Байесовские игры: аукционы, парные торги, война до истощения

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2014

Содержание

Аукционы

- Первую формализацию аукционов предложил В. Викрей (W. Vickrey), которому за это в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия в области экономики.
- Мы рассмотрим два типа аукционов для демонстрации концепции байесовского равновесия.
- На аукционе продается один объект, на который претендуют n покупателей (игроков).
- Покупатель i имеет свою оценку v_i стоимости продаваемого объекта, $i = 1, \dots, n$.
- Будем предполагать, что другие покупатели знают лишь то, что v_i принадлежит некоторому множеству V_i.
- Покупатели одновр. объявляют суммы $b_1, b_2, \dots, b_n$, которые они согласны заплатить за данный объект.
- Заметим, что покупатели не обязаны раскрывать свою оценку стоимости объекта, т. е. объявленная сумма b_i может быть не равна оценке v_i.

Аукционы

- Первую формализацию аукционов предложил В. Викрей (W. Vickrey), которому за это в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия в области экономики.
- Мы рассмотрим два типа аукционов для демонстрации концепции байесовского равновесия.
- На аукционе продается один объект, на который претендуют n покупателей (игроков).
- Покупатель i имеет свою оценку v_i стоимости продаваемого объекта, $i = 1, \ldots, n$.
- Будем предполагать, что другие покупатели знают лишь то, что v_i принадлежит некоторому множеству V_i.
- Покупатели одновр. объявляют суммы $b_1, b_2, \ldots, b_n$, которые они согласны заплатить за данный объект.
- Заметим, что покупатели не обязаны раскрывать свою оценку стоимости объекта, т. е. объявленная сумма b_i может быть не равна оценке v_i.

Аукционы

- Первую формализацию аукционов предложил В. Викрей (W. Vickrey), которому за это в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия в области экономики.
- Мы рассмотрим два типа аукционов для демонстрации концепции байесовского равновесия.
- На аукционе продается один объект, на который претендуют n покупателей (игроков).
- Покупатель i имеет свою оценку v_i стоимости продаваемого объекта, $i = 1, \ldots, n$.
- Будем предполагать, что другие покупатели знают лишь то, что v_i принадлежит некоторому множеству V_i.
- Покупатели одновр. объявляют суммы $b_1, b_2, \ldots, b_n$, которые они согласны заплатить за данный объект.
- Заметим, что покупатели не обязаны раскрывать свою оценку стоимости объекта, т. е. объявленная сумма b_i может быть не равна оценке v_i.

Аукционы

- Первую формализацию аукционов предложил В. Викрей (W. Vickrey), которому за это в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия в области экономики.
- Мы рассмотрим два типа аукционов для демонстрации концепции байесовского равновесия.
- На аукционе продается один объект, на который претендуют n покупателей (игроков).
- Покупатель i имеет свою оценку v_i стоимости продаваемого объекта, $i = 1, \dots, n$.
- Будем предполагать, что другие покупатели знают лишь то, что v_i принадлежит некоторому множеству V_i.
- Покупатели одновр. объявляют суммы $b_1, b_2, \dots, b_n$, которые они согласны заплатить за данный объект.
- Заметим, что покупатели не обязаны раскрывать свою оценку стоимости объекта, т. е. объявленная сумма b_i может быть не равна оценке v_i.

Аукционы

- Первую формализацию аукционов предложил В. Викрей (W. Vickrey), которому за это в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия в области экономики.
- Мы рассмотрим два типа аукционов для демонстрации концепции байесовского равновесия.
- На аукционе продается один объект, на который претендуют n покупателей (игроков).
- Покупатель i имеет свою оценку v_i стоимости продаваемого объекта, $i = 1, \ldots, n$.
- Будем предполагать, что другие покупатели знают лишь то, что v_i принадлежит некоторому множеству V_i.
- Покупатели одновр. объявляют суммы $b_1, b_2, \ldots, b_n$, которые они согласны заплатить за данный объект.
- Заметим, что покупатели не обязаны раскрывать свою оценку стоимости объекта, т. е. объявленная сумма b_i может быть не равна оценке v_i.

Аукционы

- Первую формализацию аукционов предложил В. Викрей (W. Vickrey), которому за это в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия в области экономики.
- Мы рассмотрим два типа аукционов для демонстрации концепции байесовского равновесия.
- На аукционе продается один объект, на который претендуют n покупателей (игроков).
- Покупатель i имеет свою оценку v_i стоимости продаваемого объекта, $i = 1, \dots, n$.
- Будем предполагать, что другие покупатели знают лишь то, что v_i принадлежит некоторому множеству V_i.
- Покупатели одновр. объявляют суммы $b_1, b_2, \dots, b_n$, которые они согласны заплатить за данный объект.
- Заметим, что покупатели не обязаны раскрывать свою оценку стоимости объекта, т. е. объявленная сумма b_i может быть не равна оценке v_i.

Аукционы

- Первую формализацию аукционов предложил В. Викрей (W. Vickrey), которому за это в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия в области экономики.
- Мы рассмотрим два типа аукционов для демонстрации концепции байесовского равновесия.
- На аукционе продается один объект, на который претендуют n покупателей (игроков).
- Покупатель i имеет свою оценку v_i стоимости продаваемого объекта, $i = 1, \dots, n$.
- Будем предполагать, что другие покупатели знают лишь то, что v_i принадлежит некоторому множеству V_i.
- Покупатели одновр. объявляют суммы $b_1, b_2, \dots, b_n$, которые они согласны заплатить за данный объект.
- Заметим, что покупатели не обязаны раскрывать свою оценку стоимости объекта, т. е. объявленная сумма b_i может быть не равна оценке v_i.

Содержание

Аукционы первой цены

- В *аукционе первой цены* выигрывает тот покупатель, который назначил большую цену.
- В случае равенства нескольких цен, победитель определяется подбрасыванием монеты.
- Ради простоты, здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда покутелей только два, т. е. $n = 2$.
- Без огр. общн. считаем, что $v_i \in V_i = [0, 1]$ для $i = 1, 2$.
- Функции выигрышей покупателей (игроков) следующие:

$$\phi_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > b_2, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{если } b_1 = b_2, \\ 0, & \text{если } b_1 < b_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2, & \text{если } b_2 > b_1, \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & \text{если } b_2 = b_1, \\ 0, & \text{если } b_2 < b_1. \end{cases}$$

Аукционы первой цены

- В *аукционе первой цены* выигрывает тот покупатель, который назначил большую цену.
- В случае равенства нескольких цен, победитель определяется подбрасыванием монеты.
- Ради простоты, здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда покутелей только два, т. е. $n = 2$.
- Без огр. общн. считаем, что $v_i \in V_i = [0, 1]$ для $i = 1, 2$.
- Функции выигрышей покупателей (игроков) следующие:

$$\phi_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > b_2, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{если } b_1 = b_2, \\ 0, & \text{если } b_1 < b_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2, & \text{если } b_2 > b_1, \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & \text{если } b_2 = b_1, \\ 0, & \text{если } b_2 < b_1. \end{cases}$$

Аукционы первой цены

- В *аукционе первой цены* выигрывает тот покупатель, который назначил большую цену.
- В случае равенства нескольких цен, победитель определяется подбрасыванием монеты.
- Ради простоты, здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда покутелей только два, т. е. $n = 2$.
- Без огр. общн. считаем, что $v_i \in V_i = [0, 1]$ для $i = 1, 2$.
- Функции выигрышей покупателей (игроков) следующие:

$$\phi_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > b_2, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{если } b_1 = b_2, \\ 0, & \text{если } b_1 < b_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2, & \text{если } b_2 > b_1, \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & \text{если } b_2 = b_1, \\ 0, & \text{если } b_2 < b_1. \end{cases}$$

Аукционы первой цены

- В *аукционе первой цены* выигрывает тот покупатель, который назначил большую цену.
- В случае равенства нескольких цен, победитель определяется подбрасыванием монеты.
- Ради простоты, здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда покутелей только два, т. е. $n = 2$.
- Без огр. общн. считаем, что $v_i \in V_i = [0, 1]$ для $i = 1, 2$.
- Функции выигрышей покупателей (игроков) следующие:

$$\phi_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > b_2, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{если } b_1 = b_2, \\ 0, & \text{если } b_1 < b_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2, & \text{если } b_2 > b_1, \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & \text{если } b_2 = b_1, \\ 0, & \text{если } b_2 < b_1. \end{cases}$$

Аукционы первой цены

- В *аукционе первой цены* выигрывает тот покупатель, который назначил большую цену.
- В случае равенства нескольких цен, победитель определяется подбрасыванием монеты.
- Ради простоты, здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда покутелей только два, т. е. $n = 2$.
- Без огр. общн. считаем, что $v_i \in V_i = [0, 1]$ для $i = 1, 2$.
- Функции выигрышей покупателей (игроков) следующие:

$$\phi_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > b_2, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{если } b_1 = b_2, \\ 0, & \text{если } b_1 < b_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2, & \text{если } b_2 > b_1, \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & \text{если } b_2 = b_1, \\ 0, & \text{если } b_2 < b_1. \end{cases}$$

Аукционы первой цены

- В *аукционе первой цены* выигрывает тот покупатель, который назначил большую цену.
- В случае равенства нескольких цен, победитель определяется подбрасыванием монеты.
- Ради простоты, здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда покутелей только два, т. е. $n = 2$.
- Без огр. общн. считаем, что $v_i \in V_i = [0, 1]$ для $i = 1, 2$.
- Функции выигрышей покупателей (игроков) следующие:

$$\phi_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > b_2, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{если } b_1 = b_2, \\ 0, & \text{если } b_1 < b_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2, & \text{если } b_2 > b_1, \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & \text{если } b_2 = b_1, \\ 0, & \text{если } b_2 < b_1. \end{cases}$$

Аукционы первой цены

- В *аукционе первой цены* выигрывает тот покупатель, который назначил большую цену.
- В случае равенства нескольких цен, победитель определяется подбрасыванием монеты.
- Ради простоты, здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда покутелей только два, т. е. $n = 2$.
- Без огр. общн. считаем, что $v_i \in V_i = [0, 1]$ для $i = 1, 2$.
- Функции выигрышей покупателей (игроков) следующие:

$$\phi_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > b_2, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{если } b_1 = b_2, \\ 0, & \text{если } b_1 < b_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2, & \text{если } b_2 > b_1, \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & \text{если } b_2 = b_1, \\ 0, & \text{если } b_2 < b_1. \end{cases}$$

Представление в виде байесовской игры

- Мы имеем байесовскую игру двух лиц, в которой $S_1 = S_2 = [0, 1]$ и $T_1 = T_2 = [0, 1]$,
- причем, игрок 2 ничего не знает о v_1 и поэтому полагает, что v_1 есть равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина,
- а игрок 1 также ничего не знает о v_2 и поэтому полагает, что v_2 есть равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина.
- Поэтому представления игроков задаются следующим образом:

$$\mu_1(v_2 \in [\alpha, \beta] | v_1) = \beta - \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1,$$
$$\mu_2(v_1 \in [\alpha, \beta] | v_2) = \beta - \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1.$$

Представление в виде байесовской игры

- Мы имеем байесовскую игру двух лиц, в которой $S_1 = S_2 = [0, 1]$ и $T_1 = T_2 = [0, 1]$,
- причем, игрок 2 ничего не знает о v_1 и поэтому полагает, что v_1 есть равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина,
- а игрок 1 также ничего не знает о v_2 и поэтому полагает, что v_2 есть равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина.
- Поэтому представления игроков задаются следующим образом:

$$\mu_1(v_2 \in [\alpha, \beta] | v_1) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1,$$
$$\mu_2(v_1 \in [\alpha, \beta] | v_2) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

Представление в виде байесовской игры

- Мы имеем байесовскую игру двух лиц, в которой $S_1 = S_2 = [0, 1]$ и $T_1 = T_2 = [0, 1]$,
- причем, игрок 2 ничего не знает о v_1 и поэтому полагает, что v_1 есть равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина,
- а игрок 1 также ничего не знает о v_2 и поэтому полагает, что v_2 есть равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина.
- Поэтому представления игроков задаются следующим образом:

$$\mu_1(v_2 \in [\alpha, \beta] | v_1) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1,$$
$$\mu_2(v_1 \in [\alpha, \beta] | v_2) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

Представление в виде байесовской игры

- Мы имеем байесовскую игру двух лиц, в которой $S_1 = S_2 = [0,1]$ и $T_1 = T_2 = [0,1]$,
- причем, игрок 2 ничего не знает о v_1 и поэтому полагает, что v_1 есть равномерно распределенная на $[0,1]$ случайная величина,
- а игрок 1 также ничего не знает о v_2 и поэтому полагает, что v_2 есть равномерно распределенная на $[0,1]$ случайная величина.
- Поэтому представления игроков задаются следующим образом:

$$\mu_1(v_2 \in [\alpha,\beta]|v_1) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1,$$
$$\mu_2(v_1 \in [\alpha,\beta]|v_2) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

Байесовское равновесие

- Байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$: если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.
- Покупатель может выиграть положительную сумму только тогда,
- когда он назначает цену, которая меньше его оценки продаваемого объекта.
- Оказывается, что оптимальным поведением покупателя является объявить цену, равную половине своей оценки стоимости предмета.

Теорема

В игре «аукцион первой цены» байесовским равновесием является ситуация $(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2, \tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2)$.

Байесовское равновесие

- Байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$: если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.
- Покупатель может выиграть положительную сумму только тогда,
- когда он назначает цену, которая меньше его оценки продаваемого объекта.
- Оказывается, что оптимальным поведением покупателя является объявить цену, равную половине своей оценки стоимости предмета.

Теорема

В игре «аукцион первой цены» байесовским равновесием является ситуация $(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2, \tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2)$.

Байесовское равновесие

- Байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$: если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.
- Покупатель может выиграть положительную сумму только тогда,
- когда он назначает цену, которая меньше его оценки продаваемого объекта.
- Оказывается, что оптимальным поведением покупателя является объявить цену, равную половине своей оценки стоимости предмета.

Теорема

В игре «аукцион первой цены» байесовским равновесием является ситуация $(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2, \tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2)$.

Байесовское равновесие

- Байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$: если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.
- Покупатель может выиграть положительную сумму только тогда,
- когда он назначает цену, которая меньше его оценки продаваемого объекта.
- Оказывается, что оптимальным поведением покупателя является объявить цену, равную половине своей оценки стоимости предмета.

Теорема

В игре «аукцион первой цены» байесовским равновесием является ситуация $(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2, \tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2)$.

Байесовское равновесие

- Байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$: если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.
- Покупатель может выиграть положительную сумму только тогда,
- когда он назначает цену, которая меньше его оценки продаваемого объекта.
- Оказывается, что оптимальным поведением покупателя является объявить цену, равную половине своей оценки стоимости предмета.

Теорема

В игре «аукцион первой цены» байесовским равновесием является ситуация $(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2, \tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2)$.

Байесовское равновесие

- Байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$: если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.
- Покупатель может выиграть положительную сумму только тогда,
- когда он назначает цену, которая меньше его оценки продаваемого объекта.
- Оказывается, что оптимальным поведением покупателя является объявить цену, равную половине своей оценки стоимости предмета.

Теорема

В игре «аукцион первой цены» байесовским равновесием является ситуация $(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2, \tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2)$.

Байесовское равновесие

- Байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$: если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.
- Покупатель может выиграть положительную сумму только тогда,
- когда он назначает цену, которая меньше его оценки продаваемого объекта.
- Оказывается, что оптимальным поведением покупателя является объявить цену, равную половине своей оценки стоимости предмета.

Теорема

В игре «аукцион первой цены» байесовским равновесием является ситуация $(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2, \tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2)$.

Доказательство теоремы

- Игрок 1 типа $v_1 \in [0,1]$ определяет свой лучший ответ $\tilde{b}_1(v_1)$ на стратегию $\tilde{b}_2(v_2)$ игрока 2, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > \tilde{b}_2(v_2)) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = \tilde{b}_2(v_2)) \right).$$

- Мы найдем наилучший ответ игрока 1 на стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2, решая следующую опт. задачу:

$$\begin{aligned} &\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > v_2/2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = v_2/2) \right) \\ = &\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 < 2b_1) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 = 2b_1) \right) \\ = &\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)2b_1 \right). \end{aligned}$$

- Из условия опт. первого порядка $2v_1 - 4b_1 = 0$ находим $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$.

Доказательство теоремы

- Игрок 1 типа $v_1 \in [0,1]$ определяет свой лучший ответ $\tilde{b}_1(v_1)$ на стратегию $\tilde{b}_2(v_2)$ игрока 2, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > \tilde{b}_2(v_2)) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = \tilde{b}_2(v_2)) \right).$$

- Мы найдем наилучший ответ игрока 1 на стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2, решая следующую опт. задачу:

$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > v_2/2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = v_2/2) \right)$$

$$= \max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 < 2b_1) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 = 2b_1) \right)$$

$$= \max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)2b_1 \right).$$

- Из условия опт. первого порядка $2v_1 - 4b_1 = 0$ находим $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$.

Доказательство теоремы

- Игрок 1 типа $v_1 \in [0,1]$ определяет свой лучший ответ $\tilde{b}_1(v_1)$ на стратегию $\tilde{b}_2(v_2)$ игрока 2, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > \tilde{b}_2(v_2)) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = \tilde{b}_2(v_2)) \right).$$

- Мы найдем наилучший ответ игрока 1 на стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2, решая следующую опт. задачу:

$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > v_2/2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = v_2/2) \right)$$
$$= \max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 < 2b_1) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 = 2b_1) \right)$$
$$= \max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)2b_1 \right).$$

- Из условия опт. первого порядка $2v_1 - 4b_1 = 0$ находим $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$.

Доказательство теоремы

- Игрок 1 типа $v_1 \in [0,1]$ определяет свой лучший ответ $\tilde{b}_1(v_1)$ на стратегию $\tilde{b}_2(v_2)$ игрока 2, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > \tilde{b}_2(v_2)) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = \tilde{b}_2(v_2)) \right).$$

- Мы найдем наилучший ответ игрока 1 на стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2, решая следующую опт. задачу:

$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > v_2/2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = v_2/2) \right)$$

$$= \max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 < 2b_1) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 = 2b_1) \right)$$

$$= \max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)2b_1 \right).$$

- Из условия опт. первого порядка $2v_1 - 4b_1 = 0$ находим $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$.

Доказательство теоремы

- Игрок 1 типа $v_1 \in [0,1]$ определяет свой лучший ответ $\tilde{b}_1(v_1)$ на стратегию $\tilde{b}_2(v_2)$ игрока 2, решая следующую оптимизационную задачу:
$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > \tilde{b}_2(v_2)) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = \tilde{b}_2(v_2)) \right).$$
- Мы найдем наилучший ответ игрока 1 на стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2, решая следующую опт. задачу:
$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > v_2/2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = v_2/2) \right)$$
$$= \max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 < 2b_1) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 = 2b_1) \right)$$
$$= \max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)2b_1 \right).$$
- Из условия опт. первого порядка $2v_1 - 4b_1 = 0$ находим $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$.

Доказательство теоремы

- Игрок 1 типа $v_1 \in [0,1]$ определяет свой лучший ответ $\tilde{b}_1(v_1)$ на стратегию $\tilde{b}_2(v_2)$ игрока 2, решая следующую оптимизационную задачу:
$$\max_{b_1\in[0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > \tilde{b}_2(v_2)) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = \tilde{b}_2(v_2)) \right).$$
- Мы найдем наилучший ответ игрока 1 на стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2, решая следующую опт. задачу:
$$\max_{b_1\in[0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > v_2/2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = v_2/2) \right)$$
$$= \max_{b_1\in[0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 < 2b_1) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 = 2b_1) \right)$$
$$= \max_{b_1\in[0,1]} \left((v_1 - b_1)2b_1 \right).$$
- Из условия опт. первого порядка $2v_1 - 4b_1 = 0$ находим $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$.

Доказательство теоремы

- Игрок 1 типа $v_1 \in [0,1]$ определяет свой лучший ответ $\tilde{b}_1(v_1)$ на стратегию $\tilde{b}_2(v_2)$ игрока 2, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > \tilde{b}_2(v_2)) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = \tilde{b}_2(v_2)) \right).$$

- Мы найдем наилучший ответ игрока 1 на стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2, решая следующую опт. задачу:

$$\begin{aligned} &\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > v_2/2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = v_2/2) \right) \\ = &\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 < 2b_1) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 = 2b_1) \right) \\ = &\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1) 2b_1 \right). \end{aligned}$$

- Из условия опт. первого порядка $2v_1 - 4b_1 = 0$ находим $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$.

Доказательство теоремы

- Мы доказали, что байесовская стратегия $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$
- является оптимальным ответом игрока 1 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2.
- По симметрии, байесовская стратегия $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$
- является оптимальным ответом игрока 2 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$ игрока 1.
- Теорема доказана.

Доказательство теоремы

- Мы доказали, что байесовская стратегия $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$
- является оптимальным ответом игрока 1 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2.
- По симметрии, байесовская стратегия $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$
- является оптимальным ответом игрока 2 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$ игрока 1.
- Теорема доказана.

Доказательство теоремы

- Мы доказали, что байесовская стратегия $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$
- является оптимальным ответом игрока 1 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2.
- По симметрии, байесовская стратегия $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$
- является оптимальным ответом игрока 2 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$ игрока 1.
- Теорема доказана.

Доказательство теоремы

- Мы доказали, что байесовская стратегия $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$
- является оптимальным ответом игрока 1 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2.
- По симметрии, байесовская стратегия $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$
- является оптимальным ответом игрока 2 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$ игрока 1.
- Теорема доказана.

Доказательство теоремы

- Мы доказали, что байесовская стратегия $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$
- является оптимальным ответом игрока 1 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2.
- По симметрии, байесовская стратегия $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$
- является оптимальным ответом игрока 2 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$ игрока 1.
- Теорема доказана.

Содержание

Аукционы второй цены

- По правилам *аукциона второй цены* (или *аукциона Викрей*) победитель платит наибольшую из сум проигравших.
- Исходя из этого правила мы определяем функцию выигрышей игрока i следующим образом:

$$\phi_i(b_1,\dots,b_n;v_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{|X(b)|}(v_i - \bar{b}_i), & i \in X(b), \\ 0, & i \notin X(b), \end{cases}$$

- где $X(b) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max\{b_j :\ 1 \le j \le n\}$ есть множество игроков, объявивших наибольшую цену,
- а $\bar{b}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{b_j :\ 1 \le j \le n,\ j \ne i\}$ есть наибольшая цена, объявленная конкурентами игрока i.
- Важная особенность данного аукциона: объявленная покупателем цена не влияет на величину его выигрыша, она лишь влияет на то, будет ли он победителем или нет.

Аукционы второй цены

- По правилам *аукциона второй цены* (или *аукциона Викрей*) победитель платит наибольшую из сум проигравших.
- Исходя из этого правила мы определяем функцию выигрышей игрока i следующим образом:

$$\phi_i(b_1,\dots,b_n;v_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{|X(b)|}(v_i-\bar{b}_i), & i \in X(b),\\ 0, & i \notin X(b), \end{cases}$$

- где $X(b) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max\{b_j :\ 1 \le j \le n\}$ есть множество игроков, объявивших наибольшую цену,
- а $\bar{b}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{b_j :\ 1 \le j \le n,\ j \ne i\}$ есть наибольшая цена, объявленная конкурентами игрока i.
- Важная особенность данного аукциона: объявленная покупателем цена не влияет на величину его выигрыша, она лишь влияет на то, будет ли он победителем или нет.

Аукционы второй цены

- По правилам *аукциона второй цены* (или *аукциона Викрей*) победитель платит наибольшую из сум проигравших.
- Исходя из этого правила мы определяем функцию выигрышей игрока i следующим образом:

$$\phi_i(b_1, \ldots, b_n; v_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{|X(b)|}(v_i - \bar{b}_i), & i \in X(b), \\ 0, & i \notin X(b), \end{cases}$$

- где $X(b) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max\{b_j : 1 \le j \le n\}$ есть множество игроков, объявивших наибольшую цену,
- а $\bar{b}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{b_j : 1 \le j \le n, j \ne i\}$ есть наибольшая цена, объявленная конкурентами игрока i.
- Важная особенность данного аукциона: объявленная покупателем цена не влияет на величину его выигрыша, она лишь влияет на то, будет ли он победителем или нет.

Аукционы второй цены

- По правилам *аукциона второй цены* (или *аукциона Викрей*) победитель платит наибольшую из сум проигравших.
- Исходя из этого правила мы определяем функцию выигрышей игрока i следующим образом:

$$\phi_i(b_1,\dots,b_n;v_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{|X(b)|}(v_i-\bar{b}_i), & i\in X(b),\\ 0, & i\notin X(b), \end{cases}$$

- где $X(b) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max\{b_j:\ 1\le j\le n\}$ есть множество игроков, объявивших наибольшую цену,
- а $\bar{b}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{b_j:\ 1\le j\le n,\ j\ne i\}$ есть наибольшая цена, объявленная конкурентами игрока i.
- Важная особенность данного аукциона: объявленная покупателем цена не влияет на величину его выигрыша, она лишь влияет на то, будет ли он победителем или нет.

Аукционы второй цены

- По правилам *аукциона второй цены* (или *аукциона Викрей*) победитель платит наибольшую из сум проигравших.
- Исходя из этого правила мы определяем функцию выигрышей игрока i следующим образом:

$$\phi_i(b_1,\dots,b_n;v_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{|X(b)|}(v_i-\bar{b}_i), & i\in X(b),\\ 0, & i\notin X(b), \end{cases}$$

- где $X(b) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max\{b_j:\ 1\le j\le n\}$ есть множество игроков, объявивших наибольшую цену,
- а $\bar{b}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{b_j:\ 1\le j\le n,\ j\ne i\}$ есть наибольшая цена, объявленная конкурентами игрока i.
- Важная особенность данного аукциона: объявленная покупателем цена не влияет на величину его выигрыша, она лишь влияет на то, будет ли он победителем или нет.

Байесовская игра «аукцион второй цены»

- Здесь мы имеем байесовскую игру n лиц, в которой $S_i = T_i = V_i = [0, \infty)$ для всех $i = 1, \dots, n$.
- Как мы увидим позже, в этой игре у каждого игрока имеется доминирующая байесовская стратегия, поэтому мы не указываем представлений игроков.
- *Байес. стратегия* игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$:
- если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.

Теорема

В игре «аукцион второй цены» ситуация

$$(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1, \dots, \tilde{b}_n^*(v_n) = v_n),$$

в которой байесовской стратегией каждого из игроков является честно объявить свою оценку объекта, является доминирующим байесовским равновесием.

Байесовская игра «аукцион второй цены»

- Здесь мы имеем байесовскую игру n лиц, в которой $S_i = T_i = V_i = [0, \infty)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.
- Как мы увидим позже, в этой игре у каждого игрока имеется доминирующая байесовская стратегия, поэтому мы не указываем представлений игроков.
- *Байес. стратегия* игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$:
- если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.

Теорема

В игре «аукцион второй цены» ситуация

$$(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1, \ldots, \tilde{b}_n^*(v_n) = v_n),$$

в которой байесовской стратегией каждого из игроков является честно объявить свою оценку объекта, является доминирующим байесовским равновесием.

Байесовская игра «аукцион второй цены»

- Здесь мы имеем байесовскую игру n лиц, в которой $S_i = T_i = V_i = [0, \infty)$ для всех $i = 1, \dots, n$.
- Как мы увидим позже, в этой игре у каждого игрока имеется доминирующая байесовская стратегия, поэтому мы не указываем представлений игроков.
- *Байес. стратегия* игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$:
- если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.

Теорема

В игре «аукцион второй цены» ситуация

$$(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1, \dots, \tilde{b}_n^*(v_n) = v_n),$$

в которой байесовской стратегией каждого из игроков является честно объявить свою оценку объекта, является доминирующим байесовским равновесием.

Байесовская игра «аукцион второй цены»

- Здесь мы имеем байесовскую игру n лиц, в которой $S_i = T_i = V_i = [0, \infty)$ для всех $i = 1, \dots, n$.
- Как мы увидим позже, в этой игре у каждого игрока имеется доминирующая байесовская стратегия, поэтому мы не указываем представлений игроков.
- *Байес. стратегия* игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$:
- если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.

Теорема

В игре «аукцион второй цены» ситуация

$$(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1, \dots, \tilde{b}_n^*(v_n) = v_n),$$

в которой байесовской стратегией каждого из игроков является честно объявить свою оценку объекта, является доминирующим байесовским равновесием.

Байесовская игра «аукцион второй цены»

- Здесь мы имеем байесовскую игру n лиц, в которой $S_i = T_i = V_i = [0, \infty)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.
- Как мы увидим позже, в этой игре у каждого игрока имеется доминирующая байесовская стратегия, поэтому мы не указываем представлений игроков.
- *Байес. стратегия* игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$:
- если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.

Теорема

В игре «аукцион второй цены» ситуация

$$(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1, \ldots, \tilde{b}_n^*(v_n) = v_n),$$

в которой байесовской стратегией каждого из игроков является честно объявить свою оценку объекта, является доминирующим байесовским равновесием.

Байесовская игра «аукцион второй цены»

- Здесь мы имеем байесовскую игру n лиц, в которой $S_i = T_i = V_i = [0, \infty)$ для всех $i = 1, \dots, n$.
- Как мы увидим позже, в этой игре у каждого игрока имеется доминирующая байесовская стратегия, поэтому мы не указываем представлений игроков.
- *Байес. стратегия* игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$:
- если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.

Теорема

В игре «аукцион второй цены» ситуация

$$(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1, \dots, \tilde{b}_n^*(v_n) = v_n),$$

в которой байесовской стратегией каждого из игроков является честно объявить свою оценку объекта, является доминирующим байесовским равновесием.

Байесовская игра «аукцион второй цены»

- Здесь мы имеем байесовскую игру n лиц, в которой $S_i = T_i = V_i = [0, \infty)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.
- Как мы увидим позже, в этой игре у каждого игрока имеется доминирующая байесовская стратегия, поэтому мы не указываем представлений игроков.
- *Байес. стратегия* игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$:
- если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.

Теорема

В игре «аукцион второй цены» ситуация

$$(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1, \ldots, \tilde{b}_n^*(v_n) = v_n),$$

в которой байесовской стратегией каждого из игроков является честно объявить свою оценку объекта, является доминирующим байесовским равновесием.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1\le j\le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1,\dots,v_n;v_i) = v_i - \bar v_i \ge 0,$$
где $\bar v_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j:\ 1\le j\le n,\ j\ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
   - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar v_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
   - Если же он назначит цену $b_i = \bar v_i$, то,
     - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
     - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
   - Если $b_i < \bar v_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
   - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
   - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1\le j\le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1,\dots,v_n;v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$
где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j :\ 1\le j\le n,\ j\ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
   - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
   - Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то,
     - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
     - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
   - Если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
   - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
   - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1\le j\le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1,\dots,v_n;v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$
где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j:\ 1\le j\le n,\ j\ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
   - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
   - Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то,
     - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
     - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
   - Если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
   - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
   - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1 \le j \le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1, \dots, v_n; v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$
где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j : \ 1 \le j \le n, \ j \ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
   - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
   - Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то,
     - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
     - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
   - Если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
   - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
   - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1 \le j \le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1, \dots, v_n; v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$
где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j : \ 1 \le j \le n, \ j \ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
   - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
   - Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то,
     - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
     - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
   - Если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
   - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
   - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1\le j\le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1,\dots,v_n;v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$
где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j:\ 1\le j\le n,\ j\ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
    - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
    - Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то,
        - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
        - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
    - Если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
    - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
    - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1\le j\le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1,\dots,v_n;v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$
где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j :\ 1\le j\le n,\ j\ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
    - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
    - Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то,
        - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
        - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
    - Если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
    - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
    - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1 \le j \le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1, \dots, v_n; v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$
где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j : 1 \le j \le n, j \ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
   - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
   - Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то,
     - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
     - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
   - Если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
   - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
   - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1\le j\le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1,\dots,v_n;v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$
где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j:\ 1\le j\le n,\ j\ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
   - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
   - Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то,
     - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
     - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
   - Если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
   - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
   - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1 \le j \le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1, \dots, v_n; v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$
где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j : \ 1 \le j \le n, \ j \ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
   - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
   - Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то,
     - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
     - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
   - Если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
   - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
   - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Доказательство теоремы

1. Если игрок i оказался победителем, то
$$v_i = \max_{1 \le j \le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1, \dots, v_n; v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$
где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j : 1 \le j \le n,\ j \ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i.
   - Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится.
   - Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то,
     - если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится,
     - а если он проиграет, его выигрыш будет $= 0$.
   - Если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и получит 0.
2. Если игрок i проиграл, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$.
   - Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет.
   - А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$.

Содержание

Парные торги

- В *парных торгах* участвуют двое: продавец и покупатель некоторого товара.
- Продавец называет цену s, а покупатель — цену b.
- Если $b < s$, то товар не продается.
- Если же $b \geq s$, то товар продается по цене $(b+s)/2$.
- Продавец оценивает свой товар суммой $v_s \in [0,1]$,
- а покупатель — суммой $v_b \in [0,1]$.
- Покупатель считает, что v_s есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.
- Аналогично, продавец считает, что v_b — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.

Парные торги

- В *парных торгах* участвуют двое: продавец и покупатель некоторого товара.
- Продавец называет цену s, а покупатель — цену b.
- Если $b < s$, то товар не продается.
- Если же $b \geq s$, то товар продается по цене $(b+s)/2$.
- Продавец оценивает свой товар суммой $v_s \in [0,1]$,
- а покупатель — суммой $v_b \in [0,1]$.
- Покупатель считает, что v_s есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.
- Аналогично, продавец считает, что v_b — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.

Парные торги

- В *парных торгах* участвуют двое: продавец и покупатель некоторого товара.
- Продавец называет цену s, а покупатель — цену b.
- Если $b < s$, то товар не продается.
- Если же $b \geq s$, то товар продается по цене $(b+s)/2$.
- Продавец оценивает свой товар суммой $v_s \in [0,1]$,
- а покупатель — суммой $v_b \in [0,1]$.
- Покупатель считает, что v_s есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.
- Аналогично, продавец считает, что v_b — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.

Парные торги

- В *парных торгах* участвуют двое: продавец и покупатель некоторого товара.
- Продавец называет цену s, а покупатель — цену b.
- Если $b < s$, то товар не продается.
- Если же $b \geq s$, то товар продается по цене $(b+s)/2$.
- Продавец оценивает свой товар суммой $v_s \in [0,1]$,
- а покупатель — суммой $v_b \in [0,1]$.
- Покупатель считает, что v_s есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.
- Аналогично, продавец считает, что v_b — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.

Парные торги

- В *парных торгах* участвуют двое: продавец и покупатель некоторого товара.
- Продавец называет цену s, а покупатель — цену b.
- Если $b < s$, то товар не продается.
- Если же $b \geq s$, то товар продается по цене $(b + s)/2$.
- Продавец оценивает свой товар суммой $v_s \in [0, 1]$,
- а покупатель — суммой $v_b \in [0, 1]$.
- Покупатель считает, что v_s есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$.
- Аналогично, продавец считает, что v_b — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$.

Парные торги

- В *парных торгах* участвуют двое: продавец и покупатель некоторого товара.
- Продавец называет цену s, а покупатель — цену b.
- Если $b < s$, то товар не продается.
- Если же $b \geq s$, то товар продается по цене $(b+s)/2$.
- Продавец оценивает свой товар суммой $v_s \in [0,1]$,
- а покупатель — суммой $v_b \in [0,1]$.
- Покупатель считает, что v_s есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.
- Аналогично, продавец считает, что v_b — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.

Парные торги

- В *парных торгах* участвуют двое: продавец и покупатель некоторого товара.
- Продавец называет цену s, а покупатель — цену b.
- Если $b < s$, то товар не продается.
- Если же $b \geq s$, то товар продается по цене $(b+s)/2$.
- Продавец оценивает свой товар суммой $v_s \in [0,1]$,
- а покупатель — суммой $v_b \in [0,1]$.
- Покупатель считает, что v_s есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.
- Аналогично, продавец считает, что v_b — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.

Парные торги

- В *парных торгах* участвуют двое: продавец и покупатель некоторого товара.
- Продавец называет цену s, а покупатель — цену b.
- Если $b < s$, то товар не продается.
- Если же $b \geq s$, то товар продается по цене $(b+s)/2$.
- Продавец оценивает свой товар суммой $v_s \in [0,1]$,
- а покупатель — суммой $v_b \in [0,1]$.
- Покупатель считает, что v_s есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.
- Аналогично, продавец считает, что v_b — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.

Байесовская игра «парные торги»

- Мы имеем байес. игру двух лиц, в которой $N = \{s, b\}$, где продавец — это игрок s, а покупатель — игрок b.
- Множества стратегий и типов игроков совпадают: $S_s = T_s = S_b = T_b = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны и задаются следующим образом:

$$\mu_s(v_b \in [\alpha, \beta] | v_s) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1,$$
$$\mu_b(v_s \in [\alpha, \beta] | v_b) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

- Функции выигрышей продавца и покупателя следующие:

$$\phi_s(s, b; v_s) = \begin{cases} (b+s)/2 - v_s, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases}$$

$$\phi_b(s, b; v_b) = \begin{cases} v_b - (b+s)/2, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases}$$

Байесовская игра «парные торги»

- Мы имеем байес. игру двух лиц, в которой $N = \{s, b\}$, где продавец — это игрок s, а покупатель — игрок b.
- Множества стратегий и типов игроков совпадают: $S_s = T_s = S_b = T_b = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны и задаются следующим образом:

$$\mu_s(v_b \in [\alpha, \beta] | v_s) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1,$$
$$\mu_b(v_s \in [\alpha, \beta] | v_b) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

- Функции выигрышей продавца и покупателя следующие:

$$\phi_s(s, b; v_s) = \begin{cases} (b+s)/2 - v_s, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases}$$

$$\phi_b(s, b; v_b) = \begin{cases} v_b - (b+s)/2, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases}$$

Байесовская игра «парные торги»

- Мы имеем байес. игру двух лиц, в которой $N = \{s, b\}$, где продавец — это игрок s, а покупатель — игрок b.
- Множества стратегий и типов игроков совпадают: $S_s = T_s = S_b = T_b = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны и задаются следующим образом:

$$\mu_s(v_b \in [\alpha, \beta] | v_s) = \beta - \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1,$$
$$\mu_b(v_s \in [\alpha, \beta] | v_b) = \beta - \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1.$$

- Функции выигрышей продавца и покупателя следующие:

$$\phi_s(s, b; v_s) = \begin{cases} (b+s)/2 - v_s, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases}$$

$$\phi_b(s, b; v_b) = \begin{cases} v_b - (b+s)/2, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases}$$

Байесовская игра «парные торги»

- Мы имеем байес. игру двух лиц, в которой $N = \{s, b\}$, где продавец — это игрок s, а покупатель — игрок b.
- Множества стратегий и типов игроков совпадают: $S_s = T_s = S_b = T_b = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны и задаются следующим образом:

$$\mu_s(v_b \in [\alpha, \beta] | v_s) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1,$$
$$\mu_b(v_s \in [\alpha, \beta] | v_b) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

- Функции выигрышей продавца и покупателя следующие:

$$\phi_s(s, b; v_s) = \begin{cases} (b+s)/2 - v_s, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases}$$

$$\phi_b(s, b; v_b) = \begin{cases} v_b - (b+s)/2, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases}$$

Байесовская игра «парные торги»

- Мы имеем байес. игру двух лиц, в которой $N = \{s, b\}$, где продавец — это игрок s, а покупатель — игрок b.
- Множества стратегий и типов игроков совпадают: $S_s = T_s = S_b = T_b = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны и задаются следующим образом:

$$\mu_s(v_b \in [\alpha, \beta] | v_s) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1,$$
$$\mu_b(v_s \in [\alpha, \beta] | v_b) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

- Функции выигрышей продавца и покупателя следующие:

$$\phi_s(s, b; v_s) = \begin{cases} (b+s)/2 - v_s, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases}$$

$$\phi_b(s, b; v_b) = \begin{cases} v_b - (b+s)/2, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases}$$

Байесовская игра «парные торги»

- Мы имеем байес. игру двух лиц, в которой $N = \{s, b\}$, где продавец — это игрок s, а покупатель — игрок b.
- Множества стратегий и типов игроков совпадают: $S_s = T_s = S_b = T_b = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны и задаются следующим образом:

$$\mu_s(v_b \in [\alpha, \beta] | v_s) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1,$$
$$\mu_b(v_s \in [\alpha, \beta] | v_b) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

- Функции выигрышей продавца и покупателя следующие:

$$\phi_s(s, b; v_s) = \begin{cases} (b+s)/2 - v_s, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases}$$

$$\phi_b(s, b; v_b) = \begin{cases} v_b - (b+s)/2, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases}$$

Содержание

Равновесие в байесовской игре «парные торги»

$$\phi_s(s, b; v_s) = \begin{cases} (s+b)/2 - v_s, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases}$$

$$\phi_b(s, b; v_b) = \begin{cases} v_b - (s+b)/2, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases}$$

Определение

Байесовские стратегии продавца $\tilde{s}^*(v_s)$ и покупателя $\tilde{b}^*(v_b)$ образуют *байесовскую ситуацию равновесия* $(\tilde{s}^*, \tilde{b}^*)$, если они являются решениями включений:

$$\tilde{s}^*(v_s) \in \arg\max_{s \in [0,1]} \int_{\{v_b \in [0,1]:\, \tilde{b}(v_b) \geq s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b\,,$$

$$\tilde{b}^*(v_b) \in \arg\max_{b \in [0,1]} \int_{\{v_s \in [0,1]:\, b \geq \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2} \right) dv_s\,.$$

Равновесие в байесовской игре «парные торги»

$$\phi_s(s,b;v_s) = \begin{cases} (s+b)/2 - v_s, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases}$$

$$\phi_b(s,b;v_b) = \begin{cases} v_b - (s+b)/2, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases}$$

Определение

Байесовские стратегии продавца $\tilde{s}^*(v_s)$ и покупателя $\tilde{b}^*(v_b)$ образуют *байесовскую ситуацию равновесия* $(\tilde{s}^*, \tilde{b}^*)$, если они являются решениями включений:

$$\tilde{s}^*(v_s) \in \arg\max_{s\in[0,1]} \int_{\{v_b\in[0,1]:\, \tilde{b}(v_b)\geq s\}} \left(\frac{s+\tilde{b}(v_b)}{2} - v_s\right) dv_b\,,$$

$$\tilde{b}^*(v_b) \in \arg\max_{b\in[0,1]} \int_{\{v_s\in[0,1]:\, b\geq\tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s)+b}{2}\right) dv_s\,.$$

Равновесие в байесовской игре «парные торги»

$$\phi_s(s, b; v_s) = \begin{cases} (s+b)/2 - v_s, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases}$$

$$\phi_b(s, b; v_b) = \begin{cases} v_b - (s+b)/2, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases}$$

Определение

Байесовские стратегии продавца $\tilde{s}^*(v_s)$ и покупателя $\tilde{b}^*(v_b)$ образуют *байесовскую ситуацию равновесия* $(\tilde{s}^*, \tilde{b}^*)$, если они являются решениями включений:

$$\tilde{s}^*(v_s) \in \arg\max_{s\in[0,1]} \int_{\{v_b\in[0,1]:\, \tilde{b}(v_b)\geq s\}} \left(\frac{s+\tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b \,,$$

$$\tilde{b}^*(v_b) \in \arg\max_{b\in[0,1]} \int_{\{v_s\in[0,1]:\, b\geq\tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s)+b}{2} \right) dv_s \,.$$

Равновесие в байесовской игре «парные торги»

$$\phi_s(s,b;v_s) = \begin{cases} (s+b)/2 - v_s, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases}$$

$$\phi_b(s,b;v_b) = \begin{cases} v_b - (s+b)/2, & \text{если } b \geq s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases}$$

Определение

Байесовские стратегии продавца $\tilde{s}^*(v_s)$ и покупателя $\tilde{b}^*(v_b)$ образуют *байесовскую ситуацию равновесия* $(\tilde{s}^*, \tilde{b}^*)$, если они являются решениями включений:

$$\tilde{s}^*(v_s) \in \arg\max_{s\in[0,1]} \int_{\{v_b\in[0,1]:\, \tilde{b}(v_b)\geq s\}} \left(\frac{s+\tilde{b}(v_b)}{2} - v_s\right) dv_b\,,$$

$$\tilde{b}^*(v_b) \in \arg\max_{b\in[0,1]} \int_{\{v_s\in[0,1]:\, b\geq\tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s)+b}{2}\right) dv_s\,.$$

Пороговые равновесия

- Для любого фиксированного $x \in (0,1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:

$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases} \quad \tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$

- Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти.
- В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрых.
- Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x,
- и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$,
- или объявить цену 0 (не покупать), если $v_b < x$.
- Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$.
- Аналогично можно обосновать то, что страт. продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является опт. ответом на страт. покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

Пороговые равновесия

- Для любого фиксированного $x \in (0,1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:

$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases} \quad \tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$

- Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти.
- В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрых.
- Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x,
- и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$,
- или объявить цену 0 (не покупать), если $v_b < x$.
- Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$.
- Аналогично можно обосновать то, что страт. продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является опт. ответом на страт. покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

Пороговые равновесия

- Для любого фиксированного $x \in (0,1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:

$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases} \qquad \tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$

- Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти.
- В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрых.
- Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x,
- и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$,
- или объявить цену 0 (не покупать), если $v_b < x$.
- Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$.
- Аналогично можно обосновать то, что страт. продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является опт. ответом на страт. покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

Пороговые равновесия

- Для любого фиксированного $x \in (0,1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:

$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases} \quad \tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$

- Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти.
- В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрых.
- Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x,
- и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$,
- или объявить цену 0 (не покупать), если $v_b < x$.
- Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$.
- Аналогично можно обосновать то, что страт. продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является опт. ответом на страт. покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

Пороговые равновесия

- Для любого фиксированного $x \in (0,1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:
$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases} \quad \tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$
- Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти.
- В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрых.
- Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x,
- и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$,
- или объявить цену 0 (не покупать), если $v_b < x$.
- Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$.
- Аналогично можно обосновать то, что страт. продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является опт. ответом на страт. покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

Пороговые равновесия

- Для любого фиксированного $x \in (0,1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:
$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases} \quad \tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$
- Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти.
- В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрых.
- Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x,
- и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$,
- или объявить цену 0 (не покупать), если $v_b < x$.
- Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$.
- Аналогично можно обосновать то, что страт. продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является опт. ответом на страт. покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

Пороговые равновесия

- Для любого фиксированного $x \in (0,1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:
$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases} \quad \tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$
- Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти.
- В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрых.
- Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x,
- и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$,
- или объявить цену 0 (не покупать), если $v_b < x$.
- Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$.
- Аналогично можно обосновать то, что страт. продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является опт. ответом на страт. покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

Пороговые равновесия

- Для любого фиксированного $x \in (0,1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:
$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases} \quad \tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$
- Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти.
- В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрых.
- Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x,
- и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$,
- или объявить цену 0 (не покупать), если $v_b < x$.
- Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$.
- Аналогично можно обосновать то, что страт. продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является опт. ответом на страт. покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

Пороговые равновесия

- Для любого фиксированного $x \in (0,1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:
$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases} \quad \tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$
- Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти.
- В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрых.
- Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x,
- и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$,
- или объявить цену 0 (не покупать), если $v_b < x$.
- Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$.
- Аналогично можно обосновать то, что страт. продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является опт. ответом на страт. покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

Пороговые равновесия

- Для любого фиксированного $x \in (0,1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:
$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases} \quad \tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$
- Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти.
- В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрых.
- Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x,
- и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$,
- или объявить цену 0 (не покупать), если $v_b < x$.
- Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$.
- Аналогично можно обосновать то, что страт. продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является опт. ответом на страт. покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

Содержание

Линейные стратегии

- Кроме пороговых равновесий в игре «парные торги» имеются и другие равновесия.
- Причем, задача поиска всех равновесий до сих пор не решена.
- Мы будем искать байесовскую ситуацию равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$,
- когда обе байесовские стратегии $\tilde{s}$ и $\tilde{b}$ являются линейными функциями оценок игроков:
$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b,$$
- где a_s, c_s, a_b и c_b неизвестные константы, которые мы собираемся определить.
- Логично предположить, что $c_s > 0$ и $c_b > 0$.

Линейные стратегии

- Кроме пороговых равновесий в игре «парные торги» имеются и другие равновесия.
- Причем, задача поиска всех равновесий до сих пор не решена.
- Мы будем искать байесовскую ситуацию равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$,
- когда обе байесовские стратегии $\tilde{s}$ и $\tilde{b}$ являются линейными функциями оценок игроков:
$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b,$$
- где a_s, c_s, a_b и c_b неизвестные константы, которые мы собираемся определить.
- Логично предположить, что $c_s > 0$ и $c_b > 0$.

Линейные стратегии

- Кроме пороговых равновесий в игре «парные торги» имеются и другие равновесия.
- Причем, задача поиска всех равновесий до сих пор не решена.
- Мы будем искать байесовскую ситуацию равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$,
- когда обе байесовские стратегии $\tilde{s}$ и $\tilde{b}$ являются линейными функциями оценок игроков:
$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b,$$
- где a_s, c_s, a_b и c_b неизвестные константы, которые мы собираемся определить.
- Логично предположить, что $c_s > 0$ и $c_b > 0$.

Линейные стратегии

- Кроме пороговых равновесий в игре «парные торги» имеются и другие равновесия.
- Причем, задача поиска всех равновесий до сих пор не решена.
- Мы будем искать байесовскую ситуацию равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$,
- когда обе байесовские стратегии $\tilde{s}$ и $\tilde{b}$ являются линейными функциями оценок игроков:
$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b,$$
- где a_s, c_s, a_b и c_b неизвестные константы, которые мы собираемся определить.
- Логично предположить, что $c_s > 0$ и $c_b > 0$.

Линейные стратегии

- Кроме пороговых равновесий в игре «парные торги» имеются и другие равновесия.
- Причем, задача поиска всех равновесий до сих пор не решена.
- Мы будем искать байесовскую ситуацию равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$,
- когда обе байесовские стратегии $\tilde{s}$ и $\tilde{b}$ являются линейными функциями оценок игроков:
$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b,$$
- где a_s, c_s, a_b и c_b неизвестные константы, которые мы собираемся определить.
- Логично предположить, что $c_s > 0$ и $c_b > 0$.

Линейные стратегии

- Кроме пороговых равновесий в игре «парные торги» имеются и другие равновесия.
- Причем, задача поиска всех равновесий до сих пор не решена.
- Мы будем искать байесовскую ситуацию равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$,
- когда обе байесовские стратегии $\tilde{s}$ и $\tilde{b}$ являются линейными функциями оценок игроков:

$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b,$$

- где a_s, c_s, a_b и c_b неизвестные константы, которые мы собираемся определить.
- Логично предположить, что $c_s > 0$ и $c_b > 0$.

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} = \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s-a_b)/c_b, 1]$, то

$$
\begin{aligned}
u_s(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_b \in [0,1]:\, \tilde{b}(v_b) \geq s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b \\
&= \int_{(s-a_b)/c_b}^{1} \left(\frac{s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s \right) dv_b \\
&= \left(v_b \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b v_b^2}{4} \right) \Bigg|_{(s-a_b)/c_b}^{1} \\
&= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b}{4} \left(1 - \frac{(s-a_b)^2}{c_b^2} \right) \\
&= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s \right).
\end{aligned}
$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} =$ $= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s - a_b)/c_b, 1]$, то

$$
\begin{aligned}
u_s(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b \\
&= \int_{(s-a_b)/c_b}^{1} \left(\frac{s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s \right) dv_b \\
&= \left(v_b \, \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b v_b^2}{4} \right) \Bigg|_{(s-a_b)/c_b}^{1} \\
&= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b}{4} \left(1 - \frac{(s - a_b)^2}{c_b^2} \right) \\
&= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s \right).
\end{aligned}
$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} =$
$= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s - a_b)/c_b, 1]$, то

$$
\begin{aligned}
u_s(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_b \in [0,1]:\, \tilde{b}(v_b) \geq s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b \\
&= \int_{(s-a_b)/c_b}^{1} \left(\frac{s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s \right) dv_b \\
&= \left(v_b \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b v_b^2}{4} \right) \Bigg|_{(s-a_b)/c_b}^{1} \\
&= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b}{4} \left(1 - \frac{(s - a_b)^2}{c_b^2} \right) \\
&= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s \right).
\end{aligned}
$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} =$
$= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s-a_b)/c_b, 1]$, то

$$u_s(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b$$

$$= \int_{(s-a_b)/c_b}^{1} \left(\frac{s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s \right) dv_b$$

$$= \left(v_b \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b v_b^2}{4} \right) \Bigg|_{(s-a_b)/c_b}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{s-a_b}{c_b}\right) \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b}{4} \left(1 - \frac{(s-a_b)^2}{c_b^2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{s-a_b}{c_b}\right) \left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right).$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \ge s\} =$
$= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \ge s\} = [(s - a_b)/c_b, 1]$, то

$$u_s(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \ge s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b$$

$$= \int_{(s-a_b)/c_b}^{1} \left(\frac{s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s \right) dv_b$$

$$= \left(v_b \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b v_b^2}{4} \right) \Bigg|_{(s-a_b)/c_b}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right) \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b}{4} \left(1 - \frac{(s - a_b)^2}{c_b^2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right) \left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s \right).$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} =$
$$= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s - a_b)/c_b, 1],$$ то

$$u_s(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_b \in [0,1] :\, \tilde{b}(v_b) \geq s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b$$
$$= \int_{(s-a_b)/c_b}^{1} \left(\frac{s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s \right) dv_b$$
$$= \left(v_b \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b v_b^2}{4} \right) \Bigg|_{(s-a_b)/c_b}^{1}$$
$$= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b}{4} \left(1 - \frac{(s - a_b)^2}{c_b^2} \right)$$
$$= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s \right).$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} =$
$= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s-a_b)/c_b, 1]$, то

$$u_s(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b$$

$$= \int_{(s-a_b)/c_b}^{1} \left(\frac{s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s \right) dv_b$$

$$= \left(v_b \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b v_b^2}{4} \right) \Bigg|_{(s-a_b)/c_b}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{s-a_b}{c_b}\right) \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b}{4} \left(1 - \frac{(s-a_b)^2}{c_b^2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{s-a_b}{c_b}\right) \left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right).$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} =$
$= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s - a_b)/c_b, 1]$, то

$$u_s(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_b \in [0,1] :\, \tilde{b}(v_b) \geq s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b$$

$$= \int_{(s-a_b)/c_b}^{1} \left(\frac{s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s \right) dv_b$$

$$= \left(v_b \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b v_b^2}{4} \right) \Bigg|_{(s-a_b)/c_b}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right) \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b}{4} \left(1 - \frac{(s - a_b)^2}{c_b^2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right) \left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right).$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \ge s\} =$
  $= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \ge s\} = [(s - a_b)/c_b, 1]$, то

$$u_s(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_b \in [0,1]:\, \tilde{b}(v_b) \ge s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b$$

$$= \int_{(s-a_b)/c_b}^{1} \left(\frac{s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s \right) dv_b$$

$$= \left(v_b \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b v_b^2}{4} \right) \Bigg|_{(s-a_b)/c_b}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b}{4} \left(1 - \frac{(s - a_b)^2}{c_b^2} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s \right).$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} =$
$$= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s - a_b)/c_b, 1], \text{ то}$$
$$u_s(s) = \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right)\left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right).$$
- Максимизируя $u(s)$ по $s \in [0,1]$, найдем $\tilde{s}(v_s)$.
- Запишем условие оптимальности первого порядка:
$$u_s'(s) = -\frac{1}{c_b}\left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right) + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right) = 0.$$
- Решая данное уравнение относительно s, найдем
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3}.$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} =$
$$= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s - a_b)/c_b, 1],$$ то
$$u_s(s) = \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right)\left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right).$$
- Максимизируя $u(s)$ по $s \in [0,1]$, найдем $\tilde{s}(v_s)$.
- Запишем условие оптимальности первого порядка:
$$u_s'(s) = -\frac{1}{c_b}\left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right) + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right) = 0.$$
- Решая данное уравнение относительно s, найдем
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3}.$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} =$
$$= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s - a_b)/c_b, 1],$$ то
$$u_s(s) = \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right)\left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right).$$
- Максимизируя $u(s)$ по $s \in [0,1]$, найдем $\tilde{s}(v_s)$.
- Запишем условие оптимальности первого порядка:
$$u_s'(s) = -\frac{1}{c_b}\left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right) + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right) = 0.$$
- Решая данное уравнение относительно s, найдем
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3}.$$

Оптимальный ответ продавца

- Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя.
- Поскольку $\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \geq s\} =$
$= \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \geq s\} = [(s - a_b)/c_b, 1]$, то
$$u_s(s) = \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right)\left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right).$$
- Максимизируя $u(s)$ по $s \in [0,1]$, найдем $\tilde{s}(v_s)$.
- Запишем условие оптимальности первого порядка:
$$u_s'(s) = -\frac{1}{c_b}\left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right) + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right) = 0.$$
- Решая данное уравнение относительно s, найдем
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3}.$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} = \{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s]$, то

$$
\begin{aligned}
u_b(b) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2} \right) dv_s \\
&= \int_0^{(b-a_s)/c_s} \left(v_b - \frac{a_s + c_s v_s + b}{2} \right) dv_s \\
&= \left(v_s \frac{2v_b - a_s - b}{2} - \frac{c_s v_s^2}{4} \right) \Bigg|_0^{(b-a_s)/c_s} \\
&= \frac{(b - a_s)(2v_b - a_s - b)}{2c_s} - \frac{c_s (b - a_s)^2}{4c_s^2} \\
&= \frac{b - a_s}{c_s} \left(v_b - \frac{3b + a_s}{4} \right).
\end{aligned}
$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} = \{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b-a_s)/c_s]$, то

$$
\begin{aligned}
u_b(b) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2} \right) dv_s \\
&= \int_0^{(b-a_s)/c_s} \left(v_b - \frac{a_s + c_s v_s + b}{2} \right) dv_s \\
&= \left(v_s \frac{2v_b - a_s - b}{2} - \frac{c_s v_s^2}{4} \right) \Bigg|_0^{(b-a_s)/c_s} \\
&= \frac{(b-a_s)(2v_b - a_s - b)}{2c_s} - \frac{c_s (b-a_s)^2}{4c_s^2} \\
&= \frac{b-a_s}{c_s} \left(v_b - \frac{3b + a_s}{4} \right).
\end{aligned}
$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} =$

$$\{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s],$$ то

$$u_b(b) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2} \right) dv_s$$

$$= \int_0^{(b-a_s)/c_s} \left(v_b - \frac{a_s + c_s v_s + b}{2} \right) dv_s$$

$$= \left(v_s \frac{2v_b - a_s - b}{2} - \frac{c_s v_s^2}{4} \right) \Big|_0^{(b-a_s)/c_s}$$

$$= \frac{(b - a_s)(2v_b - a_s - b)}{2c_s} - \frac{c_s (b - a_s)^2}{4c_s^2}$$

$$= \frac{b - a_s}{c_s} \left(v_b - \frac{3b + a_s}{4} \right).$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} =$
$$\{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s],$$ то

$$\begin{aligned}
u_b(b) &\overset{\text{def}}{=} \int_{\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2}\right) dv_s \\
&= \int_0^{(b-a_s)/c_s} \left(v_b - \frac{a_s + c_s v_s + b}{2}\right) dv_s \\
&= \left(v_s \frac{2v_b - a_s - b}{2} - \frac{c_s v_s^2}{4}\right)\Bigg|_0^{(b-a_s)/c_s} \\
&= \frac{(b - a_s)(2v_b - a_s - b)}{2c_s} - \frac{c_s (b - a_s)^2}{4c_s^2} \\
&= \frac{b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right).
\end{aligned}$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} =$

$$\{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s],$$ то

$$u_b(b) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2} \right) dv_s$$

$$= \int_0^{(b-a_s)/c_s} \left(v_b - \frac{a_s + c_s v_s + b}{2} \right) dv_s$$

$$= \left(v_s \frac{2v_b - a_s - b}{2} - \frac{c_s v_s^2}{4} \right) \Bigg|_0^{(b-a_s)/c_s}$$

$$= \frac{(b - a_s)(2v_b - a_s - b)}{2c_s} - \frac{c_s (b - a_s)^2}{4c_s^2}$$

$$= \frac{b - a_s}{c_s} \left(v_b - \frac{3b + a_s}{4} \right).$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} = \{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s]$, то

$$
\begin{aligned}
u_b(b) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_s \in [0,1] :\, b \geq \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2} \right) dv_s \\
&= \int_0^{(b-a_s)/c_s} \left(v_b - \frac{a_s + c_s v_s + b}{2} \right) dv_s \\
&= \left(v_s \frac{2v_b - a_s - b}{2} - \frac{c_s v_s^2}{4} \right) \Bigg|_0^{(b-a_s)/c_s} \\
&= \frac{(b - a_s)(2v_b - a_s - b)}{2c_s} - \frac{c_s (b - a_s)^2}{4c_s^2} \\
&= \frac{b - a_s}{c_s} \left(v_b - \frac{3b + a_s}{4} \right).
\end{aligned}
$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} = \{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s]$, то

$$u_b(b) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2}\right) dv_s$$

$$= \int_0^{(b-a_s)/c_s} \left(v_b - \frac{a_s + c_s v_s + b}{2}\right) dv_s$$

$$= \left(v_s \frac{2v_b - a_s - b}{2} - \frac{c_s v_s^2}{4}\right)\Bigg|_0^{(b-a_s)/c_s}$$

$$= \frac{(b - a_s)(2v_b - a_s - b)}{2c_s} - \frac{c_s(b - a_s)^2}{4c_s^2}$$

$$= \frac{b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right).$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \ge \tilde{s}(v_s)\} = \{v_s \in [0,1] : b \ge a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s]$, то

$$
\begin{aligned}
u_b(b) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_s \in [0,1] : b \ge \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2} \right) dv_s \\
&= \int_0^{(b-a_s)/c_s} \left(v_b - \frac{a_s + c_s v_s + b}{2} \right) dv_s \\
&= \left(v_s \frac{2v_b - a_s - b}{2} - \frac{c_s v_s^2}{4} \right) \Bigg|_0^{(b-a_s)/c_s} \\
&= \frac{(b - a_s)(2v_b - a_s - b)}{2c_s} - \frac{c_s (b - a_s)^2}{4c_s^2} \\
&= \frac{b - a_s}{c_s} \left(v_b - \frac{3b + a_s}{4} \right).
\end{aligned}
$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \ge \tilde{s}(v_s)\} = \{v_s \in [0,1] : b \ge a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s]$, то

$$u_b(b) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_s \in [0,1] : b \ge \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2}\right) dv_s$$

$$= \int_0^{(b-a_s)/c_s} \left(v_b - \frac{a_s + c_s v_s + b}{2}\right) dv_s$$

$$= \left(v_s \frac{2v_b - a_s - b}{2} - \frac{c_s v_s^2}{4}\right)\Bigg|_0^{(b-a_s)/c_s}$$

$$= \frac{(b - a_s)(2v_b - a_s - b)}{2c_s} - \frac{c_s(b - a_s)^2}{4c_s^2}$$

$$= \frac{b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right).$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} =$
$\{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s]$, то
$$u_b(b) = \frac{b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right).$$
- Максимизируя $u_b(b)$ по $b \in [0,1]$, найдем $\tilde{b}(v_b)$.
- Запишем условие оптимальности первого порядка:
$$u_b'(b) = \frac{1}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right) - \frac{3(b - a_s)}{4c_s} = 0.$$
- Решая данное уравнение относительно b, найдем
$$\tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \ge \tilde{s}(v_s)\} =$ $\{v_s \in [0,1] : b \ge a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s]$, то
$$u_b(b) = \frac{b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right).$$
- Максимизируя $u_b(b)$ по $b \in [0,1]$, найдем $\tilde{b}(v_b)$.
- Запишем условие оптимальности первого порядка:
$$u_b'(b) = \frac{1}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right) - \frac{3(b - a_s)}{4c_s} = 0.$$
- Решая данное уравнение относительно b, найдем
$$\tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} =$
$\{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s]$, то
$$u_b(b) = \frac{b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right).$$
- Максимизируя $u_b(b)$ по $b \in [0,1]$, найдем $\tilde{b}(v_b)$.
- Запишем условие оптимальности первого порядка:
$$u_b'(b) = \frac{1}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right) - \frac{3(b - a_s)}{4c_s} = 0.$$
- Решая данное уравнение относительно b, найдем
$$\tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$

Оптимальный ответ покупателя

- Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байес. стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца.
- Поскольку $\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} =$
$$\{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s],$$ то
$$u_b(b) = \frac{b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right).$$
- Максимизируя $u_b(b)$ по $b \in [0,1]$, найдем $\tilde{b}(v_b)$.
- Запишем условие оптимальности первого порядка:
$$u_b'(b) = \frac{1}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right) - \frac{3(b - a_s)}{4c_s} = 0.$$
- Решая данное уравнение относительно b, найдем
$$\tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$

Равновесие в линейных стратегиях

- Подставляя в
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3} \quad \text{и} \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$
- выражения
$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b,$$
- получим систему:
$$a_s + c_s v_s = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3},$$
$$a_b + c_b v_b = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$
- Откуда $c_s = 2/3$, $c_b = 2/3$, $a_s = (a_b + c_b)/3$, $a_b = a_s/3$ и, следовательно, $a_s = 1/4$, $a_b = 1/12$.
- Теперь мы имеем
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}.$$

Равновесие в линейных стратегиях

- Подставляя в
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3} \quad \text{и} \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$
- выражения
$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b,$$
- получим систему:
$$a_s + c_s v_s = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3},$$
$$a_b + c_b v_b = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$
- Откуда $c_s = 2/3$, $c_b = 2/3$, $a_s = (a_b + c_b)/3$, $a_b = a_s/3$ и, следовательно, $a_s = 1/4$, $a_b = 1/12$.
- Теперь мы имеем
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}.$$

Равновесие в линейных стратегиях

- Подставляя в
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3} \quad \text{и} \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$
- выражения
$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b,$$
- получим систему:
$$a_s + c_s v_s = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3},$$
$$a_b + c_b v_b = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$
- Откуда $c_s = 2/3$, $c_b = 2/3$, $a_s = (a_b + c_b)/3$, $a_b = a_s/3$ и, следовательно, $a_s = 1/4$, $a_b = 1/12$.
- Теперь мы имеем
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}.$$

Равновесие в линейных стратегиях

- Подставляя в
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3} \quad \text{и} \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$
- выражения
$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b,$$
- получим систему:
$$a_s + c_s v_s = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3},$$
$$a_b + c_b v_b = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.$$
- Откуда $c_s = 2/3$, $c_b = 2/3$, $a_s = (a_b + c_b)/3$, $a_b = a_s/3$ и, следовательно, $a_s = 1/4$, $a_b = 1/12$.
- Теперь мы имеем
$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}.$$

Равновесие в линейных стратегиях неэффективно

Теорема

В игре «парные торги» пара байесовских стратегий продавца и покупателя

$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}$$

образует байесовскую ситуацию равновесия.

- В ситуации равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$ сделка состоится только тогда, когда
$$\tilde{b}(v_b) - \tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} - \frac{2}{3}v_s - \frac{1}{4} \geq 0,$$
- или
$$v_b - v_s \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$
- Это неравенство означает, что равновесие в линейных стратегиях *неэффективно*,
- поскольку сделка не состоится во многих случаях, когда обоим, продавцу и покупателю, сделка выгодна.

Равновесие в линейных стратегиях неэффективно

Теорема

В игре «парные торги» пара байесовских стратегий продавца и покупателя

$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}$$

образует байесовскую ситуацию равновесия.

- В ситуации равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$ сделка состоится только тогда, когда
$$\tilde{b}(v_b) - \tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} - \frac{2}{3}v_s - \frac{1}{4} \geq 0,$$
- или
$$v_b - v_s \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$
- Это неравенство означает, что равновесие в линейных стратегиях *неэффективно*,
- поскольку сделка не состоится во многих случаях, когда обоим, продавцу и покупателю, сделка выгодна.

Равновесие в линейных стратегиях неэффективно

Теорема

В игре «парные торги» пара байесовских стратегий продавца и покупателя

$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}$$

образует байесовскую ситуацию равновесия.

- В ситуации равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$ сделка состоится только тогда, когда
$$\tilde{b}(v_b) - \tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} - \frac{2}{3}v_s - \frac{1}{4} \geq 0,$$
- или
$$v_b - v_s \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$
- Это неравенство означает, что равновесие в линейных стратегиях *неэффективно*,
- поскольку сделка не состоится во многих случаях, когда обоим, продавцу и покупателю, сделка выгодна.

Равновесие в линейных стратегиях неэффективно

Теорема

В игре «парные торги» пара байесовских стратегий продавца и покупателя

$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}$$

образует байесовскую ситуацию равновесия.

- В ситуации равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$ сделка состоится только тогда, когда
$$\tilde{b}(v_b) - \tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} - \frac{2}{3}v_s - \frac{1}{4} \geq 0,$$
- или
$$v_b - v_s \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$
- Это неравенство означает, что равновесие в линейных стратегиях *неэффективно*,
- поскольку сделка не состоится во многих случаях, когда обоим, продавцу и покупателю, сделка выгодна.

Равновесие в линейных стратегиях неэффективно

Теорема

В игре «парные торги» пара байесовских стратегий продавца и покупателя

$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}$$

образует байесовскую ситуацию равновесия.

- В ситуации равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$ сделка состоится только тогда, когда
$$\tilde{b}(v_b) - \tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} - \frac{2}{3}v_s - \frac{1}{4} \geq 0,$$
- или
$$v_b - v_s \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$
- Это неравенство означает, что равновесие в линейных стратегиях *неэффективно*,
- поскольку сделка не состоится во многих случаях, когда обоим, продавцу и покупателю, сделка выгодна.

Равновесие в линейных стратегиях неэффективно

Теорема

В игре «парные торги» пара байесовских стратегий продавца и покупателя

$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}$$

образует байесовскую ситуацию равновесия.

- В ситуации равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$ сделка состоится только тогда, когда
$$\tilde{b}(v_b) - \tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} - \frac{2}{3}v_s - \frac{1}{4} \geq 0,$$
- или
$$v_b - v_s \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$
- Это неравенство означает, что равновесие в линейных стратегиях *неэффективно*,
- поскольку сделка не состоится во многих случаях, когда обоим, продавцу и покупателю, сделка выгодна.

Содержание

Война до истощения

- Два игрока борются за приз. Каждый игрок имеет свою оценку стоимости данного приза, но оппонент данной оценки не знает.
- Игрок 1 полагает, что оценка игрока 2 есть случайная величина v_2 со значениями из $[0, 1]$ и плотностью f.
- Игрок 2 считает, что оценка игрока 1 есть случайная величина v_1 со значениями из $[0, 1]$ и плотностью f.
- За минуту сражения каждый игрок тратит сумму c.
- Как долго игрок i с оценкой v_i должен сражаться, прежде чем уступить?

Война до истощения

- Два игрока борются за приз. Каждый игрок имеет свою оценку стоимости данного приза, но оппонент данной оценки не знает.
- Игрок 1 полагает, что оценка игрока 2 есть случайная величина v_2 со значениями из $[0, 1]$ и плотностью f.
- Игрок 2 считает, что оценка игрока 1 есть случайная величина v_1 со значениями из $[0, 1]$ и плотностью f.
- За минуту сражения каждый игрок тратит сумму c.
- Как долго игрок i с оценкой v_i должен сражаться, прежде чем уступить?

Война до истощения

- Два игрока борются за приз. Каждый игрок имеет свою оценку стоимости данного приза, но оппонент данной оценки не знает.
- Игрок 1 полагает, что оценка игрока 2 есть случайная величина v_2 со значениями из $[0,1]$ и плотностью f.
- Игрок 2 считает, что оценка игрока 1 есть случайная величина v_1 со значениями из $[0,1]$ и плотностью f.
- За минуту сражения каждый игрок тратит сумму c.
- Как долго игрок i с оценкой v_i должен сражаться, прежде чем уступить?

Война до истощения

- Два игрока борются за приз. Каждый игрок имеет свою оценку стоимости данного приза, но оппонент данной оценки не знает.
- Игрок 1 полагает, что оценка игрока 2 есть случайная величина v_2 со значениями из $[0, 1]$ и плотностью f.
- Игрок 2 считает, что оценка игрока 1 есть случайная величина v_1 со значениями из $[0, 1]$ и плотностью f.
- За минуту сражения каждый игрок тратит сумму c.
- Как долго игрок i с оценкой v_i должен сражаться, прежде чем уступить?

Война до истощения

- Два игрока борются за приз. Каждый игрок имеет свою оценку стоимости данного приза, но оппонент данной оценки не знает.
- Игрок 1 полагает, что оценка игрока 2 есть случайная величина v_2 со значениями из $[0,1]$ и плотностью f.
- Игрок 2 считает, что оценка игрока 1 есть случайная величина v_1 со значениями из $[0,1]$ и плотностью f.
- За минуту сражения каждый игрок тратит сумму c.
- Как долго игрок i с оценкой v_i должен сражаться, прежде чем уступить?

Торги на аукционе

- Эту игру можно также проинтерпретировать как торги на аукционе, в котором два участника хотят купить некоторый предмет.
- Торги начинаются по сигналу и продолжаются до момента t,
- когда один из участников не подаст сигнал, свидетельствующий о том,
- что он отказывается от дальнейшей борьбы;
- его оппонент покупает предмет, заплатив за него ct.

Торги на аукционе

- Эту игру можно также проинтерпретировать как торги на аукционе, в котором два участника хотят купить некоторый предмет.
- Торги начинаются по сигналу и продолжаются до момента t,
- когда один из участников не подаст сигнал, свидетельствующий о том,
- что он отказывается от дальнейшей борьбы;
- его оппонент покупает предмет, заплатив за него ct.

Торги на аукционе

- Эту игру можно также проинтерпретировать как торги на аукционе, в котором два участника хотят купить некоторый предмет.
- Торги начинаются по сигналу и продолжаются до момента t,
- когда один из участников не подаст сигнал, свидетельствующий о том,
- что он отказывается от дальнейшей борьбы;
- его оппонент покупает предмет, заплатив за него ct.

Торги на аукционе

- Эту игру можно также проинтерпретировать как торги на аукционе, в котором два участника хотят купить некоторый предмет.
- Торги начинаются по сигналу и продолжаются до момента t,
- когда один из участников не подаст сигнал, свидетельствующий о том,
- что он отказывается от дальнейшей борьбы;
- его оппонент покупает предмет, заплатив за него ct.

Торги на аукционе

- Эту игру можно также проинтерпретировать как торги на аукционе, в котором два участника хотят купить некоторый предмет.
- Торги начинаются по сигналу и продолжаются до момента t,
- когда один из участников не подаст сигнал, свидетельствующий о том,
- что он отказывается от дальнейшей борьбы;
- его оппонент покупает предмет, заплатив за него ct.

Байесовская игра «война до истощения»

- В этой игре двух лиц стратегией игрока i является выбор момента t_i, когда нужно прекратить бороться.
- Поэтому $S_1 = S_2 = \mathbb{R}_+$.
- Тип игрока опред. его оценкой приза: $T_1 = T_2 = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны:

$$\mu_1(v_2 \in [a, b]|v_1) = \mu_2(v_1 \in [a, b]|v_2) = F(b) - F(a),$$

- где функция $F(x) = \int_0^x f(z)\, dz$ есть распределение случайной величины с плотностью f.
- В ситуации (t_1, t_2) выигрыши игрока 1 типа v_1 и игрока 2 типа v_2 соответственно равны:

$$\phi_1(t_1, t_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - ct_2, & \text{если } t_1 \geq t_2, \\ -ct_1, & \text{если } t_1 < t_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(t_1, t_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - ct_1, & \text{если } t_2 \geq t_1, \\ -ct_2, & \text{если } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Байесовская игра «война до истощения»

- В этой игре двух лиц стратегией игрока i является выбор момента t_i, когда нужно прекратить бороться.
- Поэтому $S_1 = S_2 = \mathbb{R}_+$.
- Тип игрока опред. его оценкой приза: $T_1 = T_2 = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны:

$$\mu_1(v_2 \in [a, b] | v_1) = \mu_2(v_1 \in [a, b] | v_2) = F(b) - F(a),$$

- где функция $F(x) = \int_0^x f(z)\,dz$ есть распределение случайной величины с плотностью f.
- В ситуации (t_1, t_2) выигрыши игрока 1 типа v_1 и игрока 2 типа v_2 соответственно равны:

$$\phi_1(t_1, t_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - ct_2, & \text{если } t_1 \geq t_2, \\ -ct_1, & \text{если } t_1 < t_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(t_1, t_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - ct_1, & \text{если } t_2 \geq t_1, \\ -ct_2, & \text{если } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Байесовская игра «война до истощения»

- В этой игре двух лиц стратегией игрока i является выбор момента t_i, когда нужно прекратить бороться.
- Поэтому $S_1 = S_2 = \mathbb{R}_+$.
- Тип игрока опред. его оценкой приза: $T_1 = T_2 = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны:

$$\mu_1(v_2 \in [a, b] | v_1) = \mu_2(v_1 \in [a, b] | v_2) = F(b) - F(a),$$

- где функция $F(x) = \int_0^x f(z)\, dz$ есть распределение случайной величины с плотностью f.
- В ситуации (t_1, t_2) выигрыши игрока 1 типа v_1 и игрока 2 типа v_2 соответственно равны:

$$\phi_1(t_1, t_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - ct_2, & \text{если } t_1 \geq t_2, \\ -ct_1, & \text{если } t_1 < t_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(t_1, t_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - ct_1, & \text{если } t_2 \geq t_1, \\ -ct_2, & \text{если } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Байесовская игра «война до истощения»

- В этой игре двух лиц стратегией игрока i является выбор момента t_i, когда нужно прекратить бороться.
- Поэтому $S_1 = S_2 = \mathbb{R}_+$.
- Тип игрока опред. его оценкой приза: $T_1 = T_2 = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны:

$$\mu_1(v_2 \in [a, b] | v_1) = \mu_2(v_1 \in [a, b] | v_2) = F(b) - F(a),$$

- где функция $F(x) = \int_0^x f(z)\, dz$ есть распределение случайной величины с плотностью f.
- В ситуации (t_1, t_2) выигрыши игрока 1 типа v_1 и игрока 2 типа v_2 соответственно равны:

$$\phi_1(t_1, t_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - ct_2, & \text{если } t_1 \geq t_2, \\ -ct_1, & \text{если } t_1 < t_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(t_1, t_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - ct_1, & \text{если } t_2 \geq t_1, \\ -ct_2, & \text{если } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Байесовская игра «война до истощения»

- В этой игре двух лиц стратегией игрока i является выбор момента t_i, когда нужно прекратить бороться.
- Поэтому $S_1 = S_2 = \mathbb{R}_+$.
- Тип игрока опред. его оценкой приза: $T_1 = T_2 = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны:

$$\mu_1(v_2 \in [a, b] | v_1) = \mu_2(v_1 \in [a, b] | v_2) = F(b) - F(a),$$

- где функция $F(x) = \int_0^x f(z)\, dz$ есть распределение случайной величины с плотностью f.
- В ситуации (t_1, t_2) выигрыши игрока 1 типа v_1 и игрока 2 типа v_2 соответственно равны:

$$\phi_1(t_1, t_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - ct_2, & \text{если } t_1 \geq t_2, \\ -ct_1, & \text{если } t_1 < t_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(t_1, t_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - ct_1, & \text{если } t_2 \geq t_1, \\ -ct_2, & \text{если } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Байесовская игра «война до истощения»

- В этой игре двух лиц стратегией игрока i является выбор момента t_i, когда нужно прекратить бороться.
- Поэтому $S_1 = S_2 = \mathbb{R}_+$.
- Тип игрока опред. его оценкой приза: $T_1 = T_2 = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны:
$$\mu_1(v_2 \in [a, b] | v_1) = \mu_2(v_1 \in [a, b] | v_2) = F(b) - F(a),$$
- где функция $F(x) = \int_0^x f(z)\,dz$ есть распределение случайной величины с плотностью f.
- В ситуации (t_1, t_2) выигрыши игрока 1 типа v_1 и игрока 2 типа v_2 соответственно равны:

$$\phi_1(t_1, t_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - ct_2, & \text{если } t_1 \geq t_2, \\ -ct_1, & \text{если } t_1 < t_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(t_1, t_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - ct_1, & \text{если } t_2 \geq t_1, \\ -ct_2, & \text{если } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Байесовская игра «война до истощения»

- В этой игре двух лиц стратегией игрока i является выбор момента t_i, когда нужно прекратить бороться.
- Поэтому $S_1 = S_2 = \mathbb{R}_+$.
- Тип игрока опред. его оценкой приза: $T_1 = T_2 = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны:

$$\mu_1(v_2 \in [a, b] | v_1) = \mu_2(v_1 \in [a, b] | v_2) = F(b) - F(a),$$

- где функция $F(x) = \int_0^x f(z)\, dz$ есть распределение случайной величины с плотностью f.
- В ситуации (t_1, t_2) выигрыши игрока 1 типа v_1 и игрока 2 типа v_2 соответственно равны:

$$\phi_1(t_1, t_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - ct_2, & \text{если } t_1 \geq t_2, \\ -ct_1, & \text{если } t_1 < t_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(t_1, t_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - ct_1, & \text{если } t_2 \geq t_1, \\ -ct_2, & \text{если } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Байесовская игра «война до истощения»

- В этой игре двух лиц стратегией игрока i является выбор момента t_i, когда нужно прекратить бороться.
- Поэтому $S_1 = S_2 = \mathbb{R}_+$.
- Тип игрока опред. его оценкой приза: $T_1 = T_2 = [0, 1]$.
- Представления игроков симметричны:

$$\mu_1(v_2 \in [a, b] | v_1) = \mu_2(v_1 \in [a, b] | v_2) = F(b) - F(a),$$

- где функция $F(x) = \int_0^x f(z)\, dz$ есть распределение случайной величины с плотностью f.
- В ситуации (t_1, t_2) выигрыши игрока 1 типа v_1 и игрока 2 типа v_2 соответственно равны:

$$\phi_1(t_1, t_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - ct_2, & \text{если } t_1 \geq t_2, \\ -ct_1, & \text{если } t_1 < t_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(t_1, t_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - ct_1, & \text{если } t_2 \geq t_1, \\ -ct_2, & \text{если } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Содержание

Байесовские стратегии

- Байесовкая стратегия игрока i есть функция $\tilde{t}_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$,
- где $\tilde{t}_i(v)$ есть время прекращения борьбы игроком i типа v, $i = 1,2$.
- Мы будем предполагать, что каждая функция $\tilde{t}_i$ дифференцируема и является строго возрастающей: $\tilde{t}_i'(v) > 0$ для всех $v \in [0,1]$.
- Тогда для $\tilde{t}_i$ существует обратная функция $\tilde{t}_i^{-1}$,
- значение $x_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}_i^{-1}(t)$ которой определяет тип игрока i, прекращающего борьбу в момент t.
- Нетрудно обосновать, что игроку i типа $v = 0$ не стоит начинать борьбу.
- Поэтому $t_i(0) = x_i(0) = 0$, а $\tilde{t}_i(v) > 0$ для всех $v > 0$, и $x_i(t) > 0$ для всех $t > 0$.

Байесовские стратегии

- Байесовкая стратегия игрока i есть функция $\tilde{t}_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$,
- где $\tilde{t}_i(v)$ есть время прекращения борьбы игроком i типа v, $i = 1, 2$.
- Мы будем предполагать, что каждая функция $\tilde{t}_i$ дифференцируема и является строго возрастающей: $\tilde{t}_i'(v) > 0$ для всех $v \in [0,1]$.
- Тогда для $\tilde{t}_i$ существует обратная функция $\tilde{t}_i^{-1}$,
- значение $x_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}_i^{-1}(t)$ которой определяет тип игрока i, прекращающего борьбу в момент t.
- Нетрудно обосновать, что игроку i типа $v = 0$ не стоит начинать борьбу.
- Поэтому $t_i(0) = x_i(0) = 0$, а $\tilde{t}_i(v) > 0$ для всех $v > 0$, и $x_i(t) > 0$ для всех $t > 0$.

Байесовские стратегии

- Байесовкая стратегия игрока i есть функция $\tilde{t}_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$,
- где $\tilde{t}_i(v)$ есть время прекращения борьбы игроком i типа v, $i = 1,2$.
- Мы будем предполагать, что каждая функция $\tilde{t}_i$ дифференцируема и является строго возрастающей: $\tilde{t}_i'(v) > 0$ для всех $v \in [0,1]$.
- Тогда для $\tilde{t}_i$ существует обратная функция $\tilde{t}_i^{-1}$,
- значение $x_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}_i^{-1}(t)$ которой определяет тип игрока i, прекращающего борьбу в момент t.
- Нетрудно обосновать, что игроку i типа $v = 0$ не стоит начинать борьбу.
- Поэтому $t_i(0) = x_i(0) = 0$, а $\tilde{t}_i(v) > 0$ для всех $v > 0$, и $x_i(t) > 0$ для всех $t > 0$.

Байесовские стратегии

- Байесовкая стратегия игрока i есть функция $\tilde{t}_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$,
- где $\tilde{t}_i(v)$ есть время прекращения борьбы игроком i типа v, $i = 1, 2$.
- Мы будем предполагать, что каждая функция $\tilde{t}_i$ дифференцируема и является строго возрастающей: $\tilde{t}_i'(v) > 0$ для всех $v \in [0,1]$.
- Тогда для $\tilde{t}_i$ существует обратная функция $\tilde{t}_i^{-1}$,
- значение $x_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}_i^{-1}(t)$ которой определяет тип игрока i, прекращающего борьбу в момент t.
- Нетрудно обосновать, что игроку i типа $v = 0$ не стоит начинать борьбу.
- Поэтому $t_i(0) = x_i(0) = 0$, а $\tilde{t}_i(v) > 0$ для всех $v > 0$, и $x_i(t) > 0$ для всех $t > 0$.

Байесовские стратегии

- Байесовкая стратегия игрока i есть функция $\tilde{t}_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$,
- где $\tilde{t}_i(v)$ есть время прекращения борьбы игроком i типа v, $i = 1, 2$.
- Мы будем предполагать, что каждая функция $\tilde{t}_i$ дифференцируема и является строго возрастающей: $\tilde{t}'_i(v) > 0$ для всех $v \in [0,1]$.
- Тогда для $\tilde{t}_i$ существует обратная функция $\tilde{t}_i^{-1}$,
- значение $x_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}_i^{-1}(t)$ которой определяет тип игрока i, прекращающего борьбу в момент t.
- Нетрудно обосновать, что игроку i типа $v = 0$ не стоит начинать борьбу.
- Поэтому $t_i(0) = x_i(0) = 0$, а $\tilde{t}_i(v) > 0$ для всех $v > 0$, и $x_i(t) > 0$ для всех $t > 0$.

Байесовские стратегии

- Байесовкая стратегия игрока i есть функция $\tilde{t}_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$,
- где $\tilde{t}_i(v)$ есть время прекращения борьбы игроком i типа v, $i = 1, 2$.
- Мы будем предполагать, что каждая функция $\tilde{t}_i$ дифференцируема и является строго возрастающей: $\tilde{t}_i'(v) > 0$ для всех $v \in [0,1]$.
- Тогда для $\tilde{t}_i$ существует обратная функция $\tilde{t}_i^{-1}$,
- значение $x_i(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tilde{t}_i^{-1}(t)$ которой определяет тип игрока i, прекращающего борьбу в момент t.
- Нетрудно обосновать, что игроку i типа $v = 0$ не стоит начинать борьбу.
- Поэтому $t_i(0) = x_i(0) = 0$, а $\tilde{t}_i(v) > 0$ для всех $v > 0$, и $x_i(t) > 0$ для всех $t > 0$.

Байесовские стратегии

- Байесовкая стратегия игрока i есть функция $\tilde{t}_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$,
- где $\tilde{t}_i(v)$ есть время прекращения борьбы игроком i типа v, $i = 1, 2$.
- Мы будем предполагать, что каждая функция $\tilde{t}_i$ дифференцируема и является строго возрастающей: $\tilde{t}_i'(v) > 0$ для всех $v \in [0,1]$.
- Тогда для $\tilde{t}_i$ существует обратная функция $\tilde{t}_i^{-1}$,
- значение $x_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}_i^{-1}(t)$ которой определяет тип игрока i, прекращающего борьбу в момент t.
- Нетрудно обосновать, что игроку i типа $v = 0$ не стоит начинать борьбу.
- Поэтому $t_i(0) = x_i(0) = 0$, а $\tilde{t}_i(v) > 0$ для всех $v > 0$, и $x_i(t) > 0$ для всех $t > 0$.

Оптимальный ответ игрока 1

- Если игрок 1 прекращает борьбу в момент t_1, то
- он победит игрока 2 с типом $x_2(t_1)$ или меньшим,
- и проиграет игроку 2, чей тип больше $x_2(t_1)$.
- Игрок 1 типа v_1 находит свой оптимальный ответ на байесовскую стратегию $\tilde{t}_2(v_2)$ игрока 2, максимизируя свой ожидаемый выигрыш:

$$\max_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \int_0^{x_2(t_1)} (v_1 - ct_2(v_2))f(v_2)\, dv_2 - ct_1(1 - F(x_2(t_1))).$$

- Запишем условие оптимальности первого порядка:

$$x_2'(t_1)v_1 f(x_2(t_1)) - c(1 - F(x_2(t_1)) = 0.$$

- Откуда для $v_1 > 0$ (тогда и $t_1 > 0$) имеем равенство:

$$x_2'(t_1) = \frac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}.$$

Оптимальный ответ игрока 1

- Если игрок 1 прекращает борьбу в момент t_1, то
- он победит игрока 2 с типом $x_2(t_1)$ или меньшим,
- и проиграет игроку 2, чей тип больше $x_2(t_1)$.
- Игрок 1 типа v_1 находит свой оптимальный ответ на байесовскую стратегию $\tilde{t}_2(v_2)$ игрока 2, максимизируя свой ожидаемый выигрыш:
$$\max_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \int_0^{x_2(t_1)} (v_1 - ct_2(v_2)) f(v_2)\, dv_2 - ct_1(1 - F(x_2(t_1))).$$
- Запишем условие оптимальности первого порядка:
$$x_2'(t_1) v_1 f(x_2(t_1)) - c(1 - F(x_2(t_1)) = 0.$$
- Откуда для $v_1 > 0$ (тогда и $t_1 > 0$) имеем равенство:
$$x_2'(t_1) = \frac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}.$$

Оптимальный ответ игрока 1

- Если игрок 1 прекращает борьбу в момент t_1, то
- он победит игрока 2 с типом $x_2(t_1)$ или меньшим,
- и проиграет игроку 2, чей тип больше $x_2(t_1)$.
- Игрок 1 типа v_1 находит свой оптимальный ответ на байесовскую стратегию $\tilde{t}_2(v_2)$ игрока 2, максимизируя свой ожидаемый выигрыш:

$$\max_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \int_0^{x_2(t_1)} (v_1 - ct_2(v_2)) f(v_2)\, dv_2 - ct_1(1 - F(x_2(t_1))).$$

- Запишем условие оптимальности первого порядка:

$$x_2'(t_1) v_1 f(x_2(t_1)) - c(1 - F(x_2(t_1))) = 0.$$

- Откуда для $v_1 > 0$ (тогда и $t_1 > 0$) имеем равенство:

$$x_2'(t_1) = \frac{c(1 - F(x_2(t_1)))}{v_1 f(x_2(t_1))}.$$

Оптимальный ответ игрока 1

- Если игрок 1 прекращает борьбу в момент t_1, то
- он победит игрока 2 с типом $x_2(t_1)$ или меньшим,
- и проиграет игроку 2, чей тип больше $x_2(t_1)$.
- Игрок 1 типа v_1 находит свой оптимальный ответ на байесовскую стратегию $\tilde{t}_2(v_2)$ игрока 2, максимизируя свой ожидаемый выигрыш:

$$\max_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \int_0^{x_2(t_1)} (v_1 - ct_2(v_2))f(v_2)\,dv_2 - ct_1(1 - F(x_2(t_1)).$$

- Запишем условие оптимальности первого порядка:

$$x_2'(t_1)v_1 f(x_2(t_1)) - c(1 - F(x_2(t_1)) = 0.$$

- Откуда для $v_1 > 0$ (тогда и $t_1 > 0$) имеем равенство:

$$x_2'(t_1) = \frac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}.$$

Оптимальный ответ игрока 1

- Если игрок 1 прекращает борьбу в момент t_1, то
- он победит игрока 2 с типом $x_2(t_1)$ или меньшим,
- и проиграет игроку 2, чей тип больше $x_2(t_1)$.
- Игрок 1 типа v_1 находит свой оптимальный ответ на байесовскую стратегию $\tilde{t}_2(v_2)$ игрока 2, максимизируя свой ожидаемый выигрыш:

$$\max_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \int_0^{x_2(t_1)} (v_1 - ct_2(v_2))f(v_2)\,dv_2 - ct_1(1 - F(x_2(t_1)).$$

- Запишем условие оптимальности первого порядка:

$$x_2'(t_1)v_1 f(x_2(t_1)) - c(1 - F(x_2(t_1)) = 0.$$

- Откуда для $v_1 > 0$ (тогда и $t_1 > 0$) имеем равенство:

$$x_2'(t_1) = \frac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}.$$

Оптимальный ответ игрока 1

- Если игрок 1 прекращает борьбу в момент t_1, то
- он победит игрока 2 с типом $x_2(t_1)$ или меньшим,
- и проиграет игроку 2, чей тип больше $x_2(t_1)$.
- Игрок 1 типа v_1 находит свой оптимальный ответ на байесовскую стратегию $\tilde{t}_2(v_2)$ игрока 2, максимизируя свой ожидаемый выигрыш:

$$\max_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \int_0^{x_2(t_1)} (v_1 - ct_2(v_2)) f(v_2)\, dv_2 - ct_1(1 - F(x_2(t_1)).$$

- Запишем условие оптимальности первого порядка:

$$x_2'(t_1) v_1 f(x_2(t_1)) - c(1 - F(x_2(t_1)) = 0.$$

$\int_0^{\alpha(y)} f(x,y)dx$

- Откуда для $v_1 > 0$ (тогда и $t_1 > 0$) имеем равенство:

$$x_2'(t_1) = \frac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}.$$

Оптимальный ответ игрока 1

- Если игрок 1 прекращает борьбу в момент t_1, то
- он победит игрока 2 с типом $x_2(t_1)$ или меньшим,
- и проиграет игроку 2, чей тип больше $x_2(t_1)$.
- Игрок 1 типа v_1 находит свой оптимальный ответ на байесовскую стратегию $\tilde{t}_2(v_2)$ игрока 2, максимизируя свой ожидаемый выигрыш:
$$\max_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \int_0^{x_2(t_1)} (v_1 - ct_2(v_2))f(v_2)\, dv_2 - ct_1(1 - F(x_2(t_1)).$$
- Запишем условие оптимальности первого порядка:
$$x_2'(t_1)v_1 f(x_2(t_1)) - c(1 - F(x_2(t_1)) = 0.$$
- Откуда для $v_1 > 0$ (тогда и $t_1 > 0$) имеем равенство:
$$x_2'(t_1) = \frac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}.$$

Содержание

Симметричное равновесие

- В данной симметричной игре мы будем искать симметричное равновесие,
- когда оба игрока используют одну и ту же стратегию: $\tilde{t}_1(v) = \tilde{t}_2(v) = \tilde{t}(v)$.
- В таком случае равенство $x_2'(t_1) = \dfrac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}$
- примет следующий вид:

$$x'(t) = \frac{c(1 - F(x(t))}{vf(x(t))}, \quad \text{где } x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}^{-1}(t).$$

- В точке равновесия $t = \tilde{t}(v)$ имеем $x(t) = v$ и $x'(t) = 1/\tilde{t}'(v)$.
- Поэтому $\tilde{t}'(v) = \dfrac{vf(v)}{c(1 - F(v))}$ и равновесная байесовская стратегия каждого игрока определяется по формуле:

$$\tilde{t}(v) = \int_0^v \frac{zf(z)}{c(1 - F(z))}\, dz.$$

Симметричное равновесие

- В данной симметричной игре мы будем искать симметричное равновесие,
- когда оба игрока используют одну и ту же стратегию: $\tilde{t}_1(v) = \tilde{t}_2(v) = \tilde{t}(v)$.
- В таком случае равенство $x_2'(t_1) = \dfrac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}$
- примет следующий вид:
$$x'(t) = \frac{c(1 - F(x(t))}{v f(x(t))}, \quad \text{где } x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}^{-1}(t).$$
- В точке равновесия $t = \tilde{t}(v)$ имеем $x(t) = v$ и $x'(t) = 1/\tilde{t}'(v)$.
- Поэтому $\tilde{t}'(v) = \dfrac{v f(v)}{c(1 - F(v))}$ и равновесная байесовская стратегия каждого игрока определяется по формуле:
$$\tilde{t}(v) = \int_0^v \frac{z f(z)}{c(1 - F(z))}\, dz.$$

Симметричное равновесие

- В данной симметричной игре мы будем искать симметричное равновесие,
- когда оба игрока используют одну и ту же стратегию: $\tilde{t}_1(v) = \tilde{t}_2(v) = \tilde{t}(v)$.
- В таком случае равенство $x_2'(t_1) = \dfrac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}$
- примет следующий вид:
$$x'(t) = \frac{c(1 - F(x(t))}{vf(x(t))}, \quad \text{где } x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}^{-1}(t).$$
- В точке равновесия $t = \tilde{t}(v)$ имеем $x(t) = v$ и $x'(t) = 1/\tilde{t}'(v)$.
- Поэтому $\tilde{t}'(v) = \dfrac{vf(v)}{c(1 - F(v))}$ и равновесная байесовская стратегия каждого игрока определяется по формуле:
$$\tilde{t}(v) = \int_0^v \frac{zf(z)}{c(1 - F(z))}\,dz.$$

Симметричное равновесие

- В данной симметричной игре мы будем искать симметричное равновесие,
- когда оба игрока используют одну и ту же стратегию: $\tilde{t}_1(v) = \tilde{t}_2(v) = \tilde{t}(v)$.
- В таком случае равенство $x_2'(t_1) = \dfrac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}$
- примет следующий вид:
$$x'(t) = \frac{c(1 - F(x(t))}{vf(x(t))}, \quad \text{где } x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}^{-1}(t).$$
- В точке равновесия $t = \tilde{t}(v)$ имеем $x(t) = v$ и $x'(t) = 1/\tilde{t}'(v)$.
- Поэтому $\tilde{t}'(v) = \dfrac{vf(v)}{c(1 - F(v))}$ и равновесная байесовская стратегия каждого игрока определяется по формуле:
$$\tilde{t}(v) = \int_0^v \frac{zf(z)}{c(1 - F(z))}\, dz.$$

Симметричное равновесие

- В данной симметричной игре мы будем искать симметричное равновесие,
- когда оба игрока используют одну и ту же стратегию: $\tilde{t}_1(v) = \tilde{t}_2(v) = \tilde{t}(v)$.
- В таком случае равенство $x_2'(t_1) = \dfrac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}$
- примет следующий вид:
$$x'(t) = \frac{c(1 - F(x(t))}{vf(x(t))}, \quad \text{где } x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}^{-1}(t).$$
- В точке равновесия $t = \tilde{t}(v)$ имеем $x(t) = v$ и $x'(t) = 1/\tilde{t}'(v)$.
- Поэтому $\tilde{t}'(v) = \dfrac{vf(v)}{c(1 - F(v))}$ и равновесная байесовская стратегия каждого игрока определяется по формуле:
$$\tilde{t}(v) = \int_0^v \frac{zf(z)}{c(1 - F(z))}\, dz.$$

Симметричное равновесие

- В данной симметричной игре мы будем искать симметричное равновесие,
- когда оба игрока используют одну и ту же стратегию: $\tilde{t}_1(v) = \tilde{t}_2(v) = \tilde{t}(v)$.
- В таком случае равенство $x_2'(t_1) = \dfrac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}$
- примет следующий вид:
$$x'(t) = \frac{c(1 - F(x(t))}{vf(x(t))}, \quad \text{где } x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}^{-1}(t).$$
- В точке равновесия $t = \tilde{t}(v)$ имеем $x(t) = v$ и $x'(t) = 1/\tilde{t}'(v)$.
- Поэтому $\tilde{t}'(v) = \dfrac{vf(v)}{c(1 - F(v))}$ и равновесная байесовская стратегия каждого игрока определяется по формуле:
$$\tilde{t}(v) = \int_0^v \frac{zf(z)}{c(1 - F(z))}\, dz.$$

Симметричное равновесие

- В данной симметричной игре мы будем искать симметричное равновесие,
- когда оба игрока используют одну и ту же стратегию: $\tilde{t}_1(v) = \tilde{t}_2(v) = \tilde{t}(v)$.
- В таком случае равенство $x_2'(t_1) = \dfrac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}$
- примет следующий вид:

$$x'(t) = \frac{c(1 - F(x(t))}{vf(x(t))}, \quad \text{где } x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}^{-1}(t).$$

- В точке равновесия $t = \tilde{t}(v)$ имеем $x(t) = v$ и $x'(t) = 1/\tilde{t}'(v)$.
- Поэтому $\tilde{t}'(v) = \dfrac{vf(v)}{c(1 - F(v))}$ и равновесная байесовская стратегия каждого игрока определяется по формуле:

$$\tilde{t}(v) = \int_0^v \frac{zf(z)}{c(1 - F(z))}\,dz.$$

Симметричное равновесие

Теорема

В симметричной игре «война до истощения» байесовским равновесием является ситуация, образованная следующими байесовскими стратегиями игроков:

$$\tilde{t}_i(v_i) = \int_0^{v_i} \frac{zf(z)}{c(1 - F(z))}\, dz, \quad i = 1, 2.$$

Дифференцирование интеграла с переменными границами интегрирования

$$I(y) = \int_0^{\alpha(y)} f(x, y) dx,$$

$$I'(y) = \int_0^{\alpha(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + \alpha'(y) f(\alpha(y), y).$$

Вернуться к «войне до истощения»

Дифференцирование интеграла с переменными границами интегрирования

$$I(y) = \int_0^{\alpha(y)} f(x,y)dx,$$

$$I'(y) = \int_0^{\alpha(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + \alpha'(y)f(\alpha(y),y).$$

Вернуться к «войне до истощения»