = v(1, 2, 3)$, то нам будет удобнее изображать ядро не в трехмерном пространстве, а на этой гиперплоскости.

Пример

Определить ядро для игры со следующей характ. функцией:

$$v(\emptyset) = v(2) = 0, \quad v(1) = v(3) = 1, \quad v(1,2,3) = 8,$$
$$v(1,2) = 4, \quad v(1,3) = 3, \quad v(2,3) = 5.$$

Дележами являются точки $(x_1, x_2, x_3)^T$, удовлетворяющие ограничениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8, \quad x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1.$$

Множество решений этой системы есть треугольник в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(7, 0, 1)^T$, $(1, 6, 1)^T$ и $(1, 0, 7)^T$.

Графическое представление ядра в игры трех лиц

Поскольку в игре трех лиц ядро лежит на гиперплоскости $x_1 + x_2 + x_3 = v(1,2,3)$, то нам будет удобнее изображать ядро не в трехмерном пространстве, а на этой гиперплоскости.

Пример

Определить ядро для игры со следуюшей характ. функцией:

$$v(\emptyset) = v(2) = 0, \quad v(1) = v(3) = 1, \quad v(1,2,3) = 8,$$
$$v(1,2) = 4, \quad v(1,3) = 3, \quad v(2,3) = 5.$$

Дележами являются точки $(x_1, x_2, x_3)^T$, удовлетворяющие ограничениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8, \quad x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1.$$

Множество решений этой системы есть треугольник в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(7,0,1)^T$, $(1,6,1)^T$ и $(1,0,7)^T$.

Графическое представление ядра в игры трех лиц

Поскольку в игре трех лиц ядро лежит на гиперплоскости $x_1 + x_2 + x_3 = v(1,2,3)$, то нам будет удобнее изображать ядро не в трехмерном пространстве, а на этой гиперплоскости.

Пример

Определить ядро для игры со следуюшей характ. функцией:

$$v(\emptyset) = v(2) = 0, \quad v(1) = v(3) = 1, \quad v(1,2,3) = 8,$$
$$v(1,2) = 4, \quad v(1,3) = 3, \quad v(2,3) = 5.$$

Дележами являются точки $(x_1, x_2, x_3)^T$, удовлетворяющие ограничениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8, \quad x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1.$$

Множество решений этой системы есть треугольник в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(7,0,1)^T$, $(1,6,1)^T$ и $(1,0,7)^T$.

Графическое представление ядра в игры трех лиц

Поскольку в игре трех лиц ядро лежит на гиперплоскости $x_1 + x_2 + x_3 = v(1, 2, 3)$, то нам будет удобнее изображать ядро не в трехмерном пространстве, а на этой гиперплоскости.

Пример

Определить ядро для игры со следуюшей характ. функцией:

$$v(\emptyset) = v(2) = 0, \quad v(1) = v(3) = 1, \quad v(1, 2, 3) = 8,$$
$$v(1, 2) = 4, \quad v(1, 3) = 3, \quad v(2, 3) = 5.$$

Дележами являются точки $(x_1, x_2, x_3)^T$, удовлетворяющие ограничениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8, \quad x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1.$$

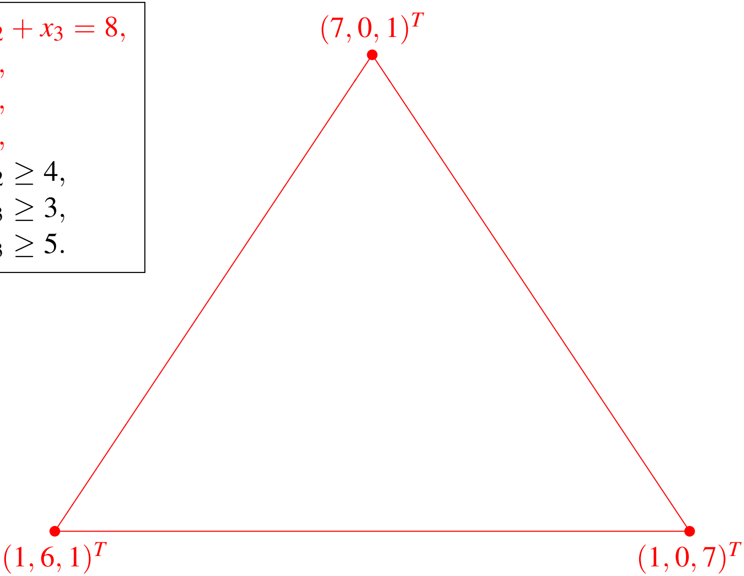
Множество решений этой системы есть треугольник в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(7, 0, 1)^T$, $(1, 6, 1)^T$ и $(1, 0, 7)^T$.

Ядра в игре трех лиц

$$\boxed{\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 8,\\
&x_1 \geq 1,\\
&x_2 \geq 0,\\
&x_3 \geq 1,\\
&x_1 + x_2 \geq 4,\\
&x_1 + x_3 \geq 3,\\
&x_2 + x_3 \geq 5.
\end{aligned}}$$

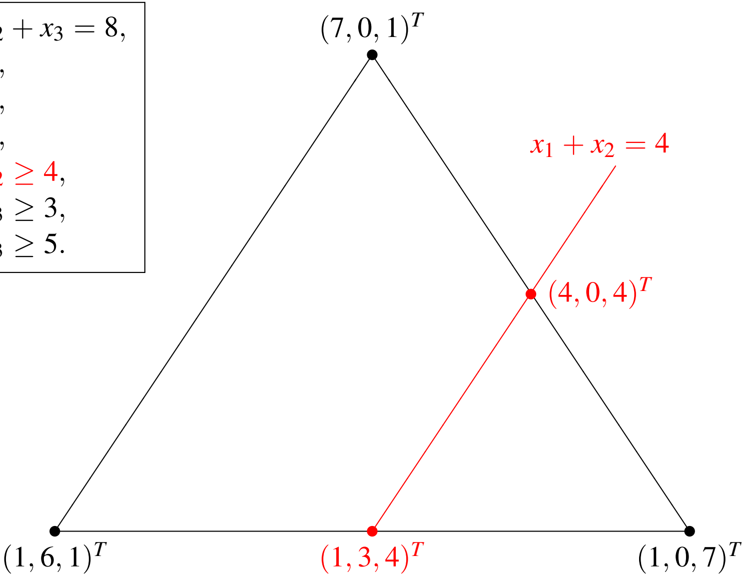
Ядра в игре трех лиц

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 8,\\
&x_1 \geq 1,\\
&x_2 \geq 0,\\
&x_3 \geq 1,\\
&x_1 + x_2 \geq 4,\\
&x_1 + x_3 \geq 3,\\
&x_2 + x_3 \geq 5.
\end{aligned}$$



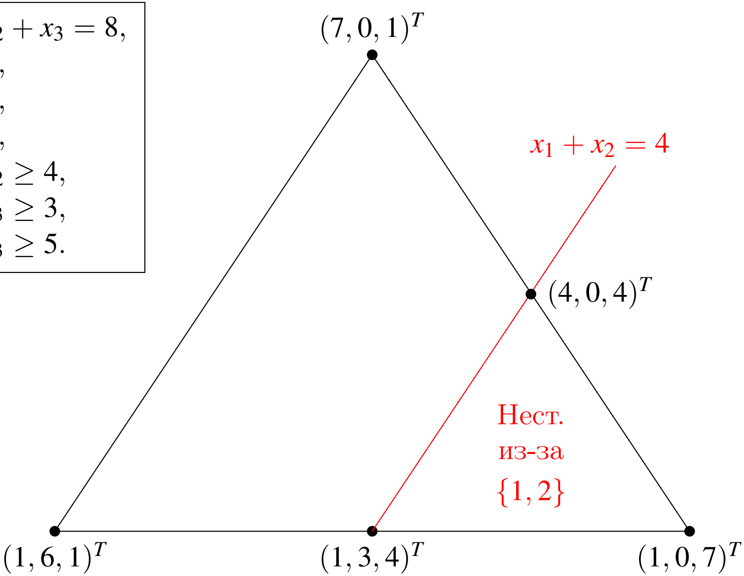
Ядра в игре трех лиц

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 8,\\
&x_1 \geq 1,\\
&x_2 \geq 0,\\
&x_3 \geq 1,\\
&x_1 + x_2 \geq 4,\\
&x_1 + x_3 \geq 3,\\
&x_2 + x_3 \geq 5.
\end{aligned}$$



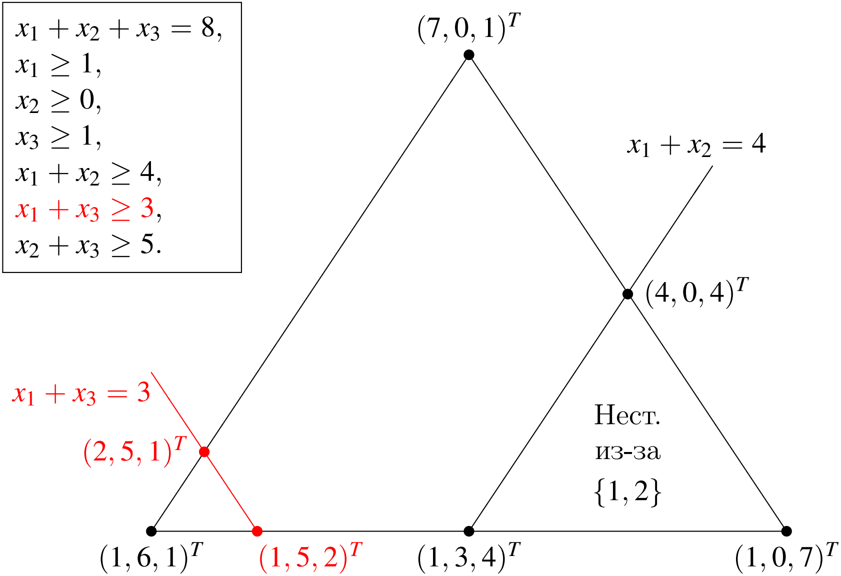
Ядра в игре трех лиц

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 8,\\
&x_1 \ge 1,\\
&x_2 \ge 0,\\
&x_3 \ge 1,\\
&x_1 + x_2 \ge 4,\\
&x_1 + x_3 \ge 3,\\
&x_2 + x_3 \ge 5.
\end{aligned}$$



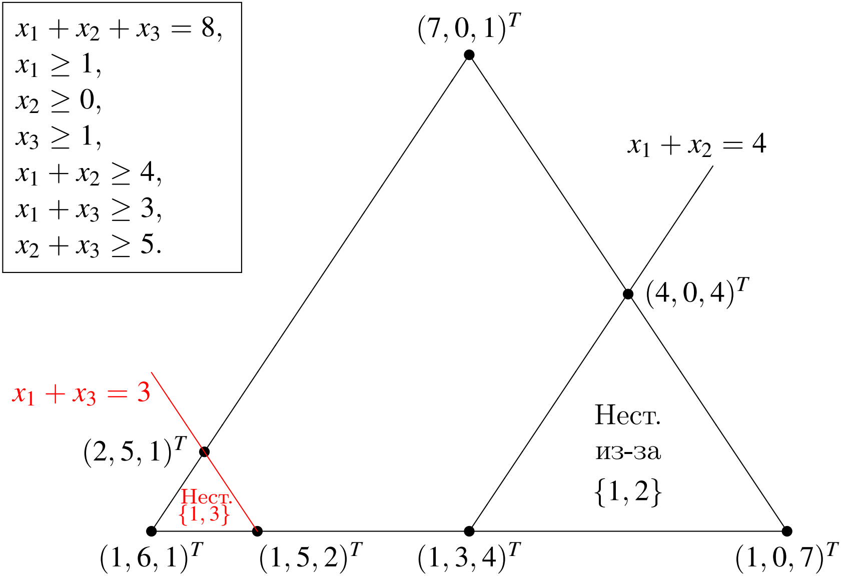
Ядра в игре трех лиц

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8,$$
$$x_1 \geq 1,$$
$$x_2 \geq 0,$$
$$x_3 \geq 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 4,$$
$$x_1 + x_3 \geq 3,$$
$$x_2 + x_3 \geq 5.$$



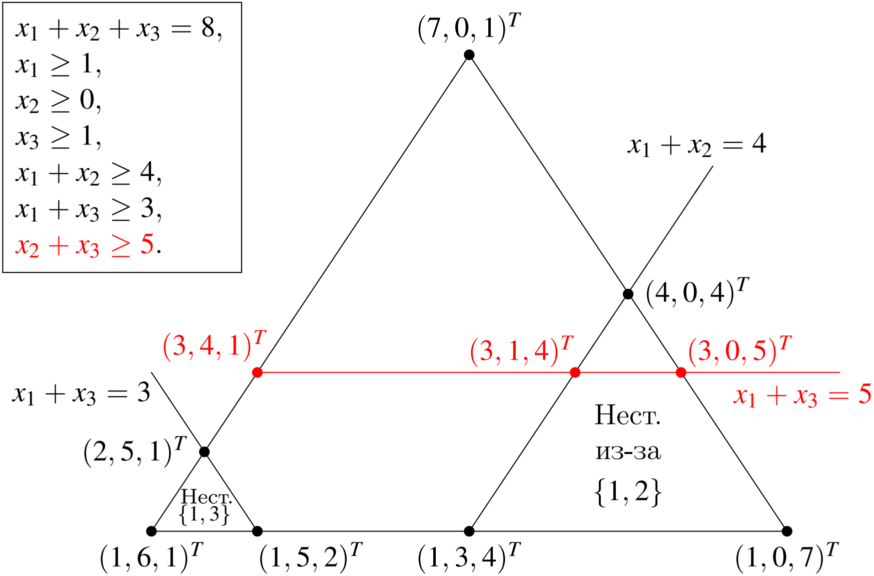
Ядра в игре трех лиц

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 8,\\
&x_1 \geq 1,\\
&x_2 \geq 0,\\
&x_3 \geq 1,\\
&x_1 + x_2 \geq 4,\\
&x_1 + x_3 \geq 3,\\
&x_2 + x_3 \geq 5.
\end{aligned}
$$



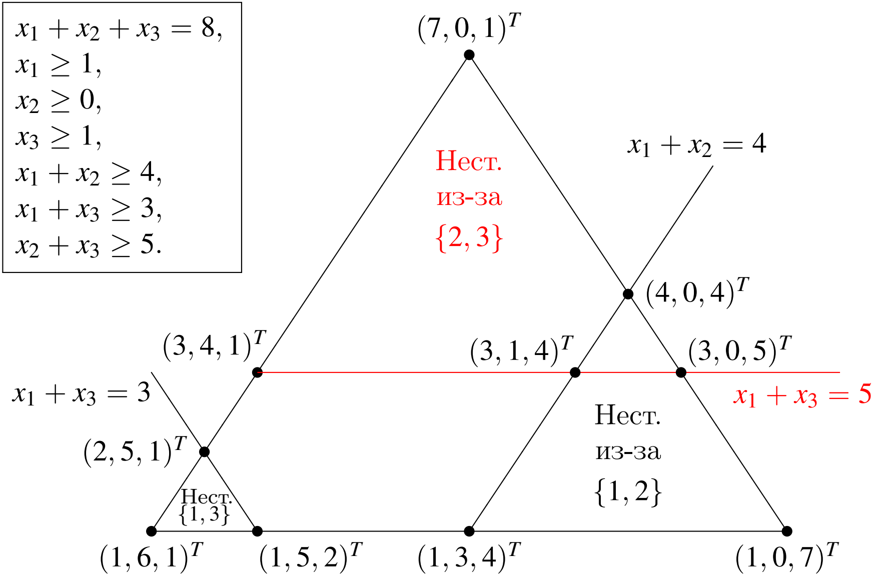
Ядра в игре трех лиц

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 8,\\
&x_1 \geq 1,\\
&x_2 \geq 0,\\
&x_3 \geq 1,\\
&x_1 + x_2 \geq 4,\\
&x_1 + x_3 \geq 3,\\
&x_2 + x_3 \geq 5.
\end{aligned}
$$



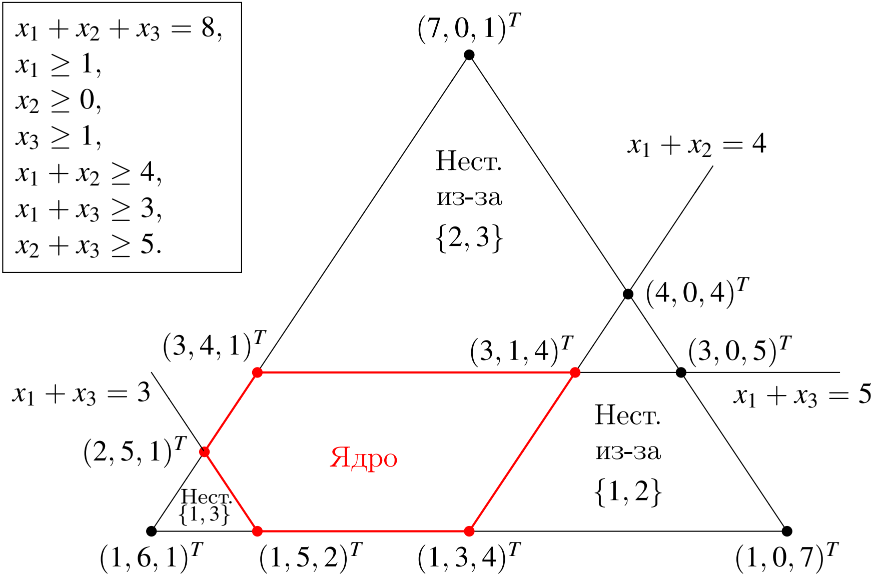
Ядра в игре трех лиц

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 8,\\
&x_1 \geq 1,\\
&x_2 \geq 0,\\
&x_3 \geq 1,\\
&x_1 + x_2 \geq 4,\\
&x_1 + x_3 \geq 3,\\
&x_2 + x_3 \geq 5.
\end{aligned}
$$



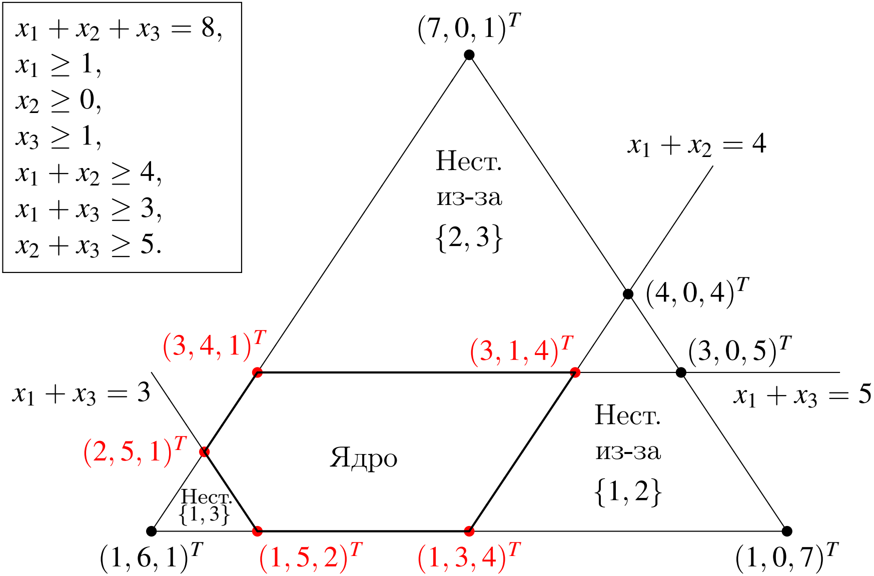
Ядра в игре трех лиц

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 8,\\
&x_1 \geq 1,\\
&x_2 \geq 0,\\
&x_3 \geq 1,\\
&x_1 + x_2 \geq 4,\\
&x_1 + x_3 \geq 3,\\
&x_2 + x_3 \geq 5.
\end{aligned}
$$



Ядра в игре трех лиц

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 8,\\
&x_1 \geq 1,\\
&x_2 \geq 0,\\
&x_3 \geq 1,\\
&x_1 + x_2 \geq 4,\\
&x_1 + x_3 \geq 3,\\
&x_2 + x_3 \geq 5.
\end{aligned}
$$



«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

Пример

Ученый изобрел новое лекарство, но не может производить его самостоятельно. Ученый может продать формулу лекарства одной из двух фармацевтических компаний. Удачливая компания согласна разделить с ученым поровну ожидаемую прибыль в один миллион долларов. Составить характ. функцию для данной игры и определить ядро.

У нас три игрока: 1) ученый; 2) компания 1; 3) компания 2. Характеристическая функция игры:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Ядро описывается ограничениями:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

Пример

Ученый изобрел новое лекарство, но не может производить его самостоятельно. Ученый может продать формулу лекарства одной из двух фармацевтических компаний. Удачливая компания согласна разделить с ученым поровну ожидаемую прибыль в один миллион долларов. Составить характ. функцию для данной игры и определить ядро.

У нас три игрока: 1) ученый; 2) компания 1; 3) компания 2. Характеристическая функция игры:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Ядро описывается ограничениями:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

Пример

Ученый изобрел новое лекарство, но не может производить его самостоятельно. Ученый может продать формулу лекарства одной из двух фармацевтических компаний. Удачливая компания согласна разделить с ученым поровну ожидаемую прибыль в один миллион долларов. Составить характ. функцию для данной игры и определить ядро.

У нас три игрока: 1) ученый; 2) компания 1; 3) компания 2. Характеристическая функция игры:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Ядро описывается ограничениями:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

Пример

Ученый изобрел новое лекарство, но не может производить его самостоятельно. Ученый может продать формулу лекарства одной из двух фармацевтических компаний. Удачливая компания согласна разделить с ученым поровну ожидаемую прибыль в один миллион долларов. Составить характ. функцию для данной игры и определить ядро.

У нас три игрока: 1) ученый; 2) компания 1; 3) компания 2. Характеристическая функция игры:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Ядро описывается ограничениями:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

Пример

Ученый изобрел новое лекарство, но не может производить его самостоятельно. Ученый может продать формулу лекарства одной из двух фармацевтических компаний. Удачливая компания согласна разделить с ученым поровну ожидаемую прибыль в один миллион долларов. Составить характ. функцию для данной игры и определить ядро.

У нас три игрока: 1) ученый; 2) компания 1; 3) компания 2.

Характеристическая функция игры:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Ядро описывается ограничениями:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

Пример

Ученый изобрел новое лекарство, но не может производить его самостоятельно. Ученый может продать формулу лекарства одной из двух фармацевтических компаний. Удачливая компания согласна разделить с ученым поровну ожидаемую прибыль в один миллион долларов. Составить характ. функцию для данной игры и определить ядро.

У нас три игрока: 1) ученый; 2) компания 1; 3) компания 2.

Характеристическая функция игры:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Ядро описывается ограничениями:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

Пример

Ученый изобрел новое лекарство, но не может производить его самостоятельно. Ученый может продать формулу лекарства одной из двух фармацевтических компаний. Удачливая компания согласна разделить с ученым поровну ожидаемую прибыль в один миллион долларов. Составить характ. функцию для данной игры и определить ядро.

У нас три игрока: 1) ученый; 2) компания 1; 3) компания 2. Характеристическая функция игры:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Ядро описывается ограничениями:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{gathered} \qquad (*)$$

- Вычитая из 1-го равенства 2-е, 3-е и 4-е неравенства, получим неравенства
$$x_3 \leq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_1 \leq 1.$$
- Но поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, то все эти три неравенства должны выполняться как равенства.
- Следовательно, система $(*)$ имеет единственное решение $x^* = (1, 0, 0)^T$.
- Значит ядро содержит только один дележ x^*, что подчеркивает доминирующее положение игрока 1.

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0, \qquad (*)$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

- Вычитая из 1-го равенства 2-е, 3-е и 4-е неравенства, получим неравенства
$$x_3 \leq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_1 \leq 1.$$
- Но поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, то все эти три неравенства должны выполняться как равенства.
- Следовательно, система $(*)$ имеет единственное решение $x^* = (1, 0, 0)^T$.
- Значит ядро содержит только один дележ x^*, что подчеркивает доминирующее положение игрока 1.

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

$$\begin{gathered} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2 \geq 1,\ x_1+x_3 \geq 1,\ x_2+x_3 \geq 0, \qquad (*) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{gathered}$$

- Вычитая из 1-го равенства 2-е, 3-е и 4-е неравенства, получим неравенства
$$x_3 \leq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_1 \leq 1.$$
- Но поскольку $x_1+x_2+x_3=1$, то все эти три неравенства должны выполняться как равенства.
- Следовательно, система $(*)$ имеет единственное решение $x^*=(1,0,0)^T$.
- Значит ядро содержит только один дележ x^*, что подчеркивает доминирующее положение игрока 1.

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{gathered} \qquad (*)$$

- Вычитая из 1-го равенства 2-е, 3-е и 4-е неравенства, получим неравенства
$$x_3 \leq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_1 \leq 1.$$
- Но поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, то все эти три неравенства должны выполняться как равенства.
- Следовательно, система $(*)$ имеет единственное решение $x^* = (1, 0, 0)^T$.
- Значит ядро содержит только один дележ x^*, что подчеркивает доминирующее положение игрока 1.

«Идеальная» кооп. игра с единств. стаб. дележем

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 + x_3 \geq 1,\ x_2 + x_3 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{gathered} \qquad (*)$$

- Вычитая из 1-го равенства 2-е, 3-е и 4-е неравенства, получим неравенства
$$x_3 \leq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_1 \leq 1.$$
- Но поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, то все эти три неравенства должны выполняться как равенства.
- Следовательно, система $(*)$ имеет единственное решение $x^* = (1, 0, 0)^T$.
- Значит ядро содержит только один дележ x^*, что подчеркивает доминирующее положение игрока 1.

План лекции

1. Характеристическая функция и дележи
   - Ядро
   - Игры с пустым ядром
   - Приближенное ядро
2. Справедливые дележи
   - Значение игры по Шепли
   - Сердцевина
3. Кооперация для минимизации издержек
   - Ядро и значение Шепли
   - Размещение центров обслуживания

Игра с пустым ядром

Пример

- В голосовании принимают участие пять человек.
- Игрок 1 (сильный игрок) имеет 3 голоса,
- а все остальные игроки имеют по одному голосу.
- Для принятия решения необходимо 4 голоса из 7.

Характеристическая функция игры:

$$v(1) = 0,$$
$$v(S) = 0, \quad \text{если } |S| \le 3,\ 1 \notin S,$$
$$v(S) = 1 \quad \text{для всех остальных } S.$$

Ядро — множество решений системы неравенств:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 1,$$
$$x_1 + x_2 \ge 1,\ x_1 + x_3 \ge 1,$$
$$x_1 + x_4 \ge 1,\ x_1 + x_5 \ge 1,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Игра с пустым ядром

Пример

- В голосовании принимают участие пять человек.
- Игрок 1 (сильный игрок) имеет 3 голоса,
- а все остальные игроки имеют по одному голосу.
- Для принятия решения необходимо 4 голоса из 7.

Характеристическая функция игры:

$$\begin{aligned} &v(1) = 0, \\ &v(S) = 0, \quad \text{если } |S| \le 3,\ 1 \notin S, \\ &v(S) = 1 \quad \text{для всех остальных } S. \end{aligned}$$

Ядро — множество решений системы неравенств:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1,\ x_1 + x_3 &\ge 1, \\ x_1 + x_4 \ge 1,\ x_1 + x_5 &\ge 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0. \end{aligned}$$

Игра с пустым ядром

Пример

- В голосовании принимают участие пять человек.
- Игрок 1 (сильный игрок) имеет 3 голоса,
- а все остальные игроки имеют по одному голосу.
- Для принятия решения необходимо 4 голоса из 7.

Характеристическая функция игры:

$$\begin{aligned} v(1) &= 0, \\ v(S) &= 0, \quad \text{если } |S| \le 3,\ 1 \notin S, \\ v(S) &= 1 \quad \text{для всех остальных } S. \end{aligned}$$

Ядро — множество решений системы неравенств:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1,\ x_1 + x_3 &\ge 1, \\ x_1 + x_4 \ge 1,\ x_1 + x_5 &\ge 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0. \end{aligned}$$

Игра с пустым ядром

Пример

- В голосовании принимают участие пять человек.
- Игрок 1 (сильный игрок) имеет 3 голоса,
- а все остальные игроки имеют по одному голосу.
- Для принятия решения необходимо 4 голоса из 7.

Характеристическая функция игры:

$$
\begin{aligned}
v(1) &= 0, \\
v(S) &= 0, \quad \text{если } |S| \le 3,\ 1 \notin S, \\
v(S) &= 1 \quad \text{для всех остальных } S.
\end{aligned}
$$

Ядро — множество решений системы неравенств:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1, \\
x_1 + x_2 \ge 1,\ x_1 + x_3 &\ge 1, \\
x_1 + x_4 \ge 1,\ x_1 + x_5 &\ge 1, \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Игра с пустым ядром

Пример

- В голосовании принимают участие пять человек.
- Игрок 1 (сильный игрок) имеет 3 голоса,
- а все остальные игроки имеют по одному голосу.
- Для принятия решения необходимо 4 голоса из 7.

Характеристическая функция игры:

$$\begin{aligned} v(1) &= 0, \\ v(S) &= 0, \quad \text{если } |S| \le 3,\ 1 \notin S, \\ v(S) &= 1 \quad \text{для всех остальных } S. \end{aligned}$$

Ядро — множество решений системы неравенств:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1,\ x_1 + x_3 &\ge 1, \\ x_1 + x_4 \ge 1,\ x_1 + x_5 &\ge 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0. \end{aligned}$$

Игра с пустым ядром

Пример

- В голосовании принимают участие пять человек.
- Игрок 1 (сильный игрок) имеет 3 голоса,
- а все остальные игроки имеют по одному голосу.
- Для принятия решения необходимо 4 голоса из 7.

Характеристическая функция игры:

$$\begin{aligned} &v(1) = 0, \\ &v(S) = 0, \quad \text{если } |S| \le 3,\ 1 \notin S, \\ &v(S) = 1 \quad \text{для всех остальных } S. \end{aligned}$$

Ядро — множество решений системы неравенств:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1,\ x_1 + x_3 &\ge 1, \\ x_1 + x_4 \ge 1,\ x_1 + x_5 &\ge 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0. \end{aligned}$$

Игра с пустым ядром

Пример

- В голосовании принимают участие пять человек.
- Игрок 1 (сильный игрок) имеет 3 голоса,
- а все остальные игроки имеют по одному голосу.
- Для принятия решения необходимо 4 голоса из 7.

Характеристическая функция игры:

$$\begin{aligned} &v(1) = 0, \\ &v(S) = 0, \quad \text{если } |S| \le 3,\ 1 \notin S, \\ &v(S) = 1 \quad \text{для всех остальных } S. \end{aligned}$$

Ядро — множество решений системы неравенств:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1,\ x_1 + x_3 &\ge 1, \\ x_1 + x_4 \ge 1,\ x_1 + x_5 &\ge 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0. \end{aligned}$$

К поиску α-ядра

Игра с пустым ядром

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1,\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1,\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &\geq 1,\\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &\geq 1,\\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &\geq 1,\\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &\geq 1,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

- Сложив второе неравенство, умноженное на $3/4$,
- с третьим, четвертым, пятым и шестым неравенствами, умноженными на $1/4$,
- и отнимем первое равенство,
- получим ложное неравенство $0 \geq 3/4$.
- Это доказывает, что ядро пустое.

Игра с пустым ядром

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1, \qquad \times\,(3/4) \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad &\geq 1, \\
x_1 \qquad + x_3 \qquad &\geq 1, \\
x_1 \qquad\qquad + x_4 &\geq 1, \\
x_1 \qquad\qquad\quad + x_5 &\geq 1, \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

- Сложив второе неравенство, умноженное на $3/4$,
- с третьим, четвертым, пятым и шестым неравенствами, умноженными на $1/4$,
- и отнимем первое равенство,
- получим ложное неравенство $0 \geq 3/4$.
- Это доказывает, что ядро пустое.

Игра с пустым ядром

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, & & \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1, & & \times (3/4) \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &\geq 1, & & \times (1/4) \\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &\geq 1, & & \times (1/4) \\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &\geq 1, & & \times (1/4) \\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &\geq 1, & & \times (1/4) \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0. & &
\end{aligned}
$$

- Сложив второе неравенство, умноженное на $3/4$,
- с третьим, четвертым, пятым и шестым неравенствами, умноженными на $1/4$,
- и отнимем первое равенство,
- получим ложное неравенство $0 \geq 3/4$.
- Это доказывает, что ядро пустое.

Игра с пустым ядром

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, & \times (-1)\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1, & \times (3/4)\\
x_1 + x_2 &\ge 1, & \times (1/4)\\
x_1 + x_3 &\ge 1, & \times (1/4)\\
x_1 + x_4 &\ge 1, & \times (1/4)\\
x_1 + x_5 &\ge 1, & \times (1/4)\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0.
\end{aligned}$$

- Сложив второе неравенство, умноженное на $3/4$,
- с третьим, четвертым, пятым и шестым неравенствами, умноженными на $1/4$,
- и отнимем первое равенство,
- получим ложное неравенство $0 \ge 3/4$.
- Это доказывает, что ядро пустое.

Игра с пустым ядром

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, && \times(-1)\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1, && \times(3/4)\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &\ge 1, && \times(1/4)\\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &\ge 1, && \times(1/4)\\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &\ge 1, && \times(1/4)\\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &\ge 1, && \times(1/4)\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

- Сложив второе неравенство, умноженное на $3/4$,
- с третьим, четвертым, пятым и шестым неравенствами, умноженными на $1/4$,
- и отнимем первое равенство,
- получим ложное неравенство $0 \ge 3/4$.
- Это доказывает, что ядро пустое.

Игра с пустым ядром

$$\begin{array}{rl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, & \times(-1) \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 1, & \times(3/4) \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad \ge 1, & \times(1/4) \\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad \ge 1, & \times(1/4) \\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad \ge 1, & \times(1/4) \\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 \ge 1, & \times(1/4) \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. &
\end{array}$$

- Сложив второе неравенство, умноженное на $3/4$,
- с третьим, четвертым, пятым и шестым неравенствами, умноженными на $1/4$,
- и отнимем первое равенство,
- получим ложное неравенство $0 \ge 3/4$.
- Это доказывает, что ядро пустое.

Критерий непустоты ядра

Сбалансированным семейством весов называется набор неотрицательных чисел $y_S \geq 0$, $S \subseteq N$, такой, что

$$\sum_{S \subseteq N:\, i \in S} y_S = 1, \quad i \in N.$$

Теорема (Бондаревой — Шепли)

Кооперативная игра (N, v) имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного семейства весов $y_S \geq 0$, $S \subseteq N$, выполняется неравенство

$$\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \leq v(N).$$

Критерий непустоты ядра

Сбалансированным семейством весов называется набор неотрицательных чисел $y_S \geq 0$, $S \subseteq N$, такой, что

$$\sum_{S \subseteq N:\, i \in S} y_S = 1, \quad i \in N.$$

Теорема (Бондаревой — Шепли)

Кооперативная игра (N, v) имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного семейства весов $y_S \geq 0$, $S \subseteq N$, выполняется неравенство

$$\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \leq v(N).$$

Критерий непустоты ядра

Сбалансированным семейством весов называется набор неотрицательных чисел $y_S \geq 0$, $S \subseteq N$, такой, что

$$\sum_{S \subseteq N:\, i \in S} y_S = 1, \quad i \in N.$$

Теорема (Бондаревой — Шепли)

Кооперативная игра (N, v) имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного семейства весов $y_S \geq 0$, $S \subseteq N$, выполняется неравенство

$$\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \leq v(N).$$

Критерий непустоты ядра

Сбалансированным семейством весов называется набор неотрицательных чисел $y_S \geq 0$, $S \subseteq N$, такой, что

$$\sum_{S \subseteq N:\, i \in S} y_S = 1, \quad i \in N.$$

Теорема (Бондаревой — Шепли)

Кооперативная игра (N, v) имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного семейства весов $y_S \geq 0$, $S \subseteq N$, выполняется неравенство

$$\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \leq v(N).$$

Доказательство теоремы Бондаревой — Шепли

По определению, ядро в игре (N, v) непустое тогда и только тогда, когда $v(N)$ есть опт. значение ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i \in N} x_i \to \min,$$
$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

По теореме двойств. в ЛП ядро в игре (N, v) непустое тогда и только тогда, когда $v(N)$ есть опт. значение ЦФ в двойств. з-че ЛП

$$\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \to \max,$$
$$\sum_{S \subseteq N,\, i \in S} y_S = 1, \quad i \in N,$$
$$y_S \geq 0, \quad S \subseteq N.$$

Любое сбалансир. семейство весов y_S, $S \subseteq N$, является допуст. решением двойств. задачи, то $\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \leq v(N)$.

Доказательство теоремы Бондаревой — Шепли

По определению, ядро в игре (N, v) непустое тогда и только тогда, когда $v(N)$ есть опт. значение ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i \in N} x_i \to \min,$$
$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

По теореме двойств. в ЛП ядро в игре (N, v) непустое тогда и только тогда, когда $v(N)$ есть опт. значение ЦФ в двойств. з-че ЛП

$$\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \to \max,$$
$$\sum_{S \subseteq N,\, i \in S} y_S = 1, \quad i \in N,$$
$$y_S \geq 0, \quad S \subseteq N.$$

Любое сбалансир. семейство весов y_S, $S \subseteq N$, является допуст. решением двойств. задачи, то $\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \leq v(N)$.

Доказательство теоремы Бондаревой — Шепли

По определению, ядро в игре (N, v) непустое тогда и только тогда, когда $v(N)$ есть опт. значение ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i \in N} x_i \to \min,$$
$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

По теореме двойств. в ЛП ядро в игре (N, v) непустое тогда и только тогда, когда $v(N)$ есть опт. значение ЦФ в двойств. з-че ЛП

$$\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \to \max,$$
$$\sum_{S \subseteq N,\, i \in S} y_S = 1, \quad i \in N,$$
$$y_S \geq 0, \quad S \subseteq N.$$

Любое сбалансир. семейство весов y_S, $S \subseteq N$, является допуст. решением двойств. задачи, то $\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \leq v(N)$.

План лекции

1. Характеристическая функция и дележи
   - Ядро
   - Игры с пустым ядром
   - Приближенное ядро
2. Справедливые дележи
   - Значение игры по Шепли
   - Сердцевина
3. Кооперация для минимизации издержек
   - Ядро и значение Шепли
   - Размещение центров обслуживания

α-Ядро

Наличие игр с пустым ядром мотивирует след. определение.

Для $\alpha \geq 1$ определим *α-ядро* по правилу

$$C_\alpha(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i\in N} x_i \leq \alpha v(N),\ \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N \right\}.$$

Минимальное значение α, для которого α-ядро непустое, равно оптимальному значению ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i\in N} x_i \to \min,$$

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

Это минимальное значение будем обозначать через $\alpha(N,v)$. Если x^* есть оптимальное решение этой задачи ЛП, то вектор $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha(N,v)} x^*$ является дележем, для которого доля $\bar{x}(S)$ любой коалиции S не меньше $(100/\alpha(N,v))\%$ от их самостоятельного выигрыша $v(S)$.

α-Ядро

Наличие игр с пустым ядром мотивирует след. определение.

Для $\alpha \geq 1$ определим *α-ядро* по правилу

$$C_\alpha(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i\in N} x_i \leq \alpha v(N),\ \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N \right\}.$$

Минимальное значение α, для которого α-ядро непустое, равно оптимальному значению ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i\in N} x_i \to \min,$$

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

Это минимальное значение будем обозначать через $\alpha(N,v)$. Если x^* есть оптимальное решение этой задачи ЛП, то вектор $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha(N,v)} x^*$ является дележем, для которого доля $\bar{x}(S)$ любой коалиции S не меньше $(100/\alpha(N,v))\%$ от их самостоятельного выигрыша $v(S)$.

α-Ядро

Наличие игр с пустым ядром мотивирует след. определение.

Для $\alpha \geq 1$ определим *α-ядро* по правилу

$$C_\alpha(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i \leq \alpha v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N \right\}.$$

Минимальное значение α, для которого α-ядро непустое, равно оптимальному значению ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i \in N} x_i \to \min,$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

Это минимальное значение будем обозначать через $\alpha(N,v)$. Если x^* есть оптимальное решение этой задачи ЛП, то вектор $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha(N,v)} x^*$ является дележем, для которого доля $\bar{x}(S)$ любой коалиции S не меньше $(100/\alpha(N,v))\%$ от их самостоятельного выигрыша $v(S)$.

α-Ядро

Наличие игр с пустым ядром мотивирует след. определение.

Для $\alpha \geq 1$ определим *α-ядро* по правилу

$$C_\alpha(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i \leq \alpha v(N),\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N \right\}.$$

Минимальное значение α, для которого α-ядро непустое, равно оптимальному значению ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i \in N} x_i \to \min,$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

Это минимальное значение будем обозначать через $\alpha(N,v)$. Если x^* есть оптимальное решение этой задачи ЛП, то вектор $\bar{x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha(N,v)} x^*$ является дележем, для которого доля $\bar{x}(S)$ любой коалиции S не меньше $(100/\alpha(N,v))\%$ от их самостоятельного выигрыша $v(S)$.

α-Ядро

Наличие игр с пустым ядром мотивирует след. определение.

Для $\alpha \geq 1$ определим *α-ядро* по правилу

$$C_\alpha(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i\in N} x_i \leq \alpha v(N), \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N \right\}.$$

Минимальное значение α, для которого α-ядро непустое, равно оптимальному значению ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i\in N} x_i \to \min,$$

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

Это минимальное значение будем обозначать через $\alpha(N,v)$.

Если x^* есть оптимальное решение этой задачи ЛП, то вектор $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha(N,v)} x^*$ является дележем, для которого доля $\bar{x}(S)$ любой коалиции S не меньше $(100/\alpha(N,v))\%$ от их самостоятельного выигрыша $v(S)$.

α-Ядро

Наличие игр с пустым ядром мотивирует след. определение.

Для $\alpha \geq 1$ определим *α-ядро* по правилу

$$C_\alpha(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i \leq \alpha v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N \right\}.$$

Минимальное значение α, для которого α-ядро непустое, равно оптимальному значению ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i \in N} x_i \to \min,$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

Это минимальное значение будем обозначать через $\alpha(N, v)$.

Если x^* есть оптимальное решение этой задачи ЛП, то вектор $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha(N,v)} x^*$ является дележем, для которого доля $\bar{x}(S)$ любой коалиции S не меньше $(100/\alpha(N, v))\%$ от их самостоятельного выигрыша $v(S)$.

α-Ядро

Наличие игр с пустым ядром мотивирует след. определение.

Для $\alpha \geq 1$ определим *α-ядро* по правилу

$$C_\alpha(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i\in N} x_i \leq \alpha v(N), \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N \right\}.$$

Минимальное значение α, для которого α-ядро непустое, равно оптимальному значению ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i\in N} x_i \to \min,$$
$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

Это минимальное значение будем обозначать через $\alpha(N,v)$. Если x^* есть оптимальное решение этой задачи ЛП, то вектор $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha(N,v)} x^*$ является дележем, для которого доля $\bar{x}(S)$ любой коалиции S не меньше $(100/\alpha(N,v))\%$ от их самостоятельного выигрыша $v(S)$.

α-Ядро

Наличие игр с пустым ядром мотивирует след. определение.

Для $\alpha \geq 1$ определим *α-ядро* по правилу

$$C_\alpha(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i\in N} x_i \leq \alpha v(N),\ \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N \right\}.$$

Минимальное значение α, для которого α-ядро непустое, равно оптимальному значению ЦФ в задаче ЛП

$$\sum_{i\in N} x_i \to \min,$$

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

Это минимальное значение будем обозначать через $\alpha(N,v)$. Если x^* есть оптимальное решение этой задачи ЛП, то вектор $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha(N,v)} x^*$ является дележем, для которого доля $\bar{x}(S)$ любой коалиции S не меньше $(100/\alpha(N,v))\%$ от их самостоятельного выигрыша $v(S)$.

α-Ядро для игры «голосование пяти участников»

Показать описание игры

Мы найдем $\alpha(N, v)$, решив следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\to \min,\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1,\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1,\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &\ge 1,\\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &\ge 1,\\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &\ge 1,\\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &\ge 1,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0.
\end{aligned}$$

Ее оптимальное решение — $x^* = (3/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^T$ (докажите это, используя теоремы двойственности в ЛП). Следовательно, $\alpha(N, v) = 7/4$.

α-Ядро для игры «голосование пяти участников»

Мы найдем $\alpha(N, v)$, решив следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\to \min, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1, \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1, \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &\geq 1, \\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &\geq 1, \\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &\geq 1, \\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &\geq 1, \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Ее оптимальное решение — $x^* = (3/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^T$ (докажите это, используя теоремы двойственности в ЛП).

Следовательно, $\alpha(N, v) = 7/4$.

α-Ядро для игры «голосование пяти участников»

Мы найдем $\alpha(N, v)$, решив следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\to \min,\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1,\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 1,\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &\ge 1,\\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &\ge 1,\\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &\ge 1,\\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &\ge 1,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0.
\end{aligned}$$

Ее оптимальное решение — $x^* = (3/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^T$ (докажите это, используя теоремы двойственности в ЛП).
Следовательно, $\alpha(N, v) = 7/4$.

План лекции

Справедливые дележи

- Концепция ядра полезна как мера стабильности игры.
- Если ядро содержит много дележей, то все равно нужен механизм выбора наиболее предпочтительного дележа.
- Еще хуже, если ядро пустое.
- Поэтому было разработано несколько подходов определения самого справедливого дележа.
- Мы рассмотрим самый известный из таких подходов.
- В рамках этого подхода, выделяется одно распределение выигрышей игроков, называемое *значением игры*,
- к-рое можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром.
- К сожалению это значение игры может и не удовлетворять условию индивидуальной рациональности и поэтому не является дележом.
- Но чтобы не вводить новые понятия, мы позволим себе нестрогость называть дележами и такие распределения выигрышей игроков.

Справедливые дележи

- Концепция ядра полезна как мера стабильности игры.
- Если ядро содержит много дележей, то все равно нужен механизм выбора наиболее предпочтительного дележа.
- Еще хуже, если ядро пустое.
- Поэтому было разработано несколько подходов определения самого справедливого дележа.
- Мы рассмотрим самый известный из таких подходов.
- В рамках этого подхода, выделяется одно распределение выигрышей игроков, называемое *значением игры*,
- к-рое можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром.
- К сожалению это значение игры может и не удовлетворять условию индивидуальной рациональности и поэтому не является дележом.
- Но чтобы не вводить новые понятия, мы позволим себе нестрогость называть дележами и такие распределения выигрышей игроков.

Справедливые дележи

- Концепция ядра полезна как мера стабильности игры.
- Если ядро содержит много дележей, то все равно нужен механизм выбора наиболее предпочтительного дележа.
- Еще хуже, если ядро пустое.
- Поэтому было разработано несколько подходов определения самого справедливого дележа.
- Мы рассмотрим самый известный из таких подходов.
- В рамках этого подхода, выделяется одно распределение выигрышей игроков, называемое *значением игры*,
- к-рое можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром.
- К сожалению это значение игры может и не удовлетворять условию индивидуальной рациональности и поэтому не является дележом.
- Но чтобы не вводить новые понятия, мы позволим себе нестрогость называть дележами и такие распределения выигрышей игроков.

Справедливые дележи

- Концепция ядра полезна как мера стабильности игры.
- Если ядро содержит много дележей, то все равно нужен механизм выбора наиболее предпочтительного дележа.
- Еще хуже, если ядро пустое.
- Поэтому было разработано несколько подходов определения самого справедливого дележа.
- Мы рассмотрим самый известный из таких подходов.
- В рамках этого подхода, выделяется одно распределение выигрышей игроков, называемое *значением игры*,
- к-рое можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром.
- К сожалению это значение игры может и не удовлетворять условию индивидуальной рациональности и поэтому не является дележом.
- Но чтобы не вводить новые понятия, мы позволим себе нестрогость называть дележами и такие распределения выигрышей игроков.

Справедливые дележи

- Концепция ядра полезна как мера стабильности игры.
- Если ядро содержит много дележей, то все равно нужен механизм выбора наиболее предпочтительного дележа.
- Еще хуже, если ядро пустое.
- Поэтому было разработано несколько подходов определения самого справедливого дележа.
- Мы рассмотрим самый известный из таких подходов.
- В рамках этого подхода, выделяется одно распределение выигрышей игроков, называемое *значением игры*,
- к-рое можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром.
- К сожалению это значение игры может и не удовлетворять условию индивидуальной рациональности и поэтому не является дележом.
- Но чтобы не вводить новые понятия, мы позволим себе нестрогость называть дележами и такие распределения выигрышей игроков.

Справедливые дележи

- Концепция ядра полезна как мера стабильности игры.
- Если ядро содержит много дележей, то все равно нужен механизм выбора наиболее предпочтительного дележа.
- Еще хуже, если ядро пустое.
- Поэтому было разработано несколько подходов определения самого справедливого дележа.
- Мы рассмотрим самый известный из таких подходов.
- В рамках этого подхода, выделяется одно распределение выигрышей игроков, называемое *значением игры*,
- к-рое можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром.
- К сожалению это значение игры может и не удовлетворять условию индивидуальной рациональности и поэтому не является дележом.
- Но чтобы не вводить новые понятия, мы позволим себе нестрогость называть дележами и такие распределения выигрышей игроков.

Справедливые дележи

- Концепция ядра полезна как мера стабильности игры.
- Если ядро содержит много дележей, то все равно нужен механизм выбора наиболее предпочтительного дележа.
- Еще хуже, если ядро пустое.
- Поэтому было разработано несколько подходов определения самого справедливого дележа.
- Мы рассмотрим самый известный из таких подходов.
- В рамках этого подхода, выделяется одно распределение выигрышей игроков, называемое *значением игры*,
- к-рое можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром.
- К сожалению это значение игры может и не удовлетворять условию индивидуальной рациональности и поэтому не является дележом.
- Но чтобы не вводить новые понятия, мы позволим себе нестрогость называть дележами и такие распределения выигрышей игроков.

Справедливые дележи

- Концепция ядра полезна как мера стабильности игры.
- Если ядро содержит много дележей, то все равно нужен механизм выбора наиболее предпочтительного дележа.
- Еще хуже, если ядро пустое.
- Поэтому было разработано несколько подходов определения самого справедливого дележа.
- Мы рассмотрим самый известный из таких подходов.
- В рамках этого подхода, выделяется одно распределение выигрышей игроков, называемое *значением игры*,
- к-рое можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром.
- К сожалению это значение игры может и не удовлетворять условию индивидуальной рациональности и поэтому не является дележом.
- Но чтобы не вводить новые понятия, мы позволим себе нестрогость называть дележами и такие распределения выигрышей игроков.

Справедливые дележи

- Концепция ядра полезна как мера стабильности игры.
- Если ядро содержит много дележей, то все равно нужен механизм выбора наиболее предпочтительного дележа.
- Еще хуже, если ядро пустое.
- Поэтому было разработано несколько подходов определения самого справедливого дележа.
- Мы рассмотрим самый известный из таких подходов.
- В рамках этого подхода, выделяется одно распределение выигрышей игроков, называемое *значением игры*,
- к-рое можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром.
- К сожалению это значение игры может и не удовлетворять условию индивидуальной рациональности и поэтому не является дележом.
- Но чтобы не вводить новые понятия, мы позволим себе нестрогость называть дележами и такие распределения выигрышей игроков.

Значение Шепли

Определение

Значением (вектором) Шепли кооперативной игры (N, v) называется вектор

$$\phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_1(v), \dots, \phi_n(v))^T,$$

где
$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

- Доля $\phi_i(v)$ игрока i-й равна средней величине его вкладов во все коалиции:
- число $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ есть вклад игрока i при присоединении к коалиции $S \setminus \{i\}$,
- а весовой множитель $\dfrac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}$ можно интерпретировать как вероятность образования коалиции $S \setminus \{i\}$.

Значение Шепли

Определение

Значением (вектором) Шепли кооперативной игры (N, v) называется вектор

$$\phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_1(v), \dots, \phi_n(v))^T,$$

где $$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

- Доля $\phi_i(v)$ игрока i-й равна средней величине его вкладов во все коалиции:
- число $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ есть вклад игрока i при присоединении к коалиции $S \setminus \{i\}$,
- а весовой множитель $\dfrac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}$ можно интерпретировать как вероятность образования коалиции $S \setminus \{i\}$.

Значение Шепли

Определение

Значением (вектором) Шепли кооперативной игры (N, v) называется вектор

$$\phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_1(v), \dots, \phi_n(v))^T,$$

где
$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

- Доля $\phi_i(v)$ игрока i-й равна средней величине его вкладов во все коалиции:
- число $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ есть вклад игрока i при присоединении к коалиции $S \setminus \{i\}$,
- а весовой множитель $\dfrac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}$ можно интерпретировать как вероятность образования коалиции $S \setminus \{i\}$.

Значение Шепли

Определение

Значением (вектором) Шепли кооперативной игры (N, v) называется вектор

$$\phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_1(v), \ldots, \phi_n(v))^T,$$

где
$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

- Доля $\phi_i(v)$ игрока i-й равна средней величине его вкладов во все коалиции:
- число $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ есть вклад игрока i при присоединении к коалиции $S \setminus \{i\}$,
- а весовой множитель $\frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}$ можно интерпретировать как вероятность образования коалиции $S \setminus \{i\}$.

Значение Шепли

Определение

Значением (вектором) Шепли кооперативной игры (N, v) называется вектор

$$\phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_1(v), \ldots, \phi_n(v))^T,$$

где
$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

- Доля $\phi_i(v)$ игрока i-й равна средней величине его вкладов во все коалиции:
- число $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ есть вклад игрока i при присоединении к коалиции $S \setminus \{i\}$,
- а весовой множитель $\frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}$ можно интерпретировать как вероятность образования коалиции $S \setminus \{i\}$.

Значение Шепли

Определение

Значением (вектором) Шепли кооперативной игры (N, v) называется вектор

$$\phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_1(v), \dots, \phi_n(v))^T,$$

где
$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

- Доля $\phi_i(v)$ игрока i-й равна средней величине его вкладов во все коалиции:
- число $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ есть вклад игрока i при присоединении к коалиции $S \setminus \{i\}$,
- а весовой множитель $\dfrac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}$ можно интерпретировать как вероятность образования коалиции $S \setminus \{i\}$.

К простым играм

Аксиоматическое определение значения Шепли

Нетрудно показать, что значение Шепли — это единственный дележ, который

1. *симметричен*: $\phi_i(v) = \phi_j(v)$ для симметричных игроков i и j (два игрока симметричны, если присоединение любого из этих игроков к любой коалиции $S \subset N \setminus \{i, j\}$, одинаково усиливает эту коалицию: $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$);
2. *аддитивен*: для любых двух игр (N, v), (N, w) и любого $i \in N$ справедиво равенство $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$;
3. назначает нулевой выигрыш $\phi_i(v) = 0$ нулевым игрокам $i \in N$ (игрок i *нулевой*, если $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ для всех $S \in N \setminus \{i\}$).

Аксиоматическое определение значения Шепли

Нетрудно показать, что значение Шепли — это единственный дележ, который

1. *симметричен*: $\phi_i(v) = \phi_j(v)$ для симметричных игроков i и j (два игрока симметричны, если присоединение любого из этих игроков к любой коалиции $S \subset N \setminus \{i,j\}$, одинаково усиливает эту коалицию: $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$);
2. *аддитивен*: для любых двух игр (N, v), (N, w) и любого $i \in N$ справедиво равенство $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$;
3. назначает нулевой выигрыш $\phi_i(v) = 0$ нулевым игрокам $i \in N$ (игрок i *нулевой*, если $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ для всех $S \in N \setminus \{i\}$).

Аксиоматическое определение значения Шепли

Нетрудно показать, что значение Шепли — это единственный дележ, который

1. *симметричен*: $\phi_i(v) = \phi_j(v)$ для симметричных игроков i и j (два игрока симметричны, если присоединение любого из этих игроков к любой коалиции $S \subset N \setminus \{i, j\}$, одинаково усиливает эту коалицию: $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$);
2. *аддитивен*: для любых двух игр (N, v), (N, w) и любого $i \in N$ справедиво равенство $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$;
3. назначает нулевой выигрыш $\phi_i(v) = 0$ нулевым игрокам $i \in N$ (игрок i *нулевой*, если $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ для всех $S \in N \setminus \{i\}$).

Аксиоматическое определение значения Шепли

Нетрудно показать, что значение Шепли — это единственный дележ, который

1. *симметричен*: $\phi_i(v) = \phi_j(v)$ для симметричных игроков i и j (два игрока симметричны, если присоединение любого из этих игроков к любой коалиции $S \subset N \setminus \{i,j\}$, одинаково усиливает эту коалицию: $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$);
2. *аддитивен*: для любых двух игр (N, v), (N, w) и любого $i \in N$ справедиво равенство $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$;
3. назначает нулевой выигрыш $\phi_i(v) = 0$ нулевым игрокам $i \in N$ (игрок i *нулевой*, если $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ для всех $S \in N \setminus \{i\}$).

Аксиоматическое определение значения Шепли

Нетрудно показать, что значение Шепли — это единственный дележ, который

1. *симметричен*: $\phi_i(v) = \phi_j(v)$ для симметричных игроков i и j (два игрока симметричны, если присоединение любого из этих игроков к любой коалиции $S \subset N \setminus \{i,j\}$, одинаково усиливает эту коалицию: $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}))$;
2. *аддитивен*: для любых двух игр (N, v), (N, w) и любого $i \in N$ справедиво равенство $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$;
3. назначает нулевой выигрыш $\phi_i(v) = 0$ нулевым игрокам $i \in N$ (игрок i *нулевой*, если $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ для всех $S \in N \setminus \{i\}$).

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

▸ Показать описание

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перес-тановка	Вклады игроков		
	1	2	3
(1,2,3)			
(1,3,2)			
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$
$$v(S) = 0$$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)			
(1,3,2)			
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$
$$v(S) = 0$$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)			
(1,3,2)			
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$ для остальных S.

Перес-тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0		
(1,3,2)			
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$$v(1) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$
$$v(S) = 0$$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	
(1,3,2)			
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$$v(1,2) - v(1) = 0 - 0 = 0$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$
$$v(S) = 0$$

для остальных S.

Перес-тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)			
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$v(1,2,3) - v(1,2) = 2000 - 0 = 2000$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$ для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)			
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$
$$v(S) = 0$$

для остальных S.

Перес-тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0		
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$$v(1) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$v(1,3) = 1800,$

$v(2,3) = 1400,$

$v(1,2,3) = 2000,$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0		1800
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$v(1,3) - v(1) = 1800 - 0 = 1800$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$v(1,3) = 1800,$

$v(2,3) = 1400,$

$v(1,2,3) = 2000,$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$v(1,2,3) - v(1,3) = 2000 - 1800 = 200$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$v(1,3) = 1800,$

$v(2,3) = 1400,$

$v(1,2,3) = 2000,$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков		
	1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)			
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$v(1,3) = 1800,$

$v(2,3) = 1400,$

$v(1,2,3) = 2000,$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)		0	
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$v(2) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$
$v(S) = 0$
для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$$v(1,2) - v(2) = 0 - 0 = 0$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$v(1,3) = 1800,$

$v(2,3) = 1400,$

$v(1,2,3) = 2000,$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перес- тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$v(1,2,3) - v(1,2) = 2000 - 0 = 2000$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$v(1,3) = 1800,$

$v(2,3) = 1400,$

$v(1,2,3) = 2000,$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)			
(3,1,2)			
(3,2,1)			

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$v(1,3) = 1800,$

$v(2,3) = 1400,$

$v(1,2,3) = 2000,$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)		0	
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$v(2) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$
$$v(S) = 0$$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)		0	1400
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$$v(2,3) - v(2) = 1400 - 0 = 1400$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$

$$v(2,3) = 1400,$$

$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)			
(3,2,1)			

$v(1,2,3) - v(2,3) = 2000 - 1400 = 600$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$
для остальных S.

Перес-тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)			
(3,2,1)			

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$
$$v(S) = 0$$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)			0
(3,2,1)			

$$v(3) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$v(1,3) = 1800,$

$v(2,3) = 1400,$

$v(1,2,3) = 2000,$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800		0
(3,2,1)			

$$v(1,3) - v(3) = 1800 - 0 = 1800$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800	200	0
(3,2,1)			

$v(1,2,3) - v(1,3) = 2000 - 1800 = 200$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$
для остальных S.

Перес-тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800	200	0
(3,2,1)			

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800	200	0
(3,2,1)			0

$$v(3) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перес-тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800	200	0
(3,2,1)		1400	0

$$v(2,3) - v(3) = 1400 - 0 = 1400$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перес-тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800	200	0
(3,2,1)	600	1400	0

$$v(1,2,3) - v(2,3) = 2000 - 1400 = 600$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$
$$v(S) = 0$$

для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800	200	0
(3,2,1)	600	1400	0
Вектор Шепли			

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перес-тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800	200	0
(3,2,1)	600	1400	0
Вектор Шепли	500		

$$(0+0+0+600+1800+600)/6 = 500$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$
$v(S) = 0$
для остальных S.

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800	200	0
(3,2,1)	600	1400	0
Вектор Шепли	500	300	

$$(0+200+0+0+200+1400)/6 = 300$$

Значение Шепли для игры 3-фирм, производящих комплекты

Характ. функция:

$$v(1,3) = 1800,$$
$$v(2,3) = 1400,$$
$$v(1,2,3) = 2000,$$

$v(S) = 0$

для остальных S.

Перес-тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800	200	0
(3,2,1)	600	1400	0
Вектор Шепли	500	300	1200

$(2000 + 1800 + 2000 + 1400 + 0 + 0)/6 = 1200$

Простые кооперативные игры

Значение Шепли можно рассматривать как силу членов политических и экономических организаций.

Кооперативная игра (N, v) называется *простой*, если $v(S)$ равно 0 или 1 для всех коалиций $S \subseteq N$.

Примеры простых игр:

- (*голосование простым большинством*)
$$v(S) = 1, \text{ если } |S| > n/2, \text{ иначе } v(S) = 0;$$
- (*голосование консенсусом*)
$$v(N) = 1,\ v(S) = 0 \text{ для всех } S \subset N;$$
- (*взвешенное голосование*) для заданных весовых множителей w_i $(i \in N)$ и квоты q
$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i > q, \\ 0, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i \le q; \end{cases}$$
- (*диктаторская игра*) $v(S) = 1$, если $1 \in S$, иначе $v(S) = 0$.

Простые кооперативные игры

Значение Шепли можно рассматривать как силу членов политических и экономических организаций.

Кооперативная игра (N, v) называется *простой*, если $v(S)$ равно 0 или 1 для всех коалиций $S \subseteq N$.

Примеры простых игр:

- (*голосование простым большинством*)
  $$v(S) = 1, \text{ если } |S| > n/2, \text{ иначе } v(S) = 0;$$
- (*голосование консенсусом*)
  $$v(N) = 1,\ v(S) = 0 \text{ для всех } S \subset N;$$
- (*взвешенное голосование*) для заданных весовых множителей w_i $(i \in N)$ и квоты q
  $$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i > q, \\ 0, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i \le q; \end{cases}$$
- (*диктаторская игра*) $v(S) = 1$, если $1 \in S$, иначе $v(S) = 0$.

Простые кооперативные игры

Значение Шепли можно рассматривать как силу членов политических и экономических организаций.

Кооперативная игра (N, v) называется *простой*, если $v(S)$ равно 0 или 1 для всех коалиций $S \subseteq N$.

Примеры простых игр:

- (*голосование простым большинством*)
$$v(S) = 1, \text{ если } |S| > n/2, \text{ иначе } v(S) = 0;$$
- (*голосование консенсусом*)
$$v(N) = 1,\ v(S) = 0 \text{ для всех } S \subset N;$$
- (*взвешенное голосование*) для заданных весовых множителей w_i $(i \in N)$ и квоты q
$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i > q, \\ 0, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i \le q; \end{cases}$$
- (*диктаторская игра*) $v(S) = 1$, если $1 \in S$, иначе $v(S) = 0$.

Простые кооперативные игры

Значение Шепли можно рассматривать как силу членов политических и экономических организаций.

Кооперативная игра (N, v) называется *простой*, если $v(S)$ равно 0 или 1 для всех коалиций $S \subseteq N$.

Примеры простых игр:

- *(голосование простым большинством)*
  $$v(S) = 1, \text{ если } |S| > n/2, \text{ иначе } v(S) = 0;$$
- *(голосование консенсусом)*
  $$v(N) = 1,\ v(S) = 0 \text{ для всех } S \subset N;$$
- *(взвешенное голосование)* для заданных весовых множителей w_i $(i \in N)$ и квоты q
  $$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i > q, \\ 0, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i \le q; \end{cases}$$
- *(диктаторская игра)* $v(S) = 1$, если $1 \in S$, иначе $v(S) = 0$.

Простые кооперативные игры

Значение Шепли можно рассматривать как силу членов политических и экономических организаций.

Кооперативная игра (N, v) называется *простой*, если $v(S)$ равно 0 или 1 для всех коалиций $S \subseteq N$.

Примеры простых игр:

- (*голосование простым большинством*)
  $$v(S) = 1, \text{ если } |S| > n/2, \text{ иначе } v(S) = 0;$$
- (*голосование консенсусом*)
  $$v(N) = 1,\ v(S) = 0 \text{ для всех } S \subset N;$$
- (*взвешенное голосование*) для заданных весовых множителей w_i $(i \in N)$ и квоты q
  $$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i > q, \\ 0, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i \le q; \end{cases}$$
- (*диктаторская игра*) $v(S) = 1$, если $1 \in S$, иначе $v(S) = 0$.

Простые кооперативные игры

Значение Шепли можно рассматривать как силу членов политических и экономических организаций.

Кооперативная игра (N, v) называется *простой*, если $v(S)$ равно 0 или 1 для всех коалиций $S \subseteq N$.

Примеры простых игр:

- (*голосование простым большинством*)
  $$v(S) = 1, \text{ если } |S| > n/2, \text{ иначе } v(S) = 0;$$
- (*голосование консенсусом*)
  $$v(N) = 1,\ v(S) = 0 \text{ для всех } S \subset N;$$
- (*взвешенное голосование*) для заданных весовых множителей w_i $(i \in N)$ и квоты q
  $$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i > q, \\ 0, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i \le q; \end{cases}$$
- (*диктаторская игра*) $v(S) = 1$, если $1 \in S$, иначе $v(S) = 0$.

Простые кооперативные игры

Значение Шепли можно рассматривать как силу членов политических и экономических организаций.

Кооперативная игра (N, v) называется *простой*, если $v(S)$ равно 0 или 1 для всех коалиций $S \subseteq N$.

Примеры простых игр:

- (*голосование простым большинством*)
  $$v(S) = 1, \text{ если } |S| > n/2, \text{ иначе } v(S) = 0;$$
- (*голосование консенсусом*)
  $$v(N) = 1,\ v(S) = 0 \text{ для всех } S \subset N;$$
- (*взвешенное голосование*) для заданных весовых множителей w_i $(i \in N)$ и квоты q
  $$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i > q, \\ 0, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i \le q; \end{cases}$$
- (*диктаторская игра*) $v(S) = 1$, если $1 \in S$, иначе $v(S) = 0$.

Значение Шепли для простых игр

- Для простых игр формула для вычисления значения Шепли упрощается,
- поскольку разность $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ всегда равна 0 или 1.
- Точнее, эта разность равна 0, если $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, и 1, если $v(S) > v(S \setminus \{i\})$.
- Поэтому формулу для вычисления значения Шепли можно упростить следующим образом:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ v(S)=1,\ v(S \setminus i)=0}} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}.$$

- В этой формуле суммирование ведется по всем минимальным (по включению) «ненулевым» коалициям S ($v(S) = 1$), которым принадлежит игрок i.

Значение Шепли для простых игр

- Для простых игр формула для вычисления значения Шепли упрощается,
- поскольку разность $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ всегда равна 0 или 1.
- Точнее, эта разность равна 0, если $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, и 1, если $v(S) > v(S \setminus \{i\})$.
- Поэтому формулу для вычисления значения Шепли можно упростить следующим образом:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ v(S)=1,\ v(S \setminus i)=0}} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}.$$

- В этой формуле суммирование ведется по всем минимальным (по включению) «ненулевым» коалициям S ($v(S) = 1$), которым принадлежит игрок i.

Значение Шепли для простых игр

- Для простых игр ▸ формула для вычисления значения Шепли упрощается,
- поскольку разность $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ всегда равна 0 или 1.
- Точнее, эта разность равна 0, если $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, и 1, если $v(S) > v(S \setminus \{i\})$.
- Поэтому формулу для вычисления значения Шепли можно упростить следующим образом:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ v(S)=1,\ v(S \setminus i)=0}} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}.$$

- В этой формуле суммирование ведется по всем минимальным (по включению) «ненулевым» коалициям S ($v(S) = 1$), которым принадлежит игрок i.

Значение Шепли для простых игр

- Для простых игр ▸ формула для вычисления значения Шепли упрощается,
- поскольку разность $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ всегда равна 0 или 1.
- Точнее, эта разность равна 0, если $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, и 1, если $v(S) > v(S \setminus \{i\})$.
- Поэтому формулу для вычисления значения Шепли можно упростить следующим образом:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ v(S)=1,\ v(S \setminus i)=0}} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}.$$

- В этой формуле суммирование ведется по всем минимальным (по включению) «ненулевым» коалициям S ($v(S) = 1$), которым принадлежит игрок i.

Значение Шепли для простых игр

- Для простых игр формула для вычисления значения Шепли упрощается,
- поскольку разность $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ всегда равна 0 или 1.
- Точнее, эта разность равна 0, если $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, и 1, если $v(S) > v(S \setminus \{i\})$.
- Поэтому формулу для вычисления значения Шепли можно упростить следующим образом:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ v(S)=1,\ v(S \setminus i)=0}} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}.$$

- В этой формуле суммирование ведется по всем минимальным (по включению) «ненулевым» коалициям S ($v(S) = 1$), которым принадлежит игрок i.

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

Пример

- Совет Безопасности ООН состоит из 5 постоянных членов (которые могут наложить вето на любую резолюцию)
- и 10 непостоянных.
- Чтобы провести любое решение, нужно, чтобы за него проголосовало не менее 9 членов, включая всех постоянных членов.
- Нужно определить силу постоянных и непостоянных членов Совета Безопасности, вычислив значение Шепли.

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

Пример

- Совет Безопасности ООН состоит из 5 постоянных членов (которые могут наложить вето на любую резолюцию)
- и 10 непостоянных.
- Чтобы провести любое решение, нужно, чтобы за него проголосовало не менее 9 членов, включая всех постоянных членов.
- Нужно определить силу постоянных и непостоянных членов Совета Безопасности, вычислив значение Шепли.

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

Пример

- Совет Безопасности ООН состоит из 5 постоянных членов (которые могут наложить вето на любую резолюцию)
- и 10 непостоянных.
- Чтобы провести любое решение, нужно, чтобы за него проголосовало не менее 9 членов, включая всех постоянных членов.
- Нужно определить силу постоянных и непостоянных членов Совета Безопасности, вычислив значение Шепли.

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

Пример

- Совет Безопасности ООН состоит из 5 постоянных членов (которые могут наложить вето на любую резолюцию)
- и 10 непостоянных.
- Чтобы провести любое решение, нужно, чтобы за него проголосовало не менее 9 членов, включая всех постоянных членов.
- Нужно определить силу постоянных и непостоянных членов Совета Безопасности, вычислив значение Шепли.

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

- Определим цену любой коалиции, которая может принять решение, равной 1,
- а цену любой другой коалиции — равной 0.
- В данной кооперативной игре $n = 15$ игроков,
- где игроки $1, 2, 3, 4, 5$ — это постоянные члены Совета Безопасности,
- а остальные игроки — непостоянные члены.
- Характеристичекая функция данной игры:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{1,2,3,4,5\} \subset S \quad \text{и} \quad |S| \geq 9, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

- Определим цену любой коалиции, которая может принять решение, равной 1,
- а цену любой другой коалиции — равной 0.
- В данной кооперативной игре $n = 15$ игроков,
- где игроки $1, 2, 3, 4, 5$ — это постоянные члены Совета Безопасности,
- а остальные игроки — непостоянные члены.
- Характеристичекая функция данной игры:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset S \quad \text{и} \quad |S| \geq 9, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

- Определим цену любой коалиции, которая может принять решение, равной 1,
- а цену любой другой коалиции — равной 0.
- В данной кооперативной игре $n = 15$ игроков,
- где игроки $1, 2, 3, 4, 5$ — это постоянные члены Совета Безопасности,
- а остальные игроки — непостоянные члены.
- Характеристичекая функция данной игры:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{1,2,3,4,5\} \subset S \quad \text{и} \quad |S| \geq 9, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

- Определим цену любой коалиции, которая может принять решение, равной 1,
- а цену любой другой коалиции — равной 0.
- В данной кооперативной игре $n = 15$ игроков,
- где игроки $1, 2, 3, 4, 5$ — это постоянные члены Совета Безопасности,
- а остальные игроки — непостоянные члены.
- Характеристичекая функция данной игры:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset S \quad \text{и} \quad |S| \geq 9, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

- Определим цену любой коалиции, которая может принять решение, равной 1,
- а цену любой другой коалиции — равной 0.
- В данной кооперативной игре $n = 15$ игроков,
- где игроки $1, 2, 3, 4, 5$ — это постоянные члены Совета Безопасности,
- а остальные игроки — непостоянные члены.
- Характеристичекая функция данной игры:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset S \quad \text{и} \quad |S| \geq 9, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

- Определим цену любой коалиции, которая может принять решение, равной 1,
- а цену любой другой коалиции — равной 0.
- В данной кооперативной игре $n = 15$ игроков,
- где игроки $1, 2, 3, 4, 5$ — это постоянные члены Совета Безопасности,
- а остальные игроки — непостоянные члены.
- Характеристичекая функция данной игры:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{1,2,3,4,5\} \subset S \quad \text{и} \quad |S| \geq 9, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

- Минимальную коалицию S, которая может принять решение, можно представить в виде
$$S = \{1,2,3,4,5\} \cup T, \quad \text{где } T \subseteq \{6,\dots,15\},\ |T| = 4.$$
- Поскольку таких минимальных коалиций, которые включают игрока $i \in \{6,\dots,15\}$, имеется $C_3^9 = \dfrac{9!}{3!\,6!}$,
- то сила любого непостоянного члена Совета Безопасности ($i = 6,\dots,15$) равна
$$\phi_i(v) = \frac{9!}{3!\,6!} \cdot \frac{(9-1)!\,(15-9)!}{15!} = \frac{4}{15 \cdot 13 \cdot 11} \approx 0.001865.$$
- Силу постоянных членов Совета Безопасности ($i = 1,\dots,5$) найдем по формуле:
$$\phi_i(v) = \left(1 - \sum_{j=6}^{15} \phi_j(v)\right)/5 \approx (1 - 10 \cdot 0.001865)/5 = 0.19627.$$

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

- Минимальную коалицию S, которая может принять решение, можно представить в виде
$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup T, \quad \text{где } T \subseteq \{6, \ldots, 15\}, \ |T| = 4.$$
- Поскольку таких минимальных коалиций, которые включают игрока $i \in \{6, \ldots, 15\}$, имеется $C_3^9 = \frac{9!}{3!\,6!}$,
- то сила любого непостоянного члена Совета Безопасности ($i = 6, \ldots, 15$) равна
$$\phi_i(v) = \frac{9!}{3!\,6!} \cdot \frac{(9-1)!\,(15-9)!}{15!} = \frac{4}{15 \cdot 13 \cdot 11} \approx 0.001865.$$
- Силу постоянных членов Совета Безопасности ($i = 1, \ldots, 5$) найдем по формуле:
$$\phi_i(v) = \left(1 - \sum_{j=6}^{15} \phi_j(v)\right)/5 \approx (1 - 10 \cdot 0.001865)/5 = 0.19627.$$

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

- Минимальную коалицию S, которая может принять решение, можно представить в виде
$$S = \{1,2,3,4,5\} \cup T, \quad \text{где } T \subseteq \{6,\dots,15\},\ |T| = 4.$$
- Поскольку таких минимальных коалиций, которые включают игрока $i \in \{6,\dots,15\}$, имеется $C_3^9 = \frac{9!}{3!\,6!}$,
- то сила любого непостоянного члена Совета Безопасности ($i = 6,\dots,15$) равна
$$\phi_i(v) = \frac{9!}{3!\,6!} \cdot \frac{(9-1)!\,(15-9)!}{15!} = \frac{4}{15 \cdot 13 \cdot 11} \approx 0.001865.$$
- Силу постоянных членов Совета Безопасности ($i = 1,\dots,5$) найдем по формуле:
$$\phi_i(v) = \left(1 - \sum_{j=6}^{15} \phi_j(v)\right)/5 \approx (1-10\cdot 0.001865)/5 = 0.19627.$$

«Сила» членов Совета Безопасности ООН

- Минимальную коалицию S, которая может принять решение, можно представить в виде
$$S = \{1,2,3,4,5\} \cup T, \quad \text{где } T \subseteq \{6,\dots,15\},\ |T| = 4.$$
- Поскольку таких минимальных коалиций, которые включают игрока $i \in \{6,\dots,15\}$, имеется $C_3^9 = \dfrac{9!}{3!\,6!}$,
- то сила любого непостоянного члена Совета Безопасности ($i = 6,\dots,15$) равна
$$\phi_i(v) = \frac{9!}{3!\,6!} \cdot \frac{(9-1)!\,(15-9)!}{15!} = \frac{4}{15 \cdot 13 \cdot 11} \approx 0.001865.$$
- Силу постоянных членов Совета Безопасности ($i = 1,\dots,5$) найдем по формуле:
$$\phi_i(v) = \left(1 - \sum_{j=6}^{15} \phi_j(v)\right)/5 \approx (1 - 10 \cdot 0.001865)/5 = 0.19627.$$

План лекции

1. Характеристическая функция и дележи
   - Ядро
   - Игры с пустым ядром
   - Приближенное ядро
2. Справедливые дележи
   - Значение игры по Шепли
   - Сердцевина
3. Кооперация для минимизации издержек
   - Ядро и значение Шепли
   - Размещение центров обслуживания

Недостатки «дележа» Шепли

- Значение Шепли в общем случае не удовлетворяет условию индивидуальной рациональности и потому не является даже дележом.
- Кроме того, если это возможно, то хотелось бы, чтобы «справедливый» дележ был стабильным (принадлежал ядру).
- Иная интересная концепция для определения «справедливого» дележа предложена Д. Шмайдлером (D. Schmeidler).
- Основная идея здесь состоит в том, чтобы получить дележ, который вызывает наименьшую неудовлетворенность среди всех коалиций.
- Такой дележ называют *сердцевиной* (*nucleolus*).

Недостатки «дележа» Шепли

- Значение Шепли в общем случае не удовлетворяет условию индивидуальной рациональности и потому не является даже дележом.
- Кроме того, если это возможно, то хотелось бы, чтобы «справедливый» дележ был стабильным (принадлежал ядру).
- Иная интересная концепция для определения «справедливого» дележа предложена Д. Шмайдлером (D. Schmeidler).
- Основная идея здесь состоит в том, чтобы получить дележ, который вызывает наименьшую неудовлетворенность среди всех коалиций.
- Такой дележ называют *сердцевиной* (*nucleolus*).

Недостатки «дележа» Шепли

- Значение Шепли в общем случае не удовлетворяет условию индивидуальной рациональности и потому не является даже дележом.
- Кроме того, если это возможно, то хотелось бы, чтобы «справедливый» дележ был стабильным (принадлежал ядру).
- Иная интересная концепция для определения «справедливого» дележа предложена Д. Шмайдлером (D. Schmeidler).
- Основная идея здесь состоит в том, чтобы получить дележ, который вызывает наименьшую неудовлетворенность среди всех коалиций.
- Такой дележ называют *сердцевиной* (*nucleolus*).

Недостатки «дележа» Шепли

- Значение Шепли в общем случае не удовлетворяет условию индивидуальной рациональности и потому не является даже дележом.
- Кроме того, если это возможно, то хотелось бы, чтобы «справедливый» дележ был стабильным (принадлежал ядру).
- Иная интересная концепция для определения «справедливого» дележа предложена Д. Шмайдлером (D. Schmeidler).
- Основная идея здесь состоит в том, чтобы получить дележ, который вызывает наименьшую неудовлетворенность среди всех коалиций.
- Такой дележ называют *сердцевиной* (*nucleolus*).

Недостатки «дележа» Шепли

- Значение Шепли в общем случае не удовлетворяет условию индивидуальной рациональности и потому не является даже дележом.
- Кроме того, если это возможно, то хотелось бы, чтобы «справедливый» дележ был стабильным (принадлежал ядру).
- Иная интересная концепция для определения «справедливого» дележа предложена Д. Шмайдлером (D. Schmeidler).
- Основная идея здесь состоит в том, чтобы получить дележ, который вызывает наименьшую неудовлетворенность среди всех коалиций.
- Такой дележ называют *сердцевиной* (*nucleolus*).

Сердцевина

- Рассмотрим кооперативную игру (N, v) и дележ x.
- *Дефицит* коалиции $S \subset N$ определяется как разность
$$d(x, S) \stackrel{\text{def}}{=} v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$
- между тем, что коалиция может получить действуя самостоятельно, и тем, что получат члены коалиции, если реализуется дележ x.
- Если дележ x принадлежит ядру, то дефициты всех коалиций неположительны (являются излишками).
- *Сердцевина* — это такой дележ, когда нельзя уменьшить дефицит ни одной коалиции,
- не сделав так, что дефицит какой-нибудь другой коалиции станет больше дефицита той коалиции, дефицит которой мы уменьшаем.

Сердцевина

- Рассмотрим кооперативную игру (N, v) и дележ x.
- *Дефицит* коалиции $S \subset N$ определяется как разность
$$d(x,S) \stackrel{\text{def}}{=} v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$
- между тем, что коалиция может получить действуя самостоятельно, и тем, что получат члены коалиции, если реализуется дележ x.
- Если дележ x принадлежит ядру, то дефициты всех коалиций неположительны (являются излишками).
- *Сердцевина* — это такой дележ, когда нельзя уменьшить дефицит ни одной коалиции,
- не сделав так, что дефицит какой-нибудь другой коалиции станет больше дефицита той коалиции, дефицит которой мы уменьшаем.

Сердцевина

- Рассмотрим кооперативную игру (N, v) и дележ x.
- *Дефицит* коалиции $S \subset N$ определяется как разность
$$d(x,S) \stackrel{\text{def}}{=} v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$
- между тем, что коалиция может получить действуя самостоятельно, и тем, что получат члены коалиции, если реализуется дележ x.
- Если дележ x принадлежит ядру, то дефициты всех коалиций неположительны (являются излишками).
- *Сердцевина* — это такой дележ, когда нельзя уменьшить дефицит ни одной коалиции,
- не сделав так, что дефицит какой-нибудь другой коалиции станет больше дефицита той коалиции, дефицит которой мы уменьшаем.

Сердцевина

- Рассмотрим кооперативную игру (N, v) и дележ x.
- *Дефицит* коалиции $S \subset N$ определяется как разность
$$d(x, S) \stackrel{\text{def}}{=} v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$
- между тем, что коалиция может получить действуя самостоятельно, и тем, что получат члены коалиции, если реализуется дележ x.
- Если дележ x принадлежит ядру, то дефициты всех коалиций неположительны (являются излишками).
- *Сердцевина* — это такой дележ, когда нельзя уменьшить дефицит ни одной коалиции,
- не сделав так, что дефицит какой-нибудь другой коалиции станет больше дефицита той коалиции, дефицит которой мы уменьшаем.

Сердцевина

- Рассмотрим кооперативную игру (N, v) и дележ x.
- *Дефицит* коалиции $S \subset N$ определяется как разность
$$d(x, S) \stackrel{\text{def}}{=} v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$
- между тем, что коалиция может получить действуя самостоятельно, и тем, что получат члены коалиции, если реализуется дележ x.
- Если дележ x принадлежит ядру, то дефициты всех коалиций неположительны (являются излишками).
- *Сердцевина* — это такой дележ, когда нельзя уменьшить дефицит ни одной коалиции,
- не сделав так, что дефицит какой-нибудь другой коалиции станет больше дефицита той коалиции, дефицит которой мы уменьшаем.

Сердцевина

- Рассмотрим кооперативную игру (N, v) и дележ x.
- *Дефицит* коалиции $S \subset N$ определяется как разность
$$d(x, S) \stackrel{\text{def}}{=} v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$
- между тем, что коалиция может получить действуя самостоятельно, и тем, что получат члены коалиции, если реализуется дележ x.
- Если дележ x принадлежит ядру, то дефициты всех коалиций неположительны (являются излишками).
- *Сердцевина* — это такой дележ, когда нельзя уменьшить дефицит ни одной коалиции,
- не сделав так, что дефицит какой-нибудь другой коалиции станет больше дефицита той коалиции, дефицит которой мы уменьшаем.

Поиск сердцевины

- Согласно принципу, когда тот, кто кричит громче, обслуживается первым,
- мы сначала должны рассмотреть коалицию $S \subset N$ с наибольшим дефицитом $d(x, S)$
- и, если это возможно, предложить новый дележ x' с меньшим дефицитом $d(x', S)$ для коалиции S.
- Затем рассматривается коалиция S' с максимальным дефицитом $d(x', S')$ с целью уменьшить ее дефицит.
- И так продолжается до тех пор, пока не будет получен такой дележ $\bar{x}$, для которого мы больше не можем уменьшить максимальный дефицит.

Поиск сердцевины

- Согласно принципу, когда тот, кто кричит громче, обслуживается первым,
- мы сначала должны рассмотреть коалицию $S \subset N$ с наибольшим дефицитом $d(x, S)$
- и, если это возможно, предложить новый дележ x' с меньшим дефицитом $d(x', S)$ для коалиции S.
- Затем рассматривается коалиция S' с максимальным дефицитом $d(x', S')$ с целью уменьшить ее дефицит.
- И так продолжается до тех пор, пока не будет получен такой дележ $\bar{x}$, для которого мы больше не можем уменьшить максимальный дефицит.

Поиск сердцевины

- Согласно принципу, когда тот, кто кричит громче, обслуживается первым,
- мы сначала должны рассмотреть коалицию $S \subset N$ с наибольшим дефицитом $d(x, S)$
- и, если это возможно, предложить новый дележ x' с меньшим дефицитом $d(x', S)$ для коалиции S.
- Затем рассматривается коалиция S' с максимальным дефицитом $d(x', S')$ с целью уменьшить ее дефицит.
- И так продолжается до тех пор, пока не будет получен такой дележ $\bar{x}$, для которого мы больше не можем уменьшить максимальный дефицит.

Поиск сердцевины

- Согласно принципу, когда тот, кто кричит громче, обслуживается первым,
- мы сначала должны рассмотреть коалицию $S \subset N$ с наибольшим дефицитом $d(x, S)$
- и, если это возможно, предложить новый дележ x' с меньшим дефицитом $d(x', S)$ для коалиции S.
- Затем рассматривается коалиция S' с максимальным дефицитом $d(x', S')$ с целью уменьшить ее дефицит.
- И так продолжается до тех пор, пока не будет получен такой дележ $\bar{x}$, для которого мы больше не можем уменьшить максимальный дефицит.

Поиск сердцевины

- Согласно принципу, когда тот, кто кричит громче, обслуживается первым,
- мы сначала должны рассмотреть коалицию $S \subset N$ с наибольшим дефицитом $d(x, S)$
- и, если это возможно, предложить новый дележ x' с меньшим дефицитом $d(x', S)$ для коалиции S.
- Затем рассматривается коалиция S' с максимальным дефицитом $d(x', S')$ с целью уменьшить ее дефицит.
- И так продолжается до тех пор, пока не будет получен такой дележ $\bar{x}$, для которого мы больше не можем уменьшить максимальный дефицит.

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i\in N\setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1,2,3\}.$$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = v(1,2) = 6$,
$v(1,3) = 16$, $v(2,3) = 26$, $v(1,2,3) = 36$.

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i\in N\setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1,2,3\}.$$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = v(1,2) = 6$,
$v(1,3) = 16$, $v(2,3) = 26$, $v(1,2,3) = 36$.

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна своим трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1, 2, 3\}.$$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = v(1,2) = 6$,

$v(1,3) = 16$, $v(2,3) = 26$, $v(1,2,3) = 36$.

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1,2,3\}.$$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = v(1,2) = 6$,

$v(1,3) = 16$, $v(2,3) = 26$, $v(1,2,3) = 36$.

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1,2,3\}.$$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = v(1,2) = 6$,

$v(1,3) = 16$, $v(2,3) = 26$, $v(1,2,3) = 36$.

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1, 2, 3\}.$$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = v(1,2) = 6$,

$v(1,3) = 16$, $v(2,3) = 26$, $v(1,2,3) = 36$.

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i\in N\setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1,2,3\}.$$

$$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(2) = 0,\ v(3) = v(1,2) = 6,$$

$$v(1,3) = 16,\ v(2,3) = 26,\ v(1,2,3) = 36.$$

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1, 2, 3\}.$$

$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(2) = 0,\ v(3) = v(1,2) = 6,$

$v(1,3) = 16,\ v(2,3) = 26,\ v(1,2,3) = 36.$

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1, 2, 3\}.$$

$v(\emptyset) = 0$, $v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = v(1,2) = 6$,
$v(1,3) = 16$, $v(2,3) = 26$, $v(1,2,3) = 36$.

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна своим трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1, 2, 3\}.$$

$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(2) = 0,\ v(3) = v(1,2) = 6,$

$v(1,3) = 16,\ v(2,3) = 26,\ v(1,2,3) = 36.$

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i\in N\setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1,2,3\}.$$

$$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(2) = 0,\ v(3) = v(1,2) = 6,$$

$$v(1,3) = 16,\ v(2,3) = 26,\ v(1,2,3) = 36.$$

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1, 2, 3\}.$$

$$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(2) = 0,\ v(3) = v(1, 2) = 6,$$

$$v(1, 3) = 16,\ v(2, 3) = 26,\ v(1, 2, 3) = 36.$$

Пример вычисления сердцевины

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.
- Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?

Характеристическая функция определяется по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1, 2, 3\}.$$

$$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(2) = 0,\ v(3) = v(1,2) = 6,$$
$$v(1,3) = 16,\ v(2,3) = 26,\ v(1,2,3) = 36.$$

Пример вычисления сердцевины

$$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(2) = 0,\ v(3) = v(1,2) = 6,$$
$$v(1,3) = 16,\ v(2,3) = 26,\ v(1,2,3) = 36.$$

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
{1}	0	$-x_1$			
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3			
{1,2}	6	6-x_1-x_2			
{1,3}	16	16-x_1-x_3			
{2,3}	26	26-x_2-x_3			

Пример вычисления сердцевины

$$v(\emptyset)=0,\ v(1)=v(2)=0,\ v(3)=v(1,2)=6,$$
$$v(1,3)=16,\ v(2,3)=26,\ v(1,2,3)=36.$$

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
$\{1\}$	0	$-x_1$			
$\{2\}$	0	$-x_2$	-12		
$\{3\}$	6	6-x_3			
$\{1,2\}$	6	6-x_1-x_2			
$\{1,3\}$	16	16-x_1-x_3			
$\{2,3\}$	26	26-x_2-x_3			

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
$\{1\}$	0	$-x_1$			
$\{2\}$	0	$-x_2$	-12		
$\{3\}$	6	6-x_3			
$\{1,2\}$	6	6-x_1-x_2			
$\{1,3\}$	16	16-x_1-x_3			
$\{2,3\}$	26	26-x_2-x_3			

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
$\{1\}$	0	$-x_1$			
$\{2\}$	0	$-x_2$	-12		
$\{3\}$	6	6-x_3			
$\{1,2\}$	6	6-x_1-x_2			
$\{1,3\}$	16	16-x_1-x_3			
$\{2,3\}$	26	26-x_2-x_3			

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)		
{1}	0	$-x_1$			
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3			
{1,2}	6	6-x_1-x_2			
{1,3}	16	16-x_1-x_3			
{2,3}	26	26-x_2-x_3			

$(6, 12, 18)$ — пропорциональный дележ:

доля каждого кредитора пропорциональна его заему.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)		
{1}	0	$-x_1$	-6		
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3	-12		
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12		
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8		
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4		

Вычисляем дефициты коалиций.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)		
{1}	0	$-x_1$	-6		
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3	-12		
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12		
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8		
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4		

Максимальный дефицит -4 у коалиция $\{2,3\}$.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)		
{1}	0	$-x_1$	-6		
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3	-12		
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12		
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8		
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4		

Мы можем уменьшить этот дефицит увеличивая $x_2 + x_3$ и уменьшая x_1 (чтобы сохранить равенство $x_1 + x_2 + x_3 = 36$) на некоторую величину δ_1.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)		
$\{1\}$	0	$-x_1$	-6		
$\{2\}$	0	$-x_2$	-12		
$\{3\}$	6	6-x_3	-12		
$\{1,2\}$	6	6-x_1-x_2	-12		
$\{1,3\}$	16	16-x_1-x_3	-8		
$\{2,3\}$	26	26-x_2-x_3	-4		

Мы можем уменьшить этот дефицит увеличивая $x_2 + x_3$ и уменьшая x_1 (чтобы сохранить равенство $x_1 + x_2 + x_3 = 36$) на некоторую величину δ_1.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)		
{1}	0	$-x_1$	-6		
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3	-12		
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12		
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8		
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4		

Мы можем уменьшить этот дефицит увеличивая $x_2 + x_3$ и уменьшая x_1 (чтобы сохранить равенство $x_1 + x_2 + x_3 = 36$) на некоторую величину δ_1.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)		
$\{1\}$	0	$-x_1$	-6		
$\{2\}$	0	$-x_2$	-12		
$\{3\}$	6	6-x_3	-12		
$\{1,2\}$	6	6-x_1-x_2	-12		
$\{1,3\}$	16	16-x_1-x_3	-8		
$\{2,3\}$	26	26-x_2-x_3	-4		

Уменьшение x_1 означает рост дефицитов коалиций $\{1\}$, $\{1,2\}$ и $\{1,3\}$. При $\delta_1 = 1$ дефициты коалиций $\{2,3\}$ и $\{1\}$ сравняются. Поэтому в нашем следующем дележе $x_1 = 5$.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)		
{1}	0	$-x_1$	-6		
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3	-12		
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12		
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8		
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4		

Уменьшение x_1 означает рост дефицитов коалиций $\{1\}$, $\{1,2\}$ и $\{1,3\}$. При $\delta_1 = 1$ дефициты коалиций $\{2,3\}$ и $\{1\}$ сравняются. Поэтому в нашем следующем дележе $x_1 = 5$.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5, ,)	
{1}	0	$-x_1$	-6		
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3	-12		
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12		
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8		
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4		

Уменьшение x_1 означает рост дефицитов коалиций $\{1\}$, $\{1,2\}$ и $\{1,3\}$. При $\delta_1 = 1$ дефициты коалиций $\{2,3\}$ и $\{1\}$ сравняются. Поэтому в нашем следующем дележе $x_1 = 5$.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5, ,)	
{1}	0	$-x_1$	-6		
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3	-12		
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12		
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8		
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4		

Определим x_2 и x_3 так, чтобы для нового дележа 2-й по величине дефицит был минимальным при выполнении условия $x_2 + x_3 = 36 - 5 = 31$. Этот 2-й по величине дефицит $d(x, \{1,3\}) = 16 - x_1 - x_3$ будет равен 8, если увеличить x_3 на 1 и не менять значение x_2.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5, ,)	
{1}	0	$-x_1$	-6		
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3	-12		
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12		
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8		
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4		

Определим x_2 и x_3 так, чтобы для нового дележа 2-й по величине дефицит был минимальным при выполнении условия $x_2 + x_3 = 36 - 5 = 31$. Этот 2-й по величине дефицит $d(x, \{1,3\}) = 16 - x_1 - x_3$ будет равен 8, если увеличить x_3 на 1 и не менять значение x_2.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	
{1}	0	$-x_1$	-6		
{2}	0	$-x_2$	-12		
{3}	6	6-x_3	-12		
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12		
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8		
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4		

Определим x_2 и x_3 так, чтобы для нового дележа 2-й по величине дефицит был минимальным при выполнении условия $x_2 + x_3 = 36 - 5 = 31$. Этот 2-й по величине дефицит $d(x,\{1,3\}) = 16 - x_1 - x_3$ будет равен 8, если увеличить x_3 на 1 и не менять значение x_2.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	
{3}	6	6-x_3	-12	-13	
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	

Вычисляем дефициты коалиций.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	
{3}	6	6-x_3	-12	-13	
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	

Из приведенных выше рассуждений должно быть ясно, что мы уже не сможем уменьшить неудовлетворенность коалиций $\{1\}$ и $\{2,3\}$.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	
{3}	6	6-x_3	-12	-13	
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	

Попытаемся уменьшить следующий по величине дефицит $(= 8)$ коалиции $\{1, 3\}$. Мы можем уменьшить этот дефицит увеличивая x_3 и уменьшая x_2 на некоторую величину δ_2. При $\delta_2 = 1.5$ дефициты коалиций $\{1, 3\}$ и $\{1, 2\}$ сравняются. Следовательно наш следующий дележ есть $(5, 10.5, 20.5)$.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	
{3}	6	6-x_3	-12	-13	
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	

Попытаемся уменьшить следующий по величине дефицит $(= 8)$ коалиции $\{1, 3\}$. Мы можем уменьшить этот дефицит увеличивая x_3 и уменьшая x_2 на некоторую величину δ_2. При $\delta_2 = 1.5$ дефициты коалиций $\{1, 3\}$ и $\{1, 2\}$ сравняются. Следовательно наш следующий дележ есть $(5, 10.5, 20.5)$.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	
{3}	6	6-x_3	-12	-13	
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	

Попытаемся уменьшить следующий по величине дефицит $(= 8)$ коалиции $\{1,3\}$. Мы можем уменьшить этот дефицит увеличивая x_3 и уменьшая x_2 на некоторую величину δ_2. При $\delta_2 = 1.5$ дефициты коалиций $\{1,3\}$ и $\{1,2\}$ сравняются. Следовательно наш следующий дележ есть $(5, 10.5, 20.5)$.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	(5,10.5,20.5)
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	
{3}	6	6-x_3	-12	-13	
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	

Попытаемся уменьшить следующий по величине дефицит $(= 8)$ коалиции $\{1,3\}$. Мы можем уменьшить этот дефицит увеличивая x_3 и уменьшая x_2 на некоторую величину δ_2. При $\delta_2 = 1.5$ дефициты коалиций $\{1,3\}$ и $\{1,2\}$ сравняются. Следовательно наш следующий дележ есть $(5, 10.5, 20.5)$.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	(5,10.5,20.5)
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	-5
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	-10.5
{3}	6	6-x_3	-12	-13	-14.5
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	-9.5
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	-9.5
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	-5

Вычисляем дефициты коалиций.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	(5,10.5,20.5)
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	-5
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	-10.5
{3}	6	6-x_3	-12	-13	-14.5
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	-9.5
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	-9.5
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	-5

Из предыдущих рассуждений должно быть ясно, что дальнейшее уменьшение какого-либо дефицита приведет к увеличению дефицита не меньшего за тот, который мы будем стараться уменьшить. Следовательно, дележ $(5, 10.5, 20.5)$ есть сердцевина рассматриваемой игры.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	(5,10.5,20.5)
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	-5
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	-10.5
{3}	6	6-x_3	-12	-13	-14.5
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	-9.5
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	-9.5
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	-5

Из предыдущих рассуждений должно быть ясно, что дальнейшее уменьшение какого-либо дефицита приведет к увеличению дефицита не меньшего за тот, который мы будем стараться уменьшить. Следовательно, дележ $(5, 10.5, 20.5)$ есть сердцевина рассматриваемой игры.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	(5,10.5,20.5)
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	-5
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	-10.5
{3}	6	6-x_3	-12	-13	-14.5
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	-9.5
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	-9.5
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	-5

Из предыдущих рассуждений должно быть ясно, что дальнейшее уменьшение какого-либо дефицита приведет к увеличению дефицита не меньшего за тот, который мы будем стараться уменьшить. Следовательно, дележ $(5, 10.5, 20.5)$ есть сердцевина рассматриваемой игры.

Пример вычисления сердцевины

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	(5,10.5,20.5)
$\{1\}$	0	$-x_1$	-6	-5	-5
$\{2\}$	0	$-x_2$	-12	-12	-10.5
$\{3\}$	6	$6\text{-}x_3$	-12	-13	-14.5
$\{1,2\}$	6	$6\text{-}x_1\text{-}x_2$	-12	-11	-9.5
$\{1,3\}$	16	$16\text{-}x_1\text{-}x_3$	-8	-8	-9.5
$\{2,3\}$	26	$26\text{-}x_2\text{-}x_3$	-4	-5	-5

Из предыдущих рассуждений должно быть ясно, что дальнейшее уменьшение какого-либо дефицита приведет к увеличению дефицита не меньшего за тот, который мы будем стараться уменьшить. Следовательно, дележ $(5, 10.5, 20.5)$ есть сердцевина рассматриваемой игры.

Сравнение сердцевины с пропорциональным дележем

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.

- $(6, 12, 18)$ — пропорциональный дележ;
- $(5, 10.5, 20.5)$ — сердцевина;
- $(6, 11, 19)^T$ — значение Шепли (проверьте это!).
- Сравнивая сердцевину с пропорциональным дележом, мы видим,
- что сердцевина увеличивает выплаты кредитору с максимальными потерями.
- Значение Шепли занимает промежуточное положение между пропорциональным дележом и сердцевиной.

Сравнение сердцевины с пропорциональным дележем

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.

- $(6, 12, 18)$ — пропорциональный дележ;
- $(5, 10.5, 20.5)$ — сердцевина;
- $(6, 11, 19)^T$ — значение Шепли (проверьте это!).
- Сравнивая сердцевину с пропорциональным дележом, мы видим,
- что сердцевина увеличивает выплаты кредитору с максимальными потерями.
- Значение Шепли занимает промежуточное положение между пропорциональным дележом и сердцевиной.

Сравнение сердцевины с пропорциональным дележем

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.

- $(6, 12, 18)$ — пропорциональный дележ;
- $(5, 10.5, 20.5)$ — сердцевина;
- $(6, 11, 19)^T$ — значение Шепли (проверьте это!).
- Сравнивая сердцевину с пропорциональным дележом, мы видим,
- что сердцевина увеличивает выплаты кредитору с максимальными потерями.
- Значение Шепли занимает промежуточное положение между пропорциональным дележом и сердцевиной.

Сравнение сердцевины с пропорциональным дележем

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.

- $(6, 12, 18)$ — пропорциональный дележ;
- $(5, 10.5, 20.5)$ — сердцевина;
- $(6, 11, 19)^T$ — значение Шепли (проверьте это!).
- Сравнивая сердцевину с пропорциональным дележом, мы видим,
- что сердцевина увеличивает выплаты кредитору с максимальными потерями.
- Значение Шепли занимает промежуточное положение между пропорциональным дележом и сердцевиной.

Сравнение сердцевины с пропорциональным дележем

- Обанкротившаяся малая фирма должна своим трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.

- $(6, 12, 18)$ — пропорциональный дележ;
- $(5, 10.5, 20.5)$ — сердцевина;
- $(6, 11, 19)^T$ — значение Шепли (проверьте это!).
- Сравнивая сердцевину с пропорциональным дележом, мы видим,
- что сердцевина увеличивает выплаты кредитору с максимальными потерями.
- Значение Шепли занимает промежуточное положение между пропорциональным дележом и сердцевиной.

Сравнение сердцевины с пропорциональным дележем

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.

- $(6, 12, 18)$ — пропорциональный дележ;
- $(5, 10.5, 20.5)$ — сердцевина;
- $(6, 11, 19)^T$ — значение Шепли (проверьте это!).
- Сравнивая сердцевину с пропорциональным дележом, мы видим,
- что сердцевина увеличивает выплаты кредитору с максимальными потерями.
- Значение Шепли занимает промежуточное положение между пропорциональным дележом и сердцевиной.

Сравнение сердцевины с пропорциональным дележем

- Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы:
  - кредитору 1 — $c_1 = \$10\,000$,
  - кредитору 2 — $c_2 = \$20\,000$,
  - кредитору 3 — $c_3 = \$30\,000$.
- Фирма имеет $C = \$36\,000$ для покрытия своих долгов.

- $(6, 12, 18)$ — пропорциональный дележ;
- $(5, 10.5, 20.5)$ — сердцевина;
- $(6, 11, 19)^T$ — значение Шепли (проверьте это!).
- Сравнивая сердцевину с пропорциональным дележом, мы видим,
- что сердцевина увеличивает выплаты кредитору с максимальными потерями.
- Значение Шепли занимает промежуточное положение между пропорциональным дележом и сердцевиной.

Формальное определение сердцевины

- Настало время дать строгое определения понятия «сердцевина».
- Для дележа x обозначим черех $D(x)$ вектор дефицитов, упорядоченных в порядке неубывания.
- В решенном примере для дележа $x = (6, 12, 18)^T$ мы имели $D(x) = (-4, -6, -8, -12, -12, -12)^T$.
- Будем сравнивать векторы $D(x)$ лексикографически.
- Говорят, что вектор $y \in \mathbb{R}^n$ *лексикографически не больше* вектора $z \in \mathbb{R}^n$, записываем $y \preceq_{\text{lex}} z$,
- если $x = y$ или для некоторого k $(1 \le k < n)$ справедливы условия: $y_i = z_i$ для $i = 1, \dots, k-1$ и $y_k < z_k$.

Определение

Дележ x называют сердцевиной игры (N, v), если для всех других дележей $x' \neq x$ справедливо неравенство $D(x) \preceq_{\text{lex}} D(x')$.

Формальное определение сердцевины

- Настало время дать строгое определения понятия «сердцевина».
- Для дележа x обозначим черех $D(x)$ вектор дефицитов, упорядоченных в порядке неубывания.
- В решенном примере для дележа $x = (6, 12, 18)^T$ мы имели $D(x) = (-4, -6, -8, -12, -12, -12)^T$.
- Будем сравнивать векторы $D(x)$ лексикографически.
- Говорят, что вектор $y \in \mathbb{R}^n$ *лексикографически не больше* вектора $z \in \mathbb{R}^n$, записываем $y \preceq_{\text{lex}} z$,
- если $x = y$ или для некоторого k $(1 \le k < n)$ справедливы условия: $y_i = z_i$ для $i = 1, \dots, k-1$ и $y_k < z_k$.

Определение

Дележ x называют сердцевиной игры (N, v), если для всех других дележей $x' \neq x$ справедливо неравенство $D(x) \preceq_{\text{lex}} D(x')$.

Формальное определение сердцевины

- Настало время дать строгое определения понятия «сердцевина».
- Для дележа x обозначим черех $D(x)$ вектор дефицитов, упорядоченных в порядке неубывания.
- В решенном примере для дележа $x = (6, 12, 18)^T$ мы имели $D(x) = (-4, -6, -8, -12, -12, -12)^T$.
- Будем сравнивать векторы $D(x)$ лексикографически.
- Говорят, что вектор $y \in \mathbb{R}^n$ *лексикографически не больше* вектора $z \in \mathbb{R}^n$, записываем $y \preceq_{\text{lex}} z$,
- если $x = y$ или для некоторого k $(1 \le k < n)$ справедливы условия: $y_i = z_i$ для $i = 1, \dots, k-1$ и $y_k < z_k$.

Определение

Дележ x называют сердцевиной игры (N, v), если для всех других дележей $x' \neq x$ справедливо неравенство $D(x) \preceq_{\text{lex}} D(x')$.

Формальное определение сердцевины

- Настало время дать строгое определения понятия «сердцевина».
- Для дележа x обозначим черех $D(x)$ вектор дефицитов, упорядоченных в порядке неубывания.
- В решенном примере для дележа $x = (6, 12, 18)^T$ мы имели $D(x) = (-4, -6, -8, -12, -12, -12)^T$.
- Будем сравнивать векторы $D(x)$ лексикографически.
- Говорят, что вектор $y \in \mathbb{R}^n$ *лексикографически не больше* вектора $z \in \mathbb{R}^n$, записываем $y \preceq_{\text{lex}} z$,
- если $x = y$ или для некоторого k $(1 \le k < n)$ справедливы условия: $y_i = z_i$ для $i = 1, \dots, k-1$ и $y_k < z_k$.

Определение

Дележ x называют сердцевиной игры (N, v), если для всех других дележей $x' \neq x$ справедливо неравенство $D(x) \preceq_{\text{lex}} D(x')$.

Формальное определение сердцевины

- Настало время дать строгое определения понятия «сердцевина».
- Для дележа x обозначим черех $D(x)$ вектор дефицитов, упорядоченных в порядке неубывания.
- В решенном примере для дележа $x = (6, 12, 18)^T$ мы имели $D(x) = (-4, -6, -8, -12, -12, -12)^T$.
- Будем сравнивать векторы $D(x)$ лексикографически.
- Говорят, что вектор $y \in \mathbb{R}^n$ *лексикографически не больше* вектора $z \in \mathbb{R}^n$, записываем $y \preceq_{\text{lex}} z$,
- если $x = y$ или для некоторого k $(1 \le k < n)$ справедливы условия: $y_i = z_i$ для $i = 1, \dots, k-1$ и $y_k < z_k$.

Определение

Дележ x называют сердцевиной игры (N, v), если для всех других дележей $x' \neq x$ справедливо неравенство $D(x) \preceq_{\text{lex}} D(x')$.

Формальное определение сердцевины

- Настало время дать строгое определения понятия «сердцевина».
- Для дележа x обозначим черех $D(x)$ вектор дефицитов, упорядоченных в порядке неубывания.
- В решенном примере для дележа $x = (6, 12, 18)^T$ мы имели $D(x) = (-4, -6, -8, -12, -12, -12)^T$.
- Будем сравнивать векторы $D(x)$ лексикографически.
- Говорят, что вектор $y \in \mathbb{R}^n$ *лексикографически не больше* вектора $z \in \mathbb{R}^n$, записываем $y \preceq_{\text{lex}} z$,
- если $x = y$ или для некоторого k $(1 \le k < n)$ справедливы условия: $y_i = z_i$ для $i = 1, \ldots, k-1$ и $y_k < z_k$.

Определение

Дележ x называют сердцевиной игры (N, v), если для всех других дележей $x' \neq x$ справедливо неравенство $D(x) \preceq_{\text{lex}} D(x')$.

Формальное определение сердцевины

- Настало время дать строгое определения понятия «сердцевина».
- Для дележа x обозначим черех $D(x)$ вектор дефицитов, упорядоченных в порядке неубывания.
- В решенном примере для дележа $x = (6, 12, 18)^T$ мы имели $D(x) = (-4, -6, -8, -12, -12, -12)^T$.
- Будем сравнивать векторы $D(x)$ лексикографически.
- Говорят, что вектор $y \in \mathbb{R}^n$ *лексикографически не больше* вектора $z \in \mathbb{R}^n$, записываем $y \preceq_{\text{lex}} z$,
- если $x = y$ или для некоторого k $(1 \le k < n)$ справедливы условия: $y_i = z_i$ для $i = 1, \ldots, k-1$ и $y_k < z_k$.

Определение

Дележ x называют сердцевиной игры (N, v), если для всех других дележей $x' \neq x$ справедливо неравенство $D(x) \preceq_{\text{lex}} D(x')$.

Существование сердцевины

Теорема

- *Сердцевина игры существует и единственна.*
- *Если ядро не пустое, то сердцевина принадлежит ядру.*

Существование сердцевины

Теорема

- *Сердцевина игры существует и единственна.*
- *Если ядро не пустое, то сердцевина принадлежит ядру.*

План лекции

1. Характеристическая функция и дележи
   - Ядро
   - Игры с пустым ядром
   - Приближенное ядро
2. Справедливые дележи
   - Значение игры по Шепли
   - Сердцевина
3. Кооперация для минимизации издержек
   - Ядро и значение Шепли
   - Размещение центров обслуживания

Кооперация для минимизации издержек

- До сих пор мы рассматривали кооп. игры, в к-рых целью игроков была максимизация выигрыша (прибыли).
- На практике ничуть не реже встречаются ситуации, когда игроки образуют коалиции с целью минимизировать свои издержки.
- Такая кооперативная игра представляется парой (N, c),
- где N есть множество игроков,
- а *характеристическая функция* $c : 2^N \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$c(\emptyset) = 0,$$

$$c(S \cup T) \le c(S) + c(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$

$$(\textit{субаддитивность}).$$

- Здесь $c(S)$ — это издержки коалиции S.
- Субаддитивность характ. функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, заплатят не больше того, что они платят, действуя порознь.

Кооперация для минимизации издержек

- До сих пор мы рассматривали кооп. игры, в к-рых целью игроков была максимизация выигрыша (прибыли).
- На практике ничуть не реже встречаются ситуации, когда игроки образуют коалиции с целью минимизировать свои издержки.
- Такая кооперативная игра представляется парой (N, c),
- где N есть множество игроков,
- а *характеристическая функция* $c : 2^N \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$c(\emptyset) = 0,$$

$$c(S \cup T) \le c(S) + c(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$
$$(\textit{субаддитивность}).$$

- Здесь $c(S)$ — это издержки коалиции S.
- Субаддитивность характ. функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, заплатят не больше того, что они платят, действуя порознь.

Кооперация для минимизации издержек

- До сих пор мы рассматривали кооп. игры, в к-рых целью игроков была максимизация выигрыша (прибыли).
- На практике ничуть не реже встречаются ситуации, когда игроки образуют коалиции с целью минимизировать свои издержки.
- Такая кооперативная игра представляется парой (N, c),
- где N есть множество игроков,
- а *характеристическая функция* $c : 2^N \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$c(\emptyset) = 0,$$

$$c(S \cup T) \le c(S) + c(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$

(*субаддитивность*).

- Здесь $c(S)$ — это издержки коалиции S.
- Субаддитивность характ. функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, заплатят не больше того, что они платят, действуя порознь.

Кооперация для минимизации издержек

- До сих пор мы рассматривали кооп. игры, в к-рых целью игроков была максимизация выигрыша (прибыли).
- На практике ничуть не реже встречаются ситуации, когда игроки образуют коалиции с целью минимизировать свои издержки.
- Такая кооперативная игра представляется парой (N, c),
- где N есть множество игроков,
- а *характеристическая функция* $c : 2^N \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$c(\emptyset) = 0,$$
$$c(S \cup T) \le c(S) + c(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$
$$(\textit{субаддитивность}).$$

- Здесь $c(S)$ — это издержки коалиции S.
- Субаддитивность характ. функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, заплатят не больше того, что они платят, действуя порознь.

Кооперация для минимизации издержек

- До сих пор мы рассматривали кооп. игры, в к-рых целью игроков была максимизация выигрыша (прибыли).
- На практике ничуть не реже встречаются ситуации, когда игроки образуют коалиции с целью минимизировать свои издержки.
- Такая кооперативная игра представляется парой (N, c),
- где N есть множество игроков,
- а *характеристическая функция* $c : 2^N \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$c(\emptyset) = 0,$$
$$c(S \cup T) \le c(S) + c(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$
$$(\textit{субаддитивность}).$$

- Здесь $c(S)$ — это издержки коалиции S.
- Субаддитивность характ. функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, заплатят не больше того, что они платят, действуя порознь.

Кооперация для минимизации издержек

- До сих пор мы рассматривали кооп. игры, в к-рых целью игроков была максимизация выигрыша (прибыли).
- На практике ничуть не реже встречаются ситуации, когда игроки образуют коалиции с целью минимизировать свои издержки.
- Такая кооперативная игра представляется парой (N, c),
- где N есть множество игроков,
- а *характеристическая функция* $c : 2^N \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$c(\emptyset) = 0,$$

$$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$

(*субаддитивность*).

- Здесь $c(S)$ — это издержки коалиции S.
- Субаддитивность характ. функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, заплатят не больше того, что они платят, действуя порознь.

Кооперация для минимизации издержек

- До сих пор мы рассматривали кооп. игры, в к-рых целью игроков была максимизация выигрыша (прибыли).
- На практике ничуть не реже встречаются ситуации, когда игроки образуют коалиции с целью минимизировать свои издержки.
- Такая кооперативная игра представляется парой (N, c),
- где N есть множество игроков,
- а *характеристическая функция* $c : 2^N \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$c(\emptyset) = 0,$$

$$c(S \cup T) \le c(S) + c(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$

(*субаддитивность*).

- Здесь $c(S)$ — это издержки коалиции S.
- Субаддитивность характ. функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, заплатят не больше того, что они платят, действуя порознь.

Кооперация для минимизации издержек

- До сих пор мы рассматривали кооп. игры, в к-рых целью игроков была максимизация выигрыша (прибыли).
- На практике ничуть не реже встречаются ситуации, когда игроки образуют коалиции с целью минимизировать свои издержки.
- Такая кооперативная игра представляется парой (N, c),
- где N есть множество игроков,
- а *характеристическая функция* $c : 2^N \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$c(\emptyset) = 0,$$

$$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T), \quad S, T \subset N, \ S \cap T = \emptyset$$

(*субаддитивность*).

- Здесь $c(S)$ — это издержки коалиции S.
- Субаддитивность характ. функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, заплатят не больше того, что они платят, действуя порознь.

Кооперация для минимизации издержек

- До сих пор мы рассматривали кооп. игры, в к-рых целью игроков была максимизация выигрыша (прибыли).
- На практике ничуть не реже встречаются ситуации, когда игроки образуют коалиции с целью минимизировать свои издержки.
- Такая кооперативная игра представляется парой (N, c),
- где N есть множество игроков,
- а *характеристическая функция* $c : 2^N \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$c(\emptyset) = 0,$$

$$c(S \cup T) \le c(S) + c(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset$$

$$(\textit{субаддитивность}).$$

- Здесь $c(S)$ — это издержки коалиции S.
- Субаддитивность характ. функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, заплатят не больше того, что они платят, действуя порознь.

Преобразование ф-ции издержек в ф-цию выигрышей

- Мы можем преобразовать функцию издержек c в функцию выигрышей $v : 2^N \to \mathbb{R}$ по правилу:
$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in S} c(i) - c(S), \quad S \subseteq N.$$
- Значение $v(S)$ — это превышение суммарных издержек отдельных членов коалиции S над издержками самой коалиции.
- Поэтому $v(S)$ можно также назвать *выигрышем* коалиции S.
- Заметим, что функция v является супераддитивной и $v(i) = 0$ для всех $i \in N$.
- Таким образом, кооперативная игра (N, c) с характеристической функцией издержек преобразовалась в кооперативную игру (N, v) с характеристической функцией выигрышей.

Преобразование ф-ции издержек в ф-цию выигрышей

- Мы можем преобразовать функцию издержек c в функцию выигрышей $v : 2^N \to \mathbb{R}$ по правилу:
$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in S} c(i) - c(S), \quad S \subseteq N.$$
- Значение $v(S)$ — это превышение суммарных издержек отдельных членов коалиции S над издержками самой коалиции.
- Поэтому $v(S)$ можно также назвать *выигрышем* коалиции S.
- Заметим, что функция v является супераддитивной и $v(i) = 0$ для всех $i \in N$.
- Таким образом, кооперативная игра (N, c) с характеристической функцией издержек преобразовалась в кооперативную игру (N, v) с характеристической функцией выигрышей.

Преобразование ф-ции издержек в ф-цию выигрышей

- Мы можем преобразовать функцию издержек c в функцию выигрышей $v : 2^N \to \mathbb{R}$ по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in S} c(i) - c(S), \quad S \subseteq N.$$

- Значение $v(S)$ — это превышение суммарных издержек отдельных членов коалиции S над издержками самой коалиции.
- Поэтому $v(S)$ можно также назвать *выигрышем* коалиции S.
- Заметим, что функция v является супераддитивной и $v(i) = 0$ для всех $i \in N$.
- Таким образом, кооперативная игра (N, c) с характеристической функцией издержек преобразовалась в кооперативную игру (N, v) с характеристической функцией выигрышей.

Преобразование ф-ции издержек в ф-цию выигрышей

- Мы можем преобразовать функцию издержек c в функцию выигрышей $v : 2^N \to \mathbb{R}$ по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in S} c(i) - c(S), \quad S \subseteq N.$$

- Значение $v(S)$ — это превышение суммарных издержек отдельных членов коалиции S над издержками самой коалиции.
- Поэтому $v(S)$ можно также назвать *выигрышем* коалиции S.
- Заметим, что функция v является супераддитивной и $v(i) = 0$ для всех $i \in N$.
- Таким образом, кооперативная игра (N, c) с характеристической функцией издержек преобразовалась в кооперативную игру (N, v) с характеристической функцией выигрышей.

Преобразование ф-ции издержек в ф-цию выигрышей

- Мы можем преобразовать функцию издержек c в функцию выигрышей $v : 2^N \to \mathbb{R}$ по правилу:
$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in S} c(i) - c(S), \quad S \subseteq N.$$
- Значение $v(S)$ — это превышение суммарных издержек отдельных членов коалиции S над издержками самой коалиции.
- Поэтому $v(S)$ можно также назвать *выигрышем* коалиции S.
- Заметим, что функция v является супераддитивной и $v(i) = 0$ для всех $i \in N$.
- Таким образом, кооперативная игра (N, c) с характеристической функцией издержек преобразовалась в кооперативную игру (N, v) с характеристической функцией выигрышей.

Ядро

- Дележ выигрышей x в новой кооперативной игре (N, v) соответствует *распределению издержек* y в игре (N, c),
- если определить $y_i \stackrel{\text{def}}{=} c(i) - x_i$ для $i \in N$.
- Отображение $x \to y$ переводит ядро $C(N, v)$ в кооперативной игре (N, v) в *ядро*
  $C_{\le}(N, c) \stackrel{\text{def}}{=}$
  $$\left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} y_i = c(N), \sum_{i \in S} y_i \le c(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}$$
  для игры (N, c).
- Как и ранее, ядро $C_{\le}(N, c)$ можно было определить как множество всех стабильных распределений издержек.
- Но теперь распределение издержек y является нестабильным из-за коалиции $S \subset N$, если $\sum_{i \in S} y_i > u(S)$.

Ядро

- Дележ выигрышей x в новой кооперативной игре (N, v) соответствует *распределению издержек* y в игре (N, c),
- если определить $y_i \stackrel{\text{def}}{=} c(i) - x_i$ для $i \in N$.
- Отображение $x \to y$ переводит ядро $C(N, v)$ в кооперативной игре (N, v) в *ядро*
$C_{\leq}(N, c) \stackrel{\text{def}}{=}$
$$\left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} y_i = c(N), \sum_{i \in S} y_i \leq c(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}$$
для игры (N, c).
- Как и ранее, ядро $C_{\leq}(N, c)$ можно было определить как множество всех стабильных распределений издержек.
- Но теперь распределение издержек y является нестабильным из-за коалиции $S \subset N$, если $\sum_{i \in S} y_i > u(S)$.

Ядро

- Дележ выигрышей x в новой кооперативной игре (N, v) соответствует *распределению издержек* y в игре (N, c),
- если определить $y_i \stackrel{\text{def}}{=} c(i) - x_i$ для $i \in N$.
- Отображение $x \to y$ переводит ядро $C(N, v)$ в кооперативной игре (N, v) в *ядро*
$C_{\le}(N, c) \stackrel{\text{def}}{=}$
$$\left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} y_i = c(N), \sum_{i \in S} y_i \le c(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}$$
для игры (N, c).
- Как и ранее, ядро $C_{\le}(N, c)$ можно было определить как множество всех стабильных распределений издержек.
- Но теперь распределение издержек y является нестабильным из-за коалиции $S \subset N$, если $\sum_{i \in S} y_i > u(S)$.

Ядро

- Дележ выигрышей x в новой кооперативной игре (N, v) соответствует *распределению издержек* y в игре (N, c),
- если определить $y_i \stackrel{\text{def}}{=} c(i) - x_i$ для $i \in N$.
- Отображение $x \to y$ переводит ядро $C(N, v)$ в кооперативной игре (N, v) в *ядро*
  $$C_{\le}(N, c) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} y_i = c(N), \sum_{i \in S} y_i \le c(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}$$
  для игры (N, c).
- Как и ранее, ядро $C_{\le}(N, c)$ можно было определить как множество всех стабильных распределений издержек.
- Но теперь распределение издержек y является нестабильным из-за коалиции $S \subset N$, если $\sum_{i \in S} y_i > u(S)$.

Ядро

- Дележ выигрышей x в новой кооперативной игре (N, v) соответствует *распределению издержек* y в игре (N, c),
- если определить $y_i \stackrel{\text{def}}{=} c(i) - x_i$ для $i \in N$.
- Отображение $x \to y$ переводит ядро $C(N, v)$ в кооперативной игре (N, v) в *ядро*
  $$C_{\leq}(N, c) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} y_i = c(N), \sum_{i \in S} y_i \leq c(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}$$
  для игры (N, c).
- Как и ранее, ядро $C_{\leq}(N, c)$ можно было определить как множество всех стабильных распределений издержек.
- Но теперь распределение издержек y является нестабильным из-за коалиции $S \subset N$, если $\sum_{i \in S} y_i > u(S)$.

Значение Шепли

Значение Шепли $\phi(c) = (\phi_1(c), \ldots, \phi_n(c))^T$ для игры (N, c) определяется точно также, как и для игры (N, v):

$$\phi_i(c) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}(c(S) - c(S \setminus \{i\})).$$

Значение Шепли

Значение Шепли $\phi(c) = (\phi_1(c), \dots, \phi_n(c))^T$ для игры (N, c) определяется точно также, как и для игры (N, v):

$$\phi_i(c) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}(c(S) - c(S \setminus \{i\})).$$

План лекции

1. Характеристическая функция и дележи
   - Ядро
   - Игры с пустым ядром
   - Приближенное ядро
2. Справедливые дележи
   - Значение игры по Шепли
   - Сердцевина
3. Кооперация для минимизации издержек
   - Ядро и значение Шепли
   - Размещение центров обслуживания

Размещение центров обслуживания

- Заданы множество N *клиентов* и множество M мест для размещения *центров обслуживания*.
- Стоимость размещения центра в пункте $j \in M$ равна f_j.
- Мы также знаем стоимость q_{ij} подключения клиента $i \in N$ к центру в пункте $j \in M$.
- Стоимость обслуживания подмножества клиентов $S \in N$:
$$c(S) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{T \subseteq M} \left\{ \sum_{j \in T} f_j + \sum_{i \in S} \min_{j \in T} q_{ij} \right\}.$$
- Предположим, что все клиенты согласились совместно разделить издержки.
- В таком случае, мы можем определить справедливое распределение издержек между клиентами, проанализировав кооперативную игру (N, c).

Размещение центров обслуживания

- Заданы множество N *клиентов* и множество M мест для размещения *центров обслуживания*.
- Стоимость размещения центра в пункте $j \in M$ равна f_j.
- Мы также знаем стоимость q_{ij} подключения клиента $i \in N$ к центру в пункте $j \in M$.
- Стоимость обслуживания подмножества клиентов $S \in N$:

$$c(S) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{T \subseteq M} \left\{ \sum_{j \in T} f_j + \sum_{i \in S} \min_{j \in T} q_{ij} \right\}.$$

- Предположим, что все клиенты согласились совместно разделить издержки.
- В таком случае, мы можем определить справедливое распределение издержек между клиентами, проанализировав кооперативную игру (N, c).

Размещение центров обслуживания

- Заданы множество N *клиентов* и множество M мест для размещения *центров обслуживания*.
- Стоимость размещения центра в пункте $j \in M$ равна f_j.
- Мы также знаем стоимость q_{ij} подключения клиента $i \in N$ к центру в пункте $j \in M$.
- Стоимость обслуживания подмножества клиентов $S \in N$:
$$c(S) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{T \subseteq M} \left\{ \sum_{j \in T} f_j + \sum_{i \in S} \min_{j \in T} q_{ij} \right\}.$$
- Предположим, что все клиенты согласились совместно разделить издержки.
- В таком случае, мы можем определить справедливое распределение издержек между клиентами, проанализировав кооперативную игру (N, c).

Размещение центров обслуживания

- Заданы множество N *клиентов* и множество M мест для размещения *центров обслуживания*.
- Стоимость размещения центра в пункте $j \in M$ равна f_j.
- Мы также знаем стоимость q_{ij} подключения клиента $i \in N$ к центру в пункте $j \in M$.
- Стоимость обслуживания подмножества клиентов $S \in N$:

$$c(S) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{T \subseteq M} \left\{ \sum_{j \in T} f_j + \sum_{i \in S} \min_{j \in T} q_{ij} \right\}.$$

- Предположим, что все клиенты согласились совместно разделить издержки.
- В таком случае, мы можем определить справедливое распределение издержек между клиентами, проанализировав кооперативную игру (N, c).

Размещение центров обслуживания

- Заданы множество N *клиентов* и множество M мест для размещения *центров обслуживания*.
- Стоимость размещения центра в пункте $j \in M$ равна f_j.
- Мы также знаем стоимость q_{ij} подключения клиента $i \in N$ к центру в пункте $j \in M$.
- Стоимость обслуживания подмножества клиентов $S \in N$:

$$c(S) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{T \subseteq M} \left\{ \sum_{j \in T} f_j + \sum_{i \in S} \min_{j \in T} q_{ij} \right\}.$$

- Предположим, что все клиенты согласились совместно разделить издержки.
- В таком случае, мы можем определить справедливое распределение издержек между клиентами, проанализировав кооперативную игру (N, c).

Размещение центров обслуживания

- Заданы множество N *клиентов* и множество M мест для размещения *центров обслуживания*.
- Стоимость размещения центра в пункте $j \in M$ равна f_j.
- Мы также знаем стоимость q_{ij} подключения клиента $i \in N$ к центру в пункте $j \in M$.
- Стоимость обслуживания подмножества клиентов $S \in N$:
$$c(S) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{T \subseteq M} \left\{ \sum_{j \in T} f_j + \sum_{i \in S} \min_{j \in T} q_{ij} \right\}.$$
- Предположим, что все клиенты согласились совместно разделить издержки.
- В таком случае, мы можем определить справедливое распределение издержек между клиентами, проанализировав кооперативную игру (N, c).

Пример задачи о размещении центров обслуживания

Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы клиентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами:

$$N = \{1, 2, 3\},\ M = \{1, 2\},\ f_1 = 2,\ f_2 = 2,$$

$$Q = [q_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция стоимостей:

Пример задачи о размещении центров обслуживания

Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы клиентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами:

$$N = \{1,2,3\},\ M = \{1,2\},\ f_1 = 2,\ f_2 = 2,$$

$$Q = [q_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция стоимостей:

Пример задачи о размещении центров обслуживания

Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы клиентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами:

$$N = \{1, 2, 3\},\ M = \{1, 2\},\ f_1 = 2,\ f_2 = 2,$$

$$Q = [q_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция стоимостей:

$c(\emptyset) = 0,$	

Пример задачи о размещении центров обслуживания

Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы клиентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами:

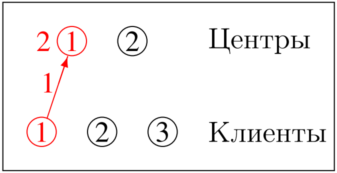
$$N = \{1,2,3\},\ M = \{1,2\},\ f_1 = 2,\ f_2 = 2,$$

$$Q = [q_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция стоимостей:

$c(\emptyset) = 0,$

$c(1) = 3,$



Пример задачи о размещении центров обслуживания

Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы клиентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами:

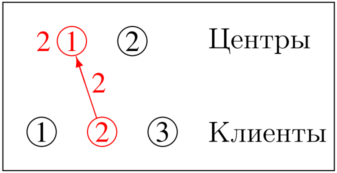
$$N = \{1,2,3\},\ M = \{1,2\},\ f_1 = 2,\ f_2 = 2,$$

$$Q = [q_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция стоимостей:

$c(\emptyset) = 0,$

$c(1) = 3,\ c(2) = 4,$



Пример задачи о размещении центров обслуживания

Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы клиентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами:

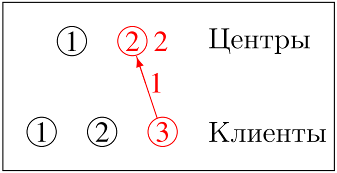
$$N = \{1, 2, 3\},\ M = \{1, 2\},\ f_1 = 2,\ f_2 = 2,$$

$$Q = [q_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция стоимостей:

$c(\emptyset) = 0,$

$c(1) = 3,\ c(2) = 4,\ c(3) = 3,$



Пример задачи о размещении центров обслуживания

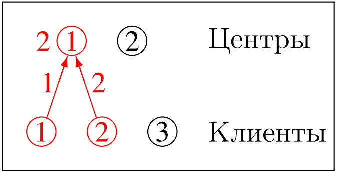
Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы клиентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами:

$$N = \{1,2,3\},\ M = \{1,2\},\ f_1 = 2,\ f_2 = 2,$$

$$Q = [q_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция стоимостей:

$c(\emptyset) = 0,$
$c(1) = 3,\ c(2) = 4,\ c(3) = 3,$
$c(1,2) = 5,$



Пример задачи о размещении центров обслуживания

Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы клиентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами:

$$N = \{1,2,3\},\ M = \{1,2\},\ f_1 = 2,\ f_2 = 2,$$

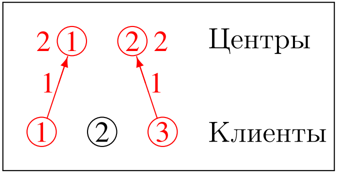
$$Q = [q_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция стоимостей:

$c(\emptyset) = 0,$

$c(1) = 3,\ c(2) = 4,\ c(3) = 3,$

$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,$



Пример задачи о размещении центров обслуживания

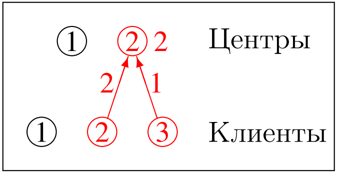
Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы клиентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами:

$$N = \{1,2,3\},\ M = \{1,2\},\ f_1 = 2,\ f_2 = 2,$$

$$Q = [q_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция стоимостей:

$$c(\emptyset) = 0,$$
$$c(1) = 3,\ c(2) = 4,\ c(3) = 3,$$
$$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,\ c(2,3) = 5,$$



Пример задачи о размещении центров обслуживания

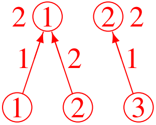
Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы клиентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами:

$$N = \{1, 2, 3\},\ M = \{1, 2\},\ f_1 = 2,\ f_2 = 2,$$

$$Q = [q_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функция стоимостей:

$c(\emptyset) = 0,$
$c(1) = 3,\ c(2) = 4,\ c(3) = 3,$
$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,\ c(2,3) = 5,$
$c(1,2,3) = 8.$



Центры

Клиенты

Ядро

$$c(\emptyset) = 0,$$
$$c(1) = 3,\ c(2) = 4,\ c(3) = 3,$$
$$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,\ c(2,3) = 5,$$
$$c(1,2,3) = 8.$$

- Ядро $C_{\leq}(N,c)$ в игре (N,c) есть множество решений следующей системы неравенств:

$$y_1 \leq 3,\ y_2 \leq 4,\ y_3 \leq 3,$$
$$y_1 + y_2 \leq 5,\ y_1 + y_3 \leq 6,\ y_2 + y_3 \leq 5,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 8.$$

- Эта система имеет единственное решение $y^* = (3,2,3)^T$.
- Поэтому y^* — это единственное стабильное распределение издержек в рассматриваемой игре.

Ядро

$$c(\emptyset) = 0,$$
$$c(1) = 3,\ c(2) = 4,\ c(3) = 3,$$
$$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,\ c(2,3) = 5,$$
$$c(1,2,3) = 8.$$

- Ядро $C_{\leq}(N,c)$ в игре (N,c) есть множество решений следующей системы неравенств:

$$y_1 \leq 3,\ y_2 \leq 4,\ y_3 \leq 3,$$
$$y_1 + y_2 \leq 5,\ y_1 + y_3 \leq 6,\ y_2 + y_3 \leq 5,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 8.$$

- Эта система имеет единственное решение $y^* = (3,2,3)^T$.
- Поэтому y^* — это единственное стабильное распределение издержек в рассматриваемой игре.

Ядро

$$c(\emptyset) = 0,$$
$$c(1) = 3,\ c(2) = 4,\ c(3) = 3,$$
$$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,\ c(2,3) = 5,$$
$$c(1,2,3) = 8.$$

- Ядро $C_{\le}(N,c)$ в игре (N,c) есть множество решений следующей системы неравенств:

$$y_1 \le 3,\ y_2 \le 4,\ y_3 \le 3,$$
$$y_1 + y_2 \le 5,\ y_1 + y_3 \le 6,\ y_2 + y_3 \le 5,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 8.$$

- Эта система имеет единственное решение $y^* = (3,2,3)^T$.
- Поэтому y^* — это единственное стабильное распределение издержек в рассматриваемой игре.

Ядро

$$c(\emptyset) = 0,$$
$$c(1) = 3,\ c(2) = 4,\ c(3) = 3,$$
$$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,\ c(2,3) = 5,$$
$$c(1,2,3) = 8.$$

- Ядро $C_{\le}(N,c)$ в игре (N,c) есть множество решений следующей системы неравенств:

$$y_1 \le 3,\ y_2 \le 4,\ y_3 \le 3,$$
$$y_1 + y_2 \le 5,\ y_1 + y_3 \le 6,\ y_2 + y_3 \le 5,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 8.$$

- Эта система имеет единственное решение $y^* = (3,2,3)^T$.
- Поэтому y^* — это единственное стабильное распределение издержек в рассматриваемой игре.

Значение Шепли

Ф-ция стоимостей:

$c(\emptyset) = 0,\ c(1) = 3,$
$c(2) = 4,\ c(3) = 3,$
$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,$
$c(2,3) = 5,\ c(1,2,3) = 8.$

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	3	2	3
(1,3,2)	3	2	3
(2,1,3)	1	4	3
(2,3,1)	3	4	1
(3,1,2)	3	2	3
(3,2,1)	3	2	3
Вектор Шепли	8/3	8/3	8/3

Отметим, что значение Шепли $\phi(c) = (8/3, 8/3, 8/3)$ не является стабильным распределением издержек, поскольку это распределение нестабильно из-за коалиции $\{2,3\}$:

$$\phi_2(c) + \phi_3(c) = 8/3 + 8/3 = 16/3 > 5 = c(2,3).$$

Значение Шепли

Ф-ция стоимостей:

$c(\emptyset) = 0,\ c(1) = 3,$
$c(2) = 4,\ c(3) = 3,$
$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,$
$c(2,3) = 5,\ c(1,2,3) = 8.$

Перес-тановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	3	2	3
(1,3,2)	3	2	3
(2,1,3)	1	4	3
(2,3,1)	3	4	1
(3,1,2)	3	2	3
(3,2,1)	3	2	3
Вектор Шепли	8/3	8/3	8/3

Отметим, что значение Шепли $\phi(c) = (8/3, 8/3, 8/3)$ не является стабильным распределением издержек, поскольку это распределение нестабильно из-за коалиции $\{2,3\}$:

$$\phi_2(c) + \phi_3(c) = 8/3 + 8/3 = 16/3 > 5 = c(2,3).$$

Значение Шепли

Ф-ция стоимостей:

$$c(\emptyset) = 0,\ c(1) = 3,$$
$$c(2) = 4,\ c(3) = 3,$$
$$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,$$
$$c(2,3) = 5,\ c(1,2,3) = 8.$$

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	3	2	3
(1,3,2)	3	2	3
(2,1,3)	1	4	3
(2,3,1)	3	4	1
(3,1,2)	3	2	3
(3,2,1)	3	2	3
Вектор Шепли	8/3	8/3	8/3

Отметим, что значение Шепли $\phi(c) = (8/3, 8/3, 8/3)$ не является стабильным распределением издержек, поскольку это распределение нестабильно из-за коалиции $\{2, 3\}$:

$$\phi_2(c) + \phi_3(c) = 8/3 + 8/3 = 16/3 > 5 = c(2, 3).$$

Значение Шепли

Ф-ция стоимостей:

$c(\emptyset) = 0,\ c(1) = 3,$
$c(2) = 4,\ c(3) = 3,$
$c(1,2) = 5,\ c(1,3) = 6,$
$c(2,3) = 5,\ c(1,2,3) = 8.$

Перестановка	Вклады игроков 1	2	3
(1,2,3)	3	2	3
(1,3,2)	3	2	3
(2,1,3)	1	4	3
(2,3,1)	3	4	1
(3,1,2)	3	2	3
(3,2,1)	3	2	3
Вектор Шепли	8/3	8/3	8/3

Отметим, что значение Шепли $\phi(c) = (8/3, 8/3, 8/3)$ не является стабильным распределением издержек, поскольку это распределение нестабильно из-за коалиции $\{2,3\}$:

$$\phi_2(c) + \phi_3(c) = 8/3 + 8/3 = 16/3 > 5 = c(2,3).$$