Матричные игры

Н.Н. Писарук
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет
Белорусский государственный университет

Минск - 2014

Содержание

Определение матричной игры

- *Матричная игра* — это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$.
- В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$,
- а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.
- Можно сказать, что A — это матрица выигрышей игрока 1 и одновременно матрица проигрышей игрока 2.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* — это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$.
- В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$,
- а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.
- Можно сказать, что A — это матрица выигрышей игрока 1 и одновременно матрица проигрышей игрока 2.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* — это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{1,\dots,m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1,\dots,n\}$.
- В сложившейся ситуации (i,j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$,
- а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.
- Можно сказать, что A — это матрица выигрышей игрока 1 и одновременно матрица проигрышей игрока 2.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* — это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$.
- В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$,
- а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.
- Можно сказать, что A — это матрица выигрышей игрока 1 и одновременно матрица проигрышей игрока 2.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* — это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$.
- В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$,
- а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.
- Можно сказать, что A — это матрица выигрышей игрока 1 и одновременно матрица проигрышей игрока 2.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* — это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$.
- В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$,
- а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.
- Можно сказать, что A — это матрица выигрышей игрока 1 и одновременно матрица проигрышей игрока 2.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* — это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$.
- В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$,
- а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.
- Можно сказать, что A — это матрица выигрышей игрока 1 и одновременно матрица проигрышей игрока 2.

Определение матричной игры

- *Матричная игра* — это конечная антагонистич. игра,
- а антагонистическая игра — это игра 2-х лиц с нулевой суммой.
- Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1.
- В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, m\}$,
- а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$.
- В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$,
- а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.
- Можно сказать, что A — это матрица выигрышей игрока 1 и одновременно матрица проигрышей игрока 2.

Игры двух лиц с постоянной суммой

- К матричной игре сводится любая конечная игра $(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{\phi_1,\phi_2\})$ двух лиц с постоянной суммой,
- в которой $\phi_1(i,j)+\phi_2(i,j)=a$ для всех ситуаций $(i,j)\in S_1\times S_2$, где a — это некоторая константа.
- Если мы переопределим функции выигрышей игроков по правилу
$$\bar{\phi}_k(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_k(i,j)-a/2, \quad k=1,2,$$
- то получим эквивалентную игру с нулевой суммой: $\bar{\phi}_1(i,j)+\bar{\phi}_2(i,j)=0$.

Игры двух лиц с постоянной суммой

- К матричной игре сводится любая конечная игра $(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{\phi_1,\phi_2\})$ двух лиц с постоянной суммой,
- в которой $\phi_1(i,j)+\phi_2(i,j)=a$ для всех ситуаций $(i,j)\in S_1\times S_2$, где a — это некоторая константа.
- Если мы переопределим функции выигрышей игроков по правилу

$$\bar{\phi}_k(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_k(i,j)-a/2, \quad k=1,2,$$

- то получим эквивалентную игру с нулевой суммой: $\bar{\phi}_1(i,j)+\bar{\phi}_2(i,j)=0$.

Игры двух лиц с постоянной суммой

- К матричной игре сводится любая конечная игра $(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{\phi_1,\phi_2\})$ двух лиц с постоянной суммой,
- в которой $\phi_1(i,j)+\phi_2(i,j)=a$ для всех ситуаций $(i,j)\in S_1\times S_2$, где a — это некоторая константа.
- Если мы переопределим функции выигрышей игроков по правилу
$$\bar\phi_k(i,j)\stackrel{\text{def}}{=}\phi_k(i,j)-a/2,\quad k=1,2,$$
- то получим эквивалентную игру с нулевой суммой: $\bar\phi_1(i,j)+\bar\phi_2(i,j)=0$.

Игры двух лиц с постоянной суммой

- К матричной игре сводится любая конечная игра $(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{\phi_1,\phi_2\})$ двух лиц с постоянной суммой,
- в которой $\phi_1(i,j)+\phi_2(i,j)=a$ для всех ситуаций $(i,j)\in S_1\times S_2$, где a — это некоторая константа.
- Если мы переопределим функции выигрышей игроков по правилу
$$\bar{\phi}_k(i,j)\stackrel{\text{def}}{=}\phi_k(i,j)-a/2,\quad k=1,2,$$
- то получим эквивалентную игру с нулевой суммой: $\bar{\phi}_1(i,j)+\bar{\phi}_2(i,j)=0$.

В экономике антагонист. конфликты встречаются

1. В так называемые «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,
   - то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.
2. В играх с постоянной суммой, в которых две фирмы конкурируют на одном рынке, и прибыль каждой из фирм пропорциональна ее доле на рынке.

Решение многих более сложных игровых моделей сводится к решению одной или нескольких матричных игр.

В экономике антагонист. конфликты встречаются

1. В так называемые «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,
   - то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.
2. В играх с постоянной суммой, в которых две фирмы конкурируют на одном рынке, и прибыль каждой из фирм пропорциональна ее доле на рынке.

Решение многих более сложных игровых моделей сводится к решению одной или нескольких матричных игр.

В экономике антагонист. конфликты встречаются

1. В так называемые «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,
   - то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.
2. В играх с постоянной суммой, в которых две фирмы конкурируют на одном рынке, и прибыль каждой из фирм пропорциональна ее доле на рынке.

Решение многих более сложных игровых моделей сводится к решению одной или нескольких матричных игр.

В экономике антагонист. конфликты встречаются

1. В так называемые «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,
   - то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.
2. В играх с постоянной суммой, в которых две фирмы конкурируют на одном рынке, и прибыль каждой из фирм пропорциональна ее доле на рынке.

Решение многих более сложных игровых моделей сводится к решению одной или нескольких матричных игр.

В экономике антагонист. конфликты встречаются

1. В так называемые «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,
   - то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.
2. В играх с постоянной суммой, в которых две фирмы конкурируют на одном рынке, и прибыль каждой из фирм пропорциональна ее доле на рынке.

Решение многих более сложных игровых моделей сводится к решению одной или нескольких матричных игр.

В экономике антагонист. конфликты встречаются

1. В так называемые «играх с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка.
   - Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях,
   - то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.
2. В играх с постоянной суммой, в которых две фирмы конкурируют на одном рынке, и прибыль каждой из фирм пропорциональна ее доле на рынке.

Решение многих более сложных игровых моделей сводится к решению одной или нескольких матричных игр.

Равновесие в чистых стратегиях

- *Решением матричной игры в чистых стратегиях* называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют *седловую точку* матрицы A:

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\,. \qquad (*)$$

- Стратегии i_0, j_0 в этом случае называются *оптимальными чистыми стратегиями.*
- Из $(*)$ следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.
- Поэтому ситуация (i_0, j_0) есть ситуация равновесия в бескоалиционной игре $\gamma = (\{1,2\}, \{S_1, S_2\}, \{\phi_1, \phi_2\})$, где $\phi_1(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$ и $\phi_2(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.

Равновесие в чистых стратегиях

- *Решением матричной игры в чистых стратегиях* называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют *седловую точку* матрицы A:

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\,. \qquad (*)$$

- Стратегии i_0, j_0 в этом случае называются *оптимальными чистыми стратегиями.*
- Из $(*)$ следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.
- Поэтому ситуация (i_0, j_0) есть ситуация равновесия в бескоалиционной игре $\gamma = (\{1,2\}, \{S_1, S_2\}, \{\phi_1, \phi_2\})$, где $\phi_1(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$ и $\phi_2(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.

Равновесие в чистых стратегиях

- *Решением матричной игры в чистых стратегиях* называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют *седловую точку* матрицы A:
$$a_{ij_0} \le a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\,. \qquad (*)$$
- Стратегии i_0, j_0 в этом случае называются *оптимальными чистыми стратегиями.*
- Из $(*)$ следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.
- Поэтому ситуация (i_0, j_0) есть ситуация равновесия в бескоалиционной игре $\gamma = (\{1,2\}, \{S_1, S_2\}, \{\phi_1, \phi_2\})$, где $\phi_1(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$ и $\phi_2(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.

Равновесие в чистых стратегиях

- *Решением матричной игры в чистых стратегиях* называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют *седловую точку* матрицы A:
$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n. \qquad (*)$$
- Стратегии i_0, j_0 в этом случае называются *оптимальными чистыми стратегиями.*
- Из $(*)$ следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.
- Поэтому ситуация (i_0, j_0) есть ситуация равновесия в бескоалиционной игре $\gamma = (\{1,2\}, \{S_1, S_2\}, \{\phi_1, \phi_2\})$, где $\phi_1(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$ и $\phi_2(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.

Равновесие в чистых стратегиях

- *Решением матричной игры в чистых стратегиях* называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют *седловую точку* матрицы A:
$$a_{ij_0} \le a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\,. \qquad (*)$$
- Стратегии i_0, j_0 в этом случае называются *оптимальными чистыми стратегиями.*
- Из $(*)$ следует, что ни одному из игроков в отдельности невыгодно отходить от своей оптимальной стратегии.
- Поэтому ситуация (i_0, j_0) есть ситуация равновесия в бескоалиционной игре $\gamma = (\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{\phi_1, \phi_2\})$, где $\phi_1(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$ и $\phi_2(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.

Верхняя и нижняя чистая цена игры

- По теореме ▸ о совпадении максимина и минимакса (если $X = \{1, \ldots, m\}$, $Y = \{1, \ldots, n\}$, $f(i,j) = a_{ij}$) матричная игра с матрицей игры A имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда,
- когда *нижняя чистая цена игры*

$$\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

- равна *верхней чистой цене игры*

$$\beta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le n} a_{ij}.$$

- В таком случае число $\alpha(A) = \beta(A)$ называется *чистой ценой игры.*

Верхняя и нижняя чистая цена игры

- По теореме ▸ о совпадении максимина и минимакса (если $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$, $f(i,j) = a_{ij}$) матричная игра с матрицей игры A имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда,
- когда *нижняя чистая цена игры*
$$\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$
- равна *верхней чистой цене игры*
$$\beta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le n} a_{ij}.$$
- В таком случае число $\alpha(A) = \beta(A)$ называется *чистой ценой игры*.

Верхняя и нижняя чистая цена игры

- По теореме ▸ о совпадении максимина и минимакса (если $X = \{1, \ldots, m\}$, $Y = \{1, \ldots, n\}$, $f(i,j) = a_{ij}$) матричная игра с матрицей игры A имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда,
- когда *нижняя чистая цена игры*

$$\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

- равна *верхней чистой цене игры*

$$\beta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le n} a_{ij}.$$

- В таком случае число $\alpha(A) = \beta(A)$ называется *чистой ценой игры.*

Верхняя и нижняя чистая цена игры

- По теореме ▸ о совпадении максимина и минимакса (если $X = \{1, \ldots, m\}$, $Y = \{1, \ldots, n\}$, $f(i,j) = a_{ij}$) матричная игра с матрицей игры A имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда,
- когда *нижняя чистая цена игры*
$$\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1\le i\le n} \min_{1\le j\le n} a_{ij}$$
- равна *верхней чистой цене игры*
$$\beta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le n} a_{ij}.$$
- В таком случае число $\alpha(A) = \beta(A)$ называется *чистой ценой игры.*

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.
- Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.
- Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.
- Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.
- Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.
- Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.
- Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.
- Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.
- Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

Поиск равновесия в чистых стратегиях

- Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно
  - в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент,
  - а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный.
- Чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно
  - в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент,
  - а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный.
- Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$,
- и те столбцы, в которых максим. элемент равен $\beta(A)$.
- Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

Смешаные стратегии

- В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1
- смешанная стратегия игрока 1 есть вектор $p = (p_1, \dots, p_m)^T$,
- а смешанная стратегия игрока 2 — вектор $q = (q_1, \dots, q_n)^T$.
- В смешанной ситуации $(p, q) \in \Sigma_m \times \Sigma_n$ выигрыш игрока 1 определяется как математическое ожидание его выигрша:

$$E_A(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = p^T A q.$$

- Понятно, что в ситуации (p, q) средний выигрыш игрока 2 равен $-E_A(p, q)$.

Смешаные стратегии

- В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1
- смешанная стратегия игрока 1 есть вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)^T$,
- а смешанная стратегия игрока 2 — вектор $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$.
- В смешанной ситуации $(p, q) \in \Sigma_m \times \Sigma_n$ выигрыш игрока 1 определяется как математическое ожидание его выигрша:

$$E_A(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = p^T A q.$$

- Понятно, что в ситуации (p, q) средний выигрыш игрока 2 равен $-E_A(p, q)$.

Смешаные стратегии

- В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1
- смешанная стратегия игрока 1 есть вектор $p = (p_1, \dots, p_m)^T$,
- а смешанная стратегия игрока 2 — вектор $q = (q_1, \dots, q_n)^T$.
- В смешанной ситуации $(p, q) \in \Sigma_m \times \Sigma_n$ выигрыш игрока 1 определяется как математическое ожидание его выигрша:
$$E_A(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = p^T A q.$$
- Понятно, что в ситуации (p, q) средний выигрыш игрока 2 равен $-E_A(p, q)$.

Смешаные стратегии

- В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1
- смешанная стратегия игрока 1 есть вектор $p = (p_1, \dots, p_m)^T$,
- а смешанная стратегия игрока 2 — вектор $q = (q_1, \dots, q_n)^T$.
- В смешанной ситуации $(p, q) \in \Sigma_m \times \Sigma_n$ выигрыш игрока 1 определяется как математическое ожидание его выигрша:

$$E_A(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = p^T A q.$$

- Понятно, что в ситуации (p, q) средний выигрыш игрока 2 равен $-E_A(p, q)$.

Смешаные стратегии

- В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1
- смешанная стратегия игрока 1 есть вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)^T$,
- а смешанная стратегия игрока 2 — вектор $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$.
- В смешанной ситуации $(p, q) \in \Sigma_m \times \Sigma_n$ выигрыш игрока 1 определяется как математическое ожидание его выигрша:

$$E_A(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = p^T A q.$$

- Понятно, что в ситуации (p, q) средний выигрыш игрока 2 равен $-E_A(p, q)$.

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p^0, q^0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е.

$$E_A(p, q^0) \le E_A(p^0, q^0) \le E_A(p^0, q), \quad p \in \Sigma_m,\ q \in \Sigma_n. \qquad (*)$$

- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p_0, q_0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,
- а число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} E_A(p^0, q^0)$ — *ценой матричной игры*.

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p^0, q^0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p,q)$, т. е.

$$E_A(p,q^0) \le E_A(p^0,q^0) \le E_A(p^0,q), \quad p \in \Sigma_m,\ q \in \Sigma_n. \qquad (*)$$

- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p,q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p_0, q_0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,
- а число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} E_A(p^0,q^0)$ — *ценой матричной игры*.

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p^0, q^0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е.

$$E_A(p, q^0) \le E_A(p^0, q^0) \le E_A(p^0, q), \quad p \in \Sigma_m,\ q \in \Sigma_n. \qquad (*)$$

- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p_0, q_0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,
- а число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} E_A(p^0, q^0)$ — *ценой матричной игры.*

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p^0, q^0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е.

$$E_A(p, q^0) \leq E_A(p^0, q^0) \leq E_A(p^0, q), \quad p \in \Sigma_m,\ q \in \Sigma_n. \qquad (*)$$

- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p_0, q_0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,
- а число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} E_A(p^0, q^0)$ — *ценой матричной игры*.

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p^0, q^0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е.
  $$E_A(p, q^0) \le E_A(p^0, q^0) \le E_A(p^0, q), \quad p \in \Sigma_m,\ q \in \Sigma_n. \qquad (*)$$
- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p_0, q_0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,
- а число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} E_A(p^0, q^0)$ — *ценой матричной игры.*

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p^0, q^0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p,q)$, т. е.
  $$E_A(p,q^0) \le E_A(p^0,q^0) \le E_A(p^0,q), \quad p \in \Sigma_m,\ q \in \Sigma_n. \qquad (*)$$
- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p,q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p_0, q_0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,
- а число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} E_A(p^0,q^0)$ — *ценой матричной игры*.

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p^0, q^0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е.
$$E_A(p, q^0) \leq E_A(p^0, q^0) \leq E_A(p^0, q), \quad p \in \Sigma_m, \; q \in \Sigma_n. \qquad (*)$$
- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p_0, q_0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,
- а число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} E_A(p^0, q^0)$ — *ценой матричной игры*.

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p^0, q^0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е.
$$E_A(p, q^0) \le E_A(p^0, q^0) \le E_A(p^0, q), \quad p \in \Sigma_m,\ q \in \Sigma_n. \qquad (*)$$
- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p_0, q_0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,
- а число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} E_A(p^0, q^0)$ — *ценой матричной игры.*

Равновесие в смешанных стратегиях

- *Решением матричной игры в смешанных стратегиях* называют пару смешанных стратегий (p^0, q^0),
- которая образует седловую точку функции $E_A(p,q)$, т. е.
$$E_A(p, q^0) \le E_A(p^0, q^0) \le E_A(p^0, q), \quad p \in \Sigma_m,\ q \in \Sigma_n. \qquad (*)$$
- Левые нер-ва в $(*)$ означают, что игрок 1 не увеличит выигрыш, меняя стратегию p^0 на другую стратегию,
- а правые нер-ва означают, что игрок 2 не уменьшит свой проигрыш, переходя от страт. q^0 к другой стратегии.
- Поэтому седловые точки функции $E_A(p,q)$ — ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
- Матричная игра — это конечная бескоал. игра, то она имеет решение в смешанных стратегиях.
- Если (p_0, q_0) есть решение матр. игры в смеш. страт., то
- p^0, q^0 называют *оптим. смешанными стратегиями*,
- а число $v(A) \overset{\text{def}}{=} E_A(p^0, q^0)$ — *ценой матричной игры.*

Теорема фон Неймана

Следующая теорема является фундаментальной в теории матричных игр.

Теорема (фон Неймана)

- *Пусть A есть $m \times n$ матрица.*
- *Имеет место равенство*

$$v(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q.$$

- *Для любых*

$$p^0 \in \arg\max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j, \quad q^0 \in \arg\min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q,$$

- *пара (p^0, q^0) является решением в смешанных стратегиях матричной игры, заданной матрицей A.*

Теорема фон Неймана

Следующая теорема является фундаментальной в теории матричных игр.

Теорема (фон Неймана)

- *Пусть A есть $m \times n$ матрица.*
- *Имеет место равенство*

$$v(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q.$$

- *Для любых*

$$p^0 \in \arg\max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j, \quad q^0 \in \arg\min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q,$$

- *пара (p^0, q^0) является решением в смешанных стратегиях матричной игры, заданной матрицей A.*

Теорема фон Неймана

Следующая теорема является фундаментальной в теории матричных игр.

Теорема (фон Неймана)

- *Пусть A есть $m \times n$ матрица.*
- *Имеет место равенство*

$$v(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q.$$

- *Для любых*

$$p^0 \in \arg\max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j, \quad q^0 \in \arg\min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q,$$

- *пара (p^0, q^0) является решением в смешанных стратегиях матричной игры, заданной матрицей A.*

Теорема фон Неймана

Следующая теорема является фундаментальной в теории матричных игр.

Теорема (фон Неймана)

- *Пусть A есть $m \times n$ матрица.*
- *Имеет место равенство*

$$v(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A \mathrm{e}_j = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} \mathrm{e}_i^T A q.$$

- *Для любых*

$$p^0 \in \arg\max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A \mathrm{e}_j, \quad q^0 \in \arg\min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} \mathrm{e}_i^T A q,$$

- *пара (p^0, q^0) является решением в смешанных стратегиях матричной игры, заданной матрицей A.*

Теорема фон Неймана

Следующая теорема является фундаментальной в теории матричных игр.

Теорема (фон Неймана)

- *Пусть* A *есть* $m \times n$ *матрица.*
- *Имеет место равенство*

$$v(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q.$$

- *Для любых*

$$p^0 \in \arg\max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j, \quad q^0 \in \arg\min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q,$$

- *пара* (p^0, q^0) *является решением в смешанных стратегиях матричной игры, заданной матрицей* A.

Доказательство теоремы фон Неймана

- Поскольку $E_A(p,q) = p^T A q$ имеет седловую точку (p^0, q^0),
- то по теореме ‣ о совпадении максимина и минимакса

$$v(A) = \max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q) = \min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q),$$

и $\quad p^0 \in \arg\max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q), \quad q^0 \in \arg\min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q).$

- Равенства

$$\max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} p^T A q = \max_{p\in\Sigma_m} \min_{1\le j\le n} p^T A e_j,$$

$$\min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} p^T A q = \min_{q\in\Sigma_n} \max_{1\le i\le m} e_i^T A q$$

- следуют из того, что максимум и минимум линейной функции на многограннике достигается в вершине многогранника, а вершинами симплексов Σ_n и Σ_m являются единичные векторы.

Доказательство теоремы фон Неймана

- Поскольку $E_A(p,q) = p^T A q$ имеет седловую точку (p^0, q^0),
- то по теореме ▸ о совпадении максимина и минимакса

$$v(A) = \max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q) = \min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q),$$

и $\quad p^0 \in \arg\max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q), \quad q^0 \in \arg\min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q).$

- Равенства

$$\max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} p^T A q = \max_{p\in\Sigma_m} \min_{1\le j\le n} p^T A e_j,$$
$$\min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} p^T A q = \min_{q\in\Sigma_n} \max_{1\le i\le m} e_i^T A q$$

- следуют из того, что максимум и минимум линейной функции на многограннике достигается в вершине многогранника, а вершинами симплексов Σ_n и Σ_m являются единичные векторы. □

Доказательство теоремы фон Неймана

- Поскольку $E_A(p,q) = p^T A q$ имеет седловую точку (p^0, q^0),
- то по теореме ▸ о совпадении максимина и минимакса

$$v(A) = \max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q) = \min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q),$$

и $\quad p^0 \in \arg\max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q), \quad q^0 \in \arg\min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q).$

- Равенства

$$\max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} p^T A q = \max_{p\in\Sigma_m} \min_{1\le j\le n} p^T A e_j,$$

$$\min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} p^T A q = \min_{q\in\Sigma_n} \max_{1\le i\le m} e_i^T A q$$

- следуют из того, что максимум и минимум линейной функции на многограннике достигается в вершине многогранника, а вершинами симплексов Σ_n и Σ_m являются единичные векторы.

Доказательство теоремы фон Неймана

- Поскольку $E_A(p,q) = p^T Aq$ имеет седловую точку (p^0, q^0),
- то по теореме ▸ о совпадении максимина и минимакса

$$v(A) = \max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q) = \min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q),$$

и $\quad p^0 \in \arg\max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q), \quad q^0 \in \arg\min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q).$

- Равенства

$$\max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} p^T Aq = \max_{p\in\Sigma_m} \min_{1\le j\le n} p^T A\mathrm{e}_j,$$

$$\min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} p^T Aq = \min_{q\in\Sigma_n} \max_{1\le i\le m} \mathrm{e}_i^T Aq$$

- следуют из того, что максимум и минимум линейной функции на многограннике достигается в вершине многогранника, а вершинами симплексов Σ_n и Σ_m являются единичные векторы. □

Доказательство теоремы фон Неймана

- Поскольку $E_A(p,q) = p^T A q$ имеет седловую точку (p^0, q^0),
- то по теореме ▸ о совпадении максимина и минимакса

$$v(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{q \in \Sigma_n} E_A(p,q) = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{p \in \Sigma_m} E_A(p,q),$$

и $\quad p^0 \in \arg \max_{p \in \Sigma_m} \min_{q \in \Sigma_n} E_A(p,q), \quad q^0 \in \arg \min_{q \in \Sigma_n} \max_{p \in \Sigma_m} E_A(p,q).$

- Равенства

$$\max_{p \in \Sigma_m} \min_{q \in \Sigma_n} p^T A q = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A \mathrm{e}_j,$$
$$\min_{q \in \Sigma_n} \max_{p \in \Sigma_m} p^T A q = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} \mathrm{e}_i^T A q$$

- следуют из того, что максимум и минимум линейной функции на многограннике достигается в вершине многогранника, а вершинами симплексов Σ_n и Σ_m являются единичные векторы. $\square$

Функции выигрышей и проигрышей

- Определим функцию $f : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ *выигрышей игрока* 1 и функцию $g : \Sigma_n \to \mathbb{R}$ *проигрышей игрока* 2 по правилам:

$$f(p) = \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \quad p \in \Sigma_m,$$

$$g(q) = \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad q \in \Sigma_n.$$

- f — кусочно-линейная вогнутая функция, g — кусочно-линейная выпуклая функция.
- Из теоремы фон Неймана следует, что игрок 1 найдет свою оптимальную стратегию, решая задачу

$$\max\{f(p) : p \in \Sigma_m\},$$

- а игрок 2 найдет свою опт. стратегию, решая задачу

$$\min\{g(q) : q \in \Sigma_n\}.$$

◂ К поиску опт. стратегии игрока 1 ◂ К поиску опт. стратегии игрока 2

Функции выигрышей и проигрышей

- Определим функцию $f : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ *выигрышей игрока* 1 и функцию $g : \Sigma_n \to \mathbb{R}$ *проигрышей игрока* 2 по правилам:
$$f(p) = \min_{1\le j\le n} p^T A e_j = \min_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \quad p \in \Sigma_m,$$
$$g(q) = \max_{1\le i\le m} e_i^T A q = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad q \in \Sigma_n.$$
- f — кусочно-линейная вогнутая функция, g — кусочно-линейная выпуклая функция.
- Из теоремы фон Неймана следует, что игрок 1 найдет свою оптимальную стратегию, решая задачу
$$\max\{f(p) : p \in \Sigma_m\},$$
- а игрок 2 найдет свою опт. стратегию, решая задачу
$$\min\{g(q) : q \in \Sigma_n\}.$$

К поиску опт. стратегии игрока 1 К поиску опт. стратегии игрока 2

Функции выигрышей и проигрышей

- Определим функцию $f : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ *выигрышей игрока* 1 и функцию $g : \Sigma_n \to \mathbb{R}$ *проигрышей игрока* 2 по правилам:

$$f(p) = \min_{1 \le j \le n} p^T A e_j = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \quad p \in \Sigma_m,$$

$$g(q) = \max_{1 \le i \le m} e_i^T A q = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad q \in \Sigma_n.$$

- f — кусочно-линейная вогнутая функция,
  g — кусочно-линейная выпуклая функция.
- Из теоремы фон Неймана следует, что игрок 1 найдет свою оптимальную стратегию, решая задачу

$$\max\{f(p) : p \in \Sigma_m\},$$

- а игрок 2 найдет свою опт. стратегию, решая задачу

$$\min\{g(q) : q \in \Sigma_n\}.$$

К поиску опт. стратегии игрока 1 К поиску опт. стратегии игрока 2

Функции выигрышей и проигрышей

- Определим функцию $f : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ *выигрышей игрока* 1 и функцию $g : \Sigma_n \to \mathbb{R}$ *проигрышей игрока* 2 по правилам:

$$f(p) = \min_{1 \le j \le n} p^T A \mathrm{e}_j = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \quad p \in \Sigma_m,$$

$$g(q) = \max_{1 \le i \le m} \mathrm{e}_i^T A q = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j, \quad q \in \Sigma_n.$$

- f — кусочно-линейная вогнутая функция, g — кусочно-линейная выпуклая функция.
- Из теоремы фон Неймана следует, что игрок 1 найдет свою оптимальную стратегию, решая задачу

$$\max\{f(p) : p \in \Sigma_m\},$$

- а игрок 2 найдет свою опт. стратегию, решая задачу

$$\min\{g(q) : q \in \Sigma_n\}.$$

◂ К поиску опт. стратегии игрока 1 ◂ К поиску опт. стратегии игрока 2

Содержание

Графический метод решения матричных

Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?,?,?,?),$$

$$q^0 = (?,?),$$

$$v(A) = ?.$$

Графический метод решения матричных

Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$

- Предположим, что игрок 2 использует свою смешанную стратегию $q = (q_1, q_2)^T = (x, 1-x)^T$,
- а игрок 1 использует свою чистую стратегию i.
- Тогда средний проигрыш игрока 2 (выигрыш игрока 1) равен: $g_i(x) = x\,a_{i1} + (1-x)\,a_{i2}$.

Графический метод решения матричных

Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?,?,?,?),$$

$$q^0 = (?,?),$$

$$v(A) = ?.$$

- Предположим, что игрок 2 использует свою смешанную стратегию $q = (q_1, q_2)^T = (x, 1-x)^T$,
- а игрок 1 использует свою чистую стратегию i.
- Тогда средний проигрыш игрока 2 (выигрыш игрока 1) равен: $g_i(x) = x\, a_{i1} + (1-x)\, a_{i2}$.

Графический метод решения матричных

Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$

- Предположим, что игрок 2 использует свою смешанную стратегию $q = (q_1, q_2)^T = (x, 1 - x)^T$,
- а игрок 1 использует свою чистую стратегию i.
- Тогда средний проигрыш игрока 2 (выигрыш игрока 1) равен: $g_i(x) = x\, a_{i1} + (1 - x)\, a_{i2}$.

Графический метод решения матричных

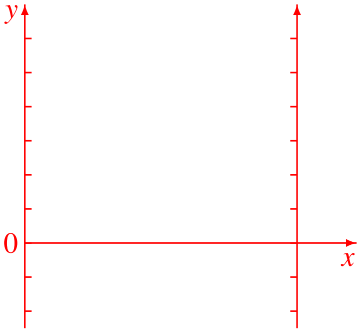
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



Чтобы нарисовать графики функций $y = g_i(x)$ на координатной плоскости (x, y) удобно провести две вертикальных координатных оси, проходящие через точки $x = 0$ и $x = 1$.

Графический метод решения матричных

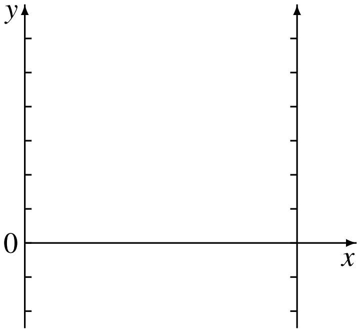
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



Рисуем графики функций $y = g_i(x)$:

1. $y = g_1(x) = 2x + 4(1 - x)$;
2. $y = g_2(x) = (-1)x + 5(1 - x)$;
3. $y = g_3(x) = 4x + 2(1 - x)$;
4. $y = g_4(x) = 6x + (-2)(1 - x)$;

Графический метод решения матричных

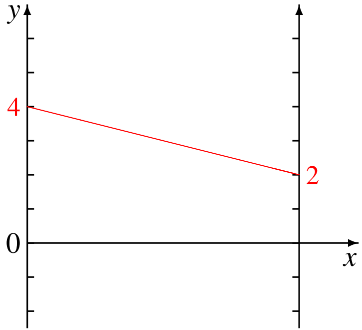
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?),$

$q^0 = (?, ?),$

$v(A) = ?.$



Рисуем графики функций $y = g_i(x)$:

1. $y = g_1(x) = 2x + 4(1 - x);$
2. $y = g_2(x) = (-1)x + 5(1 - x);$
3. $y = g_3(x) = 4x + 2(1 - x);$
4. $y = g_4(x) = 6x + (-2)(1 - x);$

Графический метод решения матричных

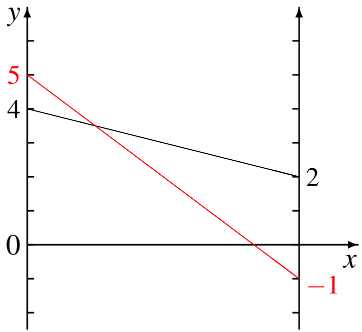
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



Рисуем графики функций $y = g_i(x)$:

1. $y = g_1(x) = 2x + 4(1 - x);$
2. $y = g_2(x) = (-1)x + 5(1 - x);$
3. $y = g_3(x) = 4x + 2(1 - x);$
4. $y = g_4(x) = 6x + (-2)(1 - x);$

Графический метод решения матричных

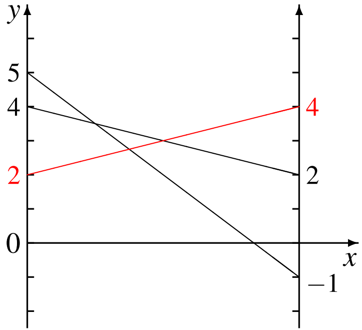
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?),$

$q^0 = (?, ?),$

$v(A) = ?.$



Рисуем графики функций $y = g_i(x)$:

1. $y = g_1(x) = 2x + 4(1 - x);$
2. $y = g_2(x) = (-1)x + 5(1 - x);$
3. $y = g_3(x) = 4x + 2(1 - x);$
4. $y = g_4(x) = 6x + (-2)(1 - x);$

Графический метод решения матричных

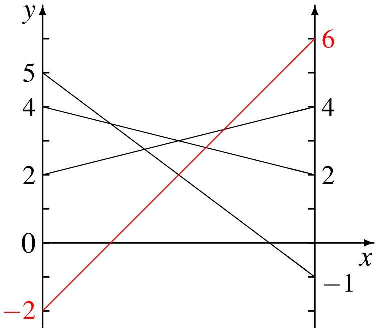
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



Рисуем графики функций $y = g_i(x)$:

1. $y = g_1(x) = 2x + 4(1 - x)$;
2. $y = g_2(x) = (-1)x + 5(1 - x)$;
3. $y = g_3(x) = 4x + 2(1 - x)$;
4. $y = g_4(x) = 6x + (-2)(1 - x)$;

Графический метод решения матричных

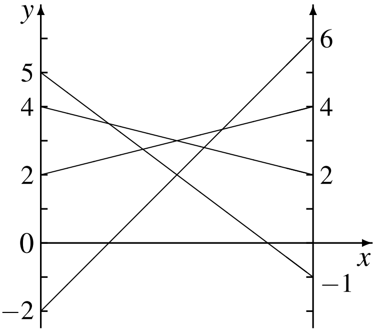
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



- Функция $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in \{1,2,3,4\}} g_i(x)$ есть функции проигрышей игрока 2.
- Рисуем график $y = g(x)$ этой функции, который есть верхняя огибающая семейства прямых $y = g_i(x)$.

Графический метод решения матричных

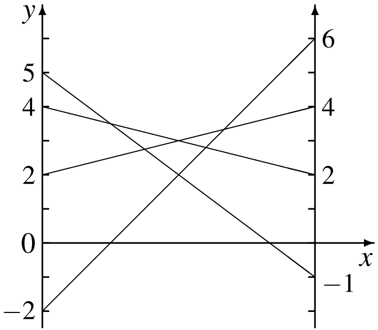
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?,?,?,?)$,

$q^0 = (?,?)$,

$v(A) = ?.$



- Функция $g(x) \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{i\in\{1,2,3,4\}} g_i(x)$ есть функции проигрышей игрока 2.
- Рисуем график $y = g(x)$ этой функции, который есть верхняя огибающая семейства прямых $y = g_i(x)$.

Графический метод решения матричных

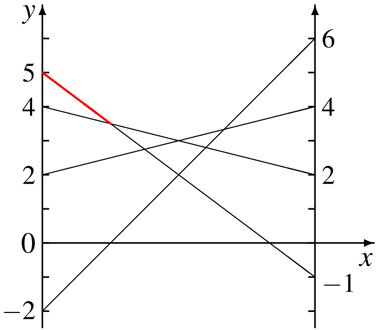
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



- Функция $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{i\in\{1,2,3,4\}} g_i(x)$ есть функции проигрышей игрока 2.
- Рисуем график $y = g(x)$ этой функции, который есть верхняя огибающая семейства прямых $y = g_i(x)$.

Графический метод решения матричных

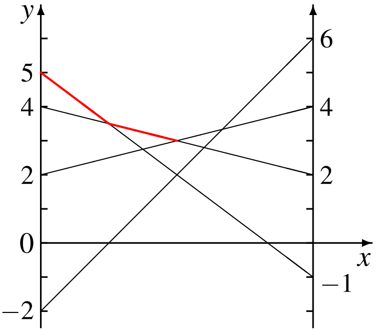
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?$.



- Функция $g(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\limits_{i \in \{1,2,3,4\}} g_i(x)$ есть функции проигрышей игрока 2.
- Рисуем график $y = g(x)$ этой функции, который есть верхняя огибающая семейства прямых $y = g_i(x)$.

Графический метод решения матричных

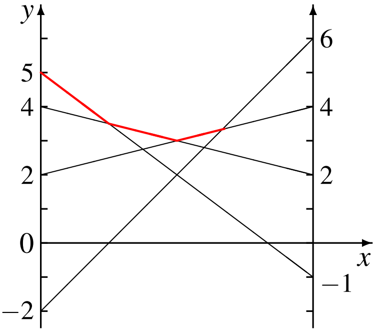
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?$.



- Функция $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{i \in \{1,2,3,4\}} g_i(x)$ есть функции проигрышей игрока 2.
- Рисуем график $y = g(x)$ этой функции, который есть верхняя огибающая семейства прямых $y = g_i(x)$.

Графический метод решения матричных

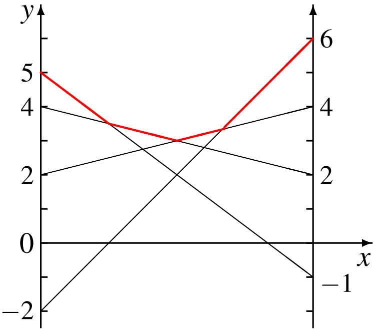
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



- Функция $g(x) \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{i \in \{1,2,3,4\}} g_i(x)$ есть функции проигрышей игрока 2.
- Рисуем график $y = g(x)$ этой функции, который есть верхняя огибающая семейства прямых $y = g_i(x)$.

Графический метод решения матричных

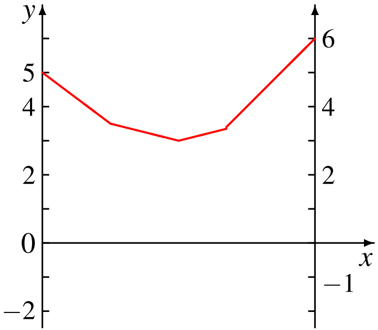
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?,?,?,?),$$

$$q^0 = (?,?),$$

$$v(A) = ?.$$



- Функция $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{i\in\{1,2,3,4\}} g_i(x)$ есть функции проигрышей игрока 2.
- Рисуем график $y = g(x)$ этой функции, который есть верхняя огибающая семейства прямых $y = g_i(x)$.

Графический метод решения матричных

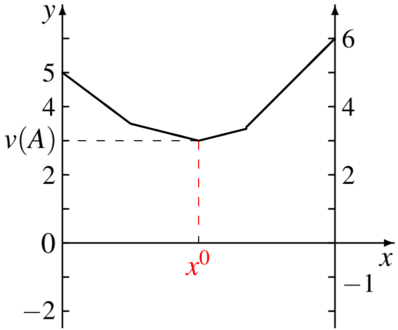
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?$.



- Стремясь минимизировать свой проигрыш, игрок 2 должен найти точку x^0 минимума функции $g(x)$.
- Тогда $(x^0, 1 - x^0)$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2,
- а $g(x^0)$ есть цена игры $v(A)$.

Графический метод решения матричных

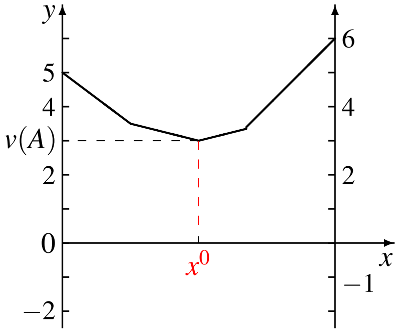
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?$.



- Стремясь минимизировать свой проигрыш, игрок 2 должен найти точку x^0 минимума функции $g(x)$.
- Тогда $(x^0, 1 - x^0)$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2,
- а $g(x^0)$ есть цена игры $v(A)$.

Графический метод решения матричных

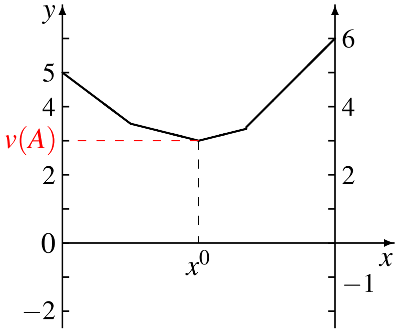
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?$.



- Стремясь минимизировать свой проигрыш, игрок 2 должен найти точку x^0 минимума функции $g(x)$.
- Тогда $(x^0, 1 - x^0)$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2,
- а $g(x^0)$ есть цена игры $v(A)$.

Графический метод решения матричных

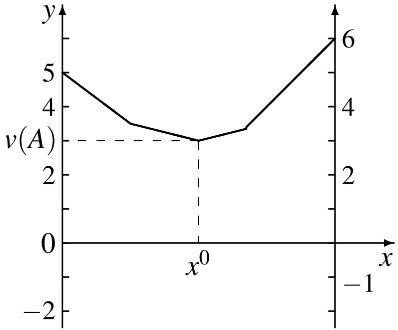
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?$.



- Чтобы точно вычислить точку минимума x^0, нужно выделить две *активных стратегии* игрока 1.
- Эти стратегии определяются по линиям 1 и 3, пересекающимся в точке x^0.

Графический метод решения матричных

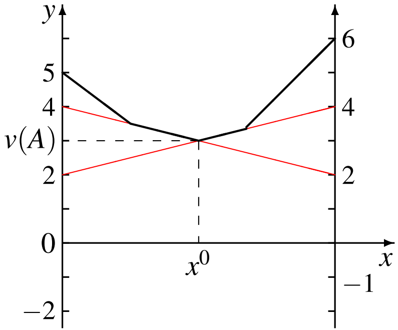
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (?, ?)$,

$v(A) = ?$.



- Чтобы точно вычислить точку минимума x^0, нужно выделить две *активных стратегии* игрока 1.
- Эти стратегии определяются по линиям 1 и 3, пересекающимся в точке x^0.

Графический метод решения матричных

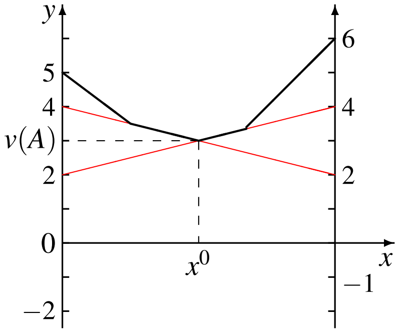
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (?, ?),$$

$$v(A) = ?.$$



- Следовательно, x^0 есть решение уравнения $g_1(x) = g_3(x)$: $2x + 4(1-x) = 4x + 2(1-x) \quad \Rightarrow \quad x^0 = 1/2.$
- Откуда, $q^0 = (1/2, 1/2)^T$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2.
- Вычислим цену игры как значение $g_1(x^0)$ (или $g_3(x^0)$) в точке x^0: $v(A) = g_1(x^0) = 2(1/2) + 4(1/2) = 3.$

Графический метод решения матричных

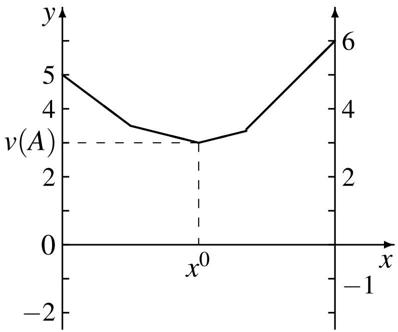
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?),$

$q^0 = (1/2, 1/2),$

$v(A) = ?.$



- Следовательно, x^0 есть решение уравнения $g_1(x) = g_3(x)$: $2x + 4(1-x) = 4x + 2(1-x) \quad \Rightarrow \quad x^0 = 1/2.$
- Откуда, $q^0 = (1/2, 1/2)^T$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2.
- Вычислим цену игры как значение $g_1(x^0)$ (или $g_3(x^0)$) в точке x^0: $v(A) = g_1(x^0) = 2(1/2) + 4(1/2) = 3.$

Графический метод решения матричных

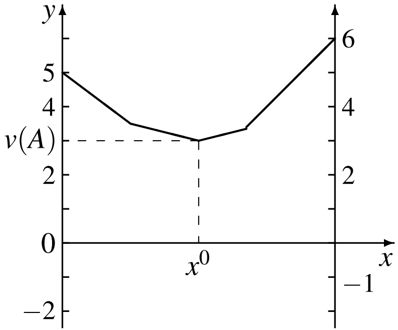
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (1/2, 1/2),$$

$$v(A) = 3.$$



- Следовательно, x^0 есть решение уравнения $g_1(x) = g_3(x)$: $2x + 4(1-x) = 4x + 2(1-x) \quad \Rightarrow \quad x^0 = 1/2.$
- Откуда, $q^0 = (1/2, 1/2)^T$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2.
- Вычислим цену игры как значение $g_1(x^0)$ (или $g_3(x^0)$) в точке x^0: $v(A) = g_1(x^0) = 2(1/2) + 4(1/2) = 3.$

Графический метод решения матричных

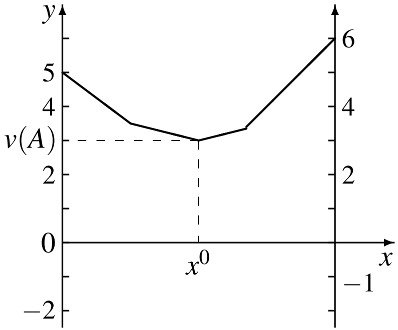
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (1/2, 1/2),$$

$$v(A) = 3.$$



- Использование неактивных стратегий не может увеличить выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2).
- Если игрок 1 откажется от любой своей неактивной стратегии, то функция проигрышей игрока 2 может измениться, но минимум новой функции будет достигаться в той же самой точке x^0.

Графический метод решения матричных

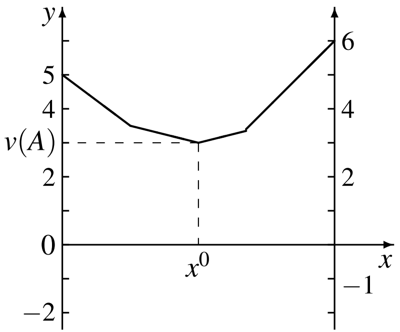
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (1/2, 1/2),$$

$$v(A) = 3.$$



- Использование неактивных стратегий не может увеличить выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2).
- Если игрок 1 откажется от любой своей неактивной стратегии, то функция проигрышей игрока 2 может измениться, но минимум новой функции будет достигаться в той же самой точке x^0.

Графический метод решения матричных

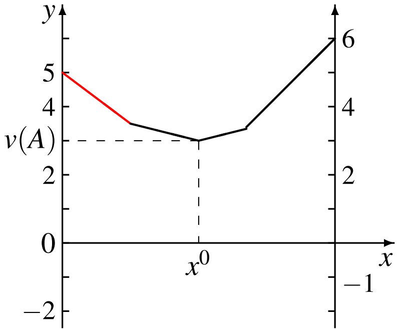
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?),$

$q^0 = (1/2, 1/2),$

$v(A) = 3.$



- Например, если игрок 1 не будет использовать стратегию 2, то функция проигрышей игрока 2 примет вид как на рисунке справа.
- Следовательно, можно считать, что игрок 1 применяет свои неактивные стратегии с нулевой вероятностью.

Графический метод решения матричных

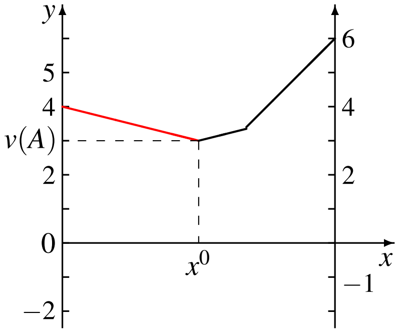
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (1/2, 1/2)$,

$v(A) = 3$.



- Например, если игрок 1 не будет использовать стратегию 2, то функция проигрышей игрока 2 примет вид как на рисунке справа.
- Следовательно, можно считать, что игрок 1 применяет свои неактивные стратегии с нулевой вероятностью.

Графический метод решения матричных

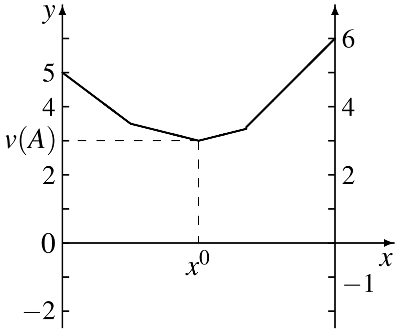
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (1/2, 1/2),$$

$$v(A) = 3.$$



- Например, если игрок 1 не будет использовать стратегию 2, то функция проигрышей игрока 2 примет вид как на рисунке справа.
- Следовательно, можно считать, что игрок 1 применяет свои неактивные стратегии с нулевой вероятностью.

Графический метод решения матричных

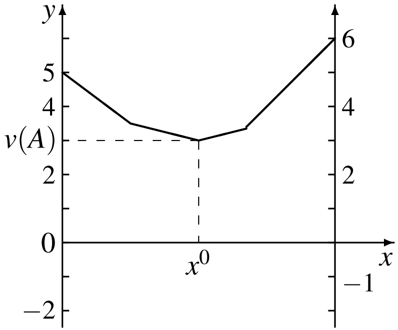
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (1/2, 1/2),$$

$$v(A) = 3.$$



- $p_2^0 = p_4^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_3^0 = 1 - p_1^0.$
- Мы найдем p_1^0, решив игру с усеченной матрицей $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, которая получается из исходной матрицы A после удаления строк 2 и 4, соответствующих неактивным стратегиям.

Графический метод решения матричных

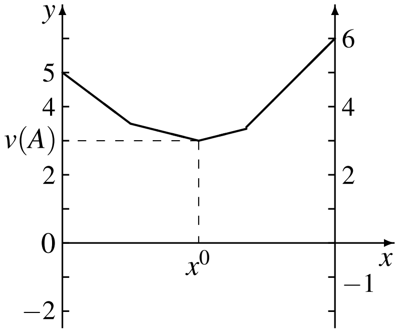
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$p^0 = (?, ?, ?, ?),$$

$$q^0 = (1/2, 1/2),$$

$$v(A) = 3.$$



- $p_2^0 = p_4^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_3^0 = 1 - p_1^0.$
- Мы найдем p_1^0, решив игру с усеченной матрицей $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, которая получается из исходной матрицы A после удаления строк 2 и 4, соответствующих неактивным стратегиям.

Графический метод решения матричных

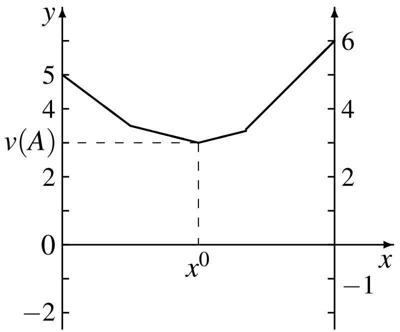
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?)$,

$q^0 = (1/2, 1/2)$,

$v(A) = 3.$



- $p_2^0 = p_4^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_3^0 = 1 - p_1^0.$
- Мы найдем p_1^0, решив игру с усеченной матрицей $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, которая получается из исходной матрицы A после удаления строк 2 и 4, соответствующих неактивным стратегиям.

Графический метод решения матричных

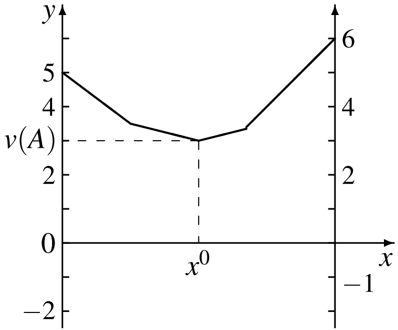
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?),$

$q^0 = (1/2, 1/2),$

$v(A) = 3.$



- $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$
- Мы можем найти p_1^0 из уравнения (обоснуйте это!):

$$2p_1^0 + 4(1 - p_1^0) = 3 = v(A).$$

- Откуда, $p_1^0 = 1/2$ и $p^0 = (1/2, 0, 1/2, 0)^T$ есть оптимальная стратегия игрока 1.

Графический метод решения матричных

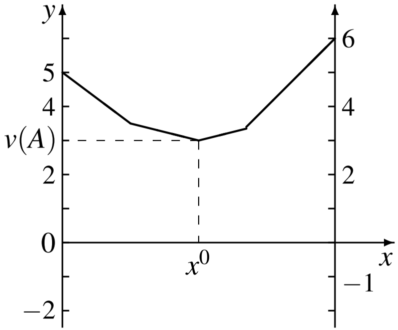
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (?, ?, ?, ?),$

$q^0 = (1/2, 1/2),$

$v(A) = 3.$



- $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$
- Мы можем найти p_1^0 из уравнения (обоснуйте это!):
$$2p_1^0 + 4(1 - p_1^0) = 3 = v(A).$$
- Откуда, $p_1^0 = 1/2$ и $p^0 = (1/2, 0, 1/2, 0)^T$ есть оптимальная стратегия игрока 1.

Графический метод решения матричных

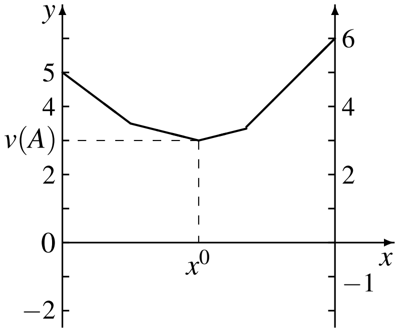
Решим игру

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

$p^0 = (1/2, 0, 1/2, 0)$,

$q^0 = (1/2, 1/2)$,

$v(A) = 3$.



- $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$,
- Мы можем найти p_1^0 из уравнения (обоснуйте это!):

$$2p_1^0 + 4(1 - p_1^0) = 3 = v(A).$$

- Откуда, $p_1^0 = 1/2$ и $p^0 = (1/2, 0, 1/2, 0)^T$ есть оптимальная стратегия игрока 1.

Решение матричных игр размера 2xn

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси ($x = 0$) откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси ($x = 1$) — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как *нижнюю огибающую* построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $v(A) = f(x^0)$.
- Выберем любые две непараллельные линии, которые пересекаются в т-ке x^0, и удалим соотв. им столбцы из матрицы игры.
- Решая усеченную игру размера 2×2, определим ненулевые компоненты оптимальной стратегии игрока 2.

Решение матричных игр размера 2xn

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси $(x = 1)$ — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как *нижнюю огибающую* построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $v(A) = f(x^0)$.
- Выберем любые две непараллельные линии, которые пересекаются в т-ке x^0, и удалим соотв. им столбцы из матрицы игры.
- Решая усеченную игру размера 2×2, определим ненулевые компоненты оптимальной стратегии игрока 2.

Решение матричных игр размера 2xn

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси ($x = 0$) откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси ($x = 1$) — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как *нижнюю огибающую* построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $v(A) = f(x^0)$.
- Выберем любые две непараллельные линии, которые пересекаются в т-ке x^0, и удалим соотв. им столбцы из матрицы игры.
- Решая усеченную игру размера 2×2, определим ненулевые компоненты оптимальной стратегии игрока 2.

Решение матричных игр размера 2xn

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси $(x = 1)$ — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как *нижнюю огибающую* построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $v(A) = f(x^0)$.
- Выберем любые две непараллельные линии, которые пересекаются в т-ке x^0, и удалим соотв. им столбцы из матрицы игры.
- Решая усеченную игру размера 2×2, определим ненулевые компоненты оптимальной стратегии игрока 2.

Решение матричных игр размера 2xn

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси $(x = 1)$ — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как *нижнюю огибающую* построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $v(A) = f(x^0)$.
- Выберем любые две непараллельные линии, которые пересекаются в т-ке x^0, и удалим соотв. им столбцы из матрицы игры.
- Решая усеченную игру размера 2×2, определим ненулевые компоненты оптимальной стратегии игрока 2.

Решение матричных игр размера 2xn

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси $(x = 1)$ — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как *нижнюю огибающую* построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $v(A) = f(x^0)$.
- Выберем любые две непараллельные линии, которые пересекаются в т-ке x^0, и удалим соотв. им столбцы из матрицы игры.
- Решая усеченную игру размера 2×2, определим ненулевые компоненты оптимальной стратегии игрока 2.

Решение матричных игр размера 2xn

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси ($x = 0$) откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси ($x = 1$) — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как *нижнюю огибающую* построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $v(A) = f(x^0)$.
- Выберем любые две непараллельные линии, которые пересекаются в т-ке x^0, и удалим соотв. им столбцы из матрицы игры.
- Решая усеченную игру размера 2×2, определим ненулевые компоненты оптимальной стратегии игрока 2.

Решение матричных игр размера 2xn

- Сначала ищем опт. стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1.
- На координатной плоскости для каждого из n столбцов рисуем линию:
  - на первой оси $(x = 0)$ откладываем число из второй строки матрицы игры,
  - а на второй оси $(x = 1)$ — число из первой строки.
- Строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как *нижнюю огибающую* построенного семейства прямых.
- Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $v(A) = f(x^0)$.
- Выберем любые две непараллельные линии, которые пересекаются в т-ке x^0, и удалим соотв. им столбцы из матрицы игры.
- Решая усеченную игру размера 2×2, определим ненулевые компоненты оптимальной стратегии игрока 2.

Распределение поисковых усилий

- В одном из n лесных массивов потерялся человек.
- Для поиска этого человека выделено k вертолетов.
- Вероятность обнаружения человека в j-м лесном массиве одним вертолетом равна ω_j.
- Поэтому хотя бы один из r вертолетов обнаружит человека в j-м районе (при условии, что он там находится) с вероятностью

$$u_j(r) = 1 - (1 - \omega_j)^r.$$

- Каким образом нужно распределить вертолеты по лесным массивам, чтобы вероятность обнарудения человека была максимальной.

Распределение поисковых усилий

- В одном из n лесных массивов потерялся человек.
- Для поиска этого человека выделено k вертолетов.
- Вероятность обнаружения человека в j-м лесном массиве одним вертолетом равна ω_j.
- Поэтому хотя бы один из r вертолетов обнаружит человека в j-м районе (при условии, что он там находится) с вероятностью

$$u_j(r) = 1 - (1 - \omega_j)^r.$$

- Каким образом нужно распределить вертолеты по лесным массивам, чтобы вероятность обнарудения человека была максимальной.

Распределение поисковых усилий

- В одном из n лесных массивов потерялся человек.
- Для поиска этого человека выделено k вертолетов.
- Вероятность обнаружения человека в j-м лесном массиве одним вертолетом равна ω_j.
- Поэтому хотя бы один из r вертолетов обнаружит человека в j-м районе (при условии, что он там находится) с вероятностью
$$u_j(r) = 1 - (1 - \omega_j)^r.$$
- Каким образом нужно распределить вертолеты по лесным массивам, чтобы вероятность обнарудения человека была максимальной.

Распределение поисковых усилий

- В одном из n лесных массивов потерялся человек.
- Для поиска этого человека выделено k вертолетов.
- Вероятность обнаружения человека в j-м лесном массиве одним вертолетом равна ω_j.
- Поэтому хотя бы один из r вертолетов обнаружит человека в j-м районе (при условии, что он там находится) с вероятностью

$$u_j(r) = 1 - (1 - \omega_j)^r.$$

- Каким образом нужно распределить вертолеты по лесным массивам, чтобы вероятность обнарудения человека была максимальной.

Распределение поисковых усилий

- В одном из n лесных массивов потерялся человек.
- Для поиска этого человека выделено k вертолетов.
- Вероятность обнаружения человека в j-м лесном массиве одним вертолетом равна ω_j.
- Поэтому хотя бы один из r вертолетов обнаружит человека в j-м районе (при условии, что он там находится) с вероятностью
$$u_j(r) = 1 - (1 - \omega_j)^r.$$
- Каким образом нужно распределить вертолеты по лесным массивам, чтобы вероятность обнарудения человека была максимальной.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,
- а игрок 2 — это «злой рок».
- Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \dots, n$ означает, что человек потерялся в районе j.
- Стратегии игрока 1 представим как разбиения $(s_1, \dots, s_n)$ числа k, где $\sum_{j=1}^{n} s_j = k$ и s_j есть количество вертолетов, посланных в район j.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,
- а игрок 2 — это «злой рок».
- Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \dots, n$ означает, что человек потерялся в районе j.
- Стратегии игрока 1 представим как разбиения $(s_1, \dots, s_n)$ числа k, где $\sum_{j=1}^{n} s_j = k$ и s_j есть количество вертолетов, посланных в район j.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,
- а игрок 2 — это «злой рок».
- Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \dots, n$ означает, что человек потерялся в районе j.
- Стратегии игрока 1 представим как разбиения $(s_1, \dots, s_n)$ числа k, где $\sum_{j=1}^{n} s_j = k$ и s_j есть количество вертолетов, посланных в район j.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,
- а игрок 2 — это «злой рок».
- Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \dots, n$ означает, что человек потерялся в районе j.
- Стратегии игрока 1 представим как разбиения $(s_1, \dots, s_n)$ числа k, где $\sum_{j=1}^{n} s_j = k$ и s_j есть количество вертолетов, посланных в район j.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,
- а игрок 2 — это «злой рок».
- Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \dots, n$ означает, что человек потерялся в районе j.
- Стратегии игрока 1 представим как разбиения $(s_1, \dots, s_n)$ числа k, где $\sum_{j=1}^{n} s_j = k$ и s_j есть количество вертолетов, посланных в район j.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,
- а игрок 2 — это «злой рок».
- Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \dots, n$ означает, что человек потерялся в районе j.
- Стратегии игрока 1 представим как разбиения $(s_1, \dots, s_n)$ числа k, где $\sum_{j=1}^{n} s_j = k$ и s_j есть количество вертолетов, посланных в район j.

Игра «распределение поисковых усилий»: мотивация

- Здесь у нас нет конфликтной ситуации.
- Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего.
- В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой
- игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию,
- а игрок 2 — это «злой рок».
- Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \ldots, n$ означает, что человек потерялся в районе j.
- Стратегии игрока 1 представим как разбиения $(s_1, \ldots, s_n)$ числа k, где $\sum_{j=1}^{n} s_j = k$ и s_j есть количество вертолетов, посланных в район j.

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

$A =$

	Район 1	*Район 2*	
(2,0)	0.84	0	0
(1,1)	0.6	0.4	<u>0.4</u>
(0,2)	0	0.64	0
	0.84	<u>0.64</u>	

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \textit{Район 1} & \textit{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \textit{Район 1} & \textit{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \textit{Район 1} & \textit{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \textit{Район 1} & \textit{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \text{Район 1} & \text{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \textit{Район 1} & \textit{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

$A =$

	Район 1	*Район 2*	
(2,0)	0.84	0	0
(1,1)	0.6	0.4	0.4
(0,2)	0	0.64	0
	0.84	0.64	

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры: $a_{11} = 1 - (1 - 0.6)^2 = 0.84$

$A =$

	Район 1	*Район 2*	
(2,0)	0.84	0	0
(1,1)	0.6	0.4	0.4
(0,2)	0	0.64	0
	0.84	0.64	

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры: $a_{12} = 0$

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \text{Район 1} & \text{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры: $a_{21} = 1 - 0.4 = 0.6$

$A =$

	Район 1	*Район 2*	
(2,0)	0.84	0	0
(1,1)	0.6	0.4	0.4
(0,2)	0	0.64	0
	0.84	0.64	

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры: $a_{22} = 1 - 0.6 = 0.4$

$A =$

	Район 1	Район 2	
(2,0)	0.84	0	0
(1,1)	0.6	0.4	0.4
(0,2)	0	0.64	0
	0.84	0.64	

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры: $a_{31} = 0$

$A =$

	Район 1	*Район 2*	
(2,0)	0.84	0	0
(1,1)	0.6	0.4	0.4
(0,2)	0	0.64	0
	0.84	0.64	

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры: $a_{22} = 1 - (1 - 0.6)^2 = 0.64$

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \textit{Район 1} & \textit{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \textit{Район 1} & \textit{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

Распр. поисковых усилий: $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$

У игрока 1 три стратегии:

- (2,0) — направить оба вертолета в район 1;
- (1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;
- (0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии:

- 1) направить человека в район 1;
- 2) направить человека в район 2.

Матрица игры:

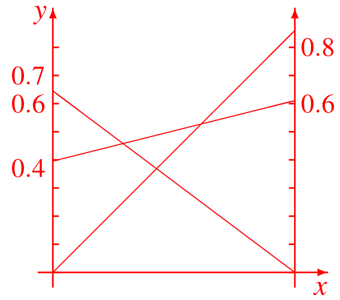
$$A = \begin{array}{c|cc|c} & \textit{Район 1} & \textit{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & \color{red}{0.84} & \color{red}{\underline{0.64}} & \end{array}$$

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$

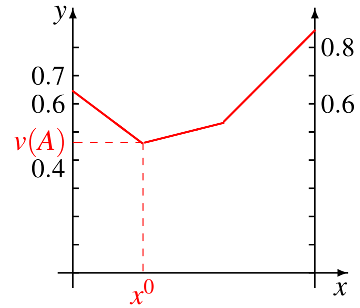
Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



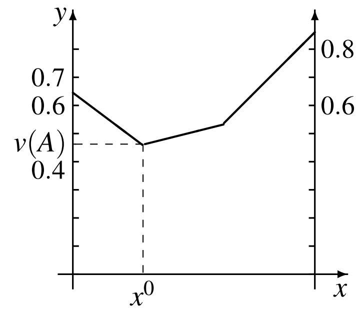
Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

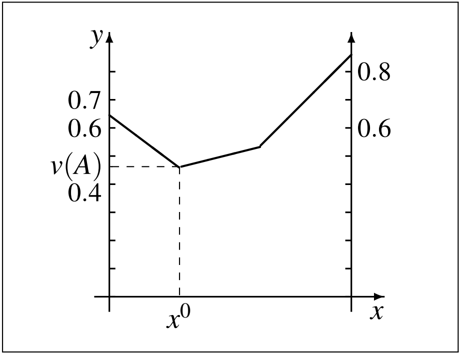
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Активные стратегии игрока 1: $(1,1)$ и $(0,2)$,
- его опт. стратегия имеет вид $p^0 = (0, y^0, 1 - y^0)$.
- Найдем y^0 из уравнения
  $0.6y + 0(1-y) = 0.4y + 0.64(1-y) \;\Rightarrow\; y^0 = 16/21.$
- Откуда $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ и
  $v(A) = 0.84 \cdot 0 + 0.6 \cdot (16/21) + 0 \cdot (5/21) = 16/35.$

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

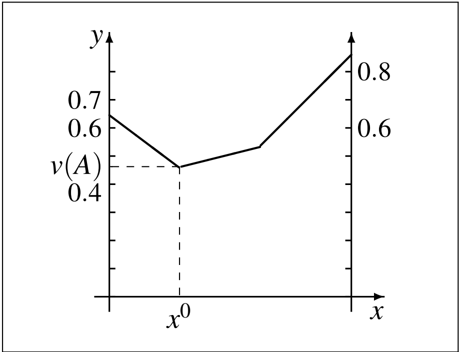
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Активные стратегии игрока 1: $(1,1)$ и $(0,2)$,
- его опт. стратегия имеет вид $p^0 = (0, y^0, 1 - y^0)$.
- Найдем y^0 из уравнения
  $0.6y + 0(1-y) = 0.4y + 0.64(1-y) \;\Rightarrow\; y^0 = 16/21.$
- Откуда $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ и
  $v(A) = 0.84 \cdot 0 + 0.6 \cdot (16/21) + 0 \cdot (5/21) = 16/35.$

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

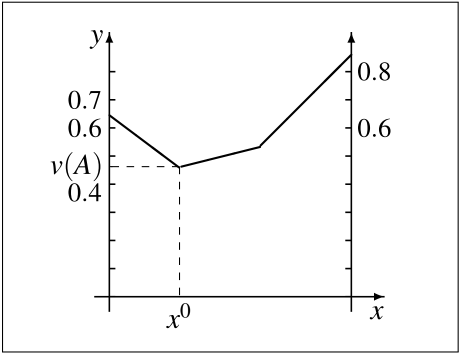
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Активные стратегии игрока 1: $(1,1)$ и $(0,2)$,
- его опт. стратегия имеет вид $p^0 = (0, y^0, 1 - y^0)$.
- Найдем y^0 из уравнения $0.6y + 0(1-y) = 0.4y + 0.64(1-y) \;\Rightarrow\; y^0 = 16/21$.
- Откуда $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ и $v(A) = 0.84 \cdot 0 + 0.6 \cdot (16/21) + 0 \cdot (5/21) = 16/35$.

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

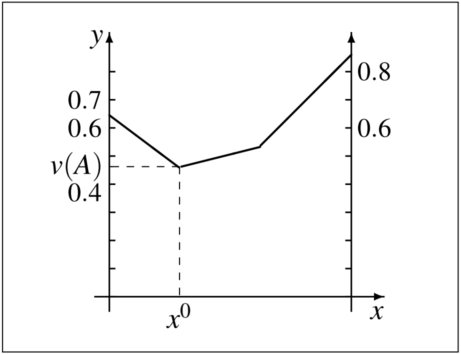
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Активные стратегии игрока 1: $(1,1)$ и $(0,2)$,
- его опт. стратегия имеет вид $p^0 = (0, y^0, 1 - y^0)$.
- Найдем y^0 из уравнения
  $0.6y + 0(1-y) = 0.4y + 0.64(1-y) \;\Rightarrow\; y^0 = 16/21.$
- Откуда $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ и
  $v(A) = 0.84 \cdot 0 + 0.6 \cdot (16/21) + 0 \cdot (5/21) = 16/35.$

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

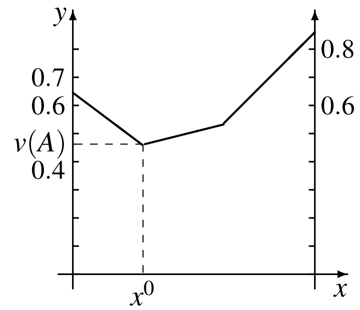
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Стратегию $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ можно реализовать следующим образом:
- каждый день $16/21$ времени поиска в каждом из районов находится по одному вертолету,
- а в остальное время два вертолета должны находится во втором районе.

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

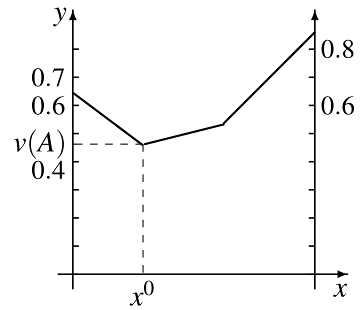
$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Стратегию $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ можно реализовать следующим образом:
- каждый день $16/21$ времени поиска в каждом из районов находится по одному вертолету,
- а в остальное время два вертолета должны находится во втором районе.

Распр. поисковых усилий: решаем игру графически

$$A = \begin{bmatrix} 0.84 & 0 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$$



- Стратегию $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ можно реализовать следующим образом:
- каждый день $16/21$ времени поиска в каждом из районов находится по одному вертолету,
- а в остальное время два вертолета должны находится во втором районе.

Содержание

Задача поиска оптимальной стратегии игрока 1

Игрок 1 найдет свою оптим. стратегию p^0, решая задачу

$$\max\left\{f(p) = \min_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i : \; p\in\Sigma_m\right\},$$

эквивалентную задаче ЛП,

$$v \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i - v \ge 0, \quad j=1,\dots,n,$$
$$\sum_{i=1}^m p_i = 1,$$
$$p_i \ge 0, \quad i=1,\dots,m.$$

в которой в подграфике функции $f(p)$ ищется точка (p^0, v^0) с максим. координатой $v^0 = f(p^0)$.

Перейти к определению ф-ции выигрышей

Задача поиска оптимальной стратегии игрока 1

Игрок 1 найдет свою оптим. стратегию p^0, решая задачу

$$\max\left\{f(p) = \min_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i : \ p\in\Sigma_m\right\},$$

эквивалентную задаче ЛП,

$$v\to\max,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i - v \ge 0, \quad j=1,\dots,n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$
$$p_i\ge 0, \quad i=1,\dots,m.$$

в которой в подграфике функции $f(p)$ ищется точка (p^0, v^0) с максим. координатой $v^0 = f(p^0)$.

Перейти к определению ф-ции выигрышей

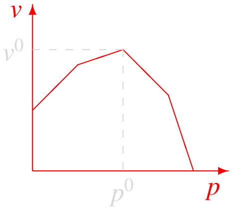
Задача поиска оптимальной стратегии игрока 1

Игрок 1 найдет свою оптим. стратегию p^0, решая задачу

$$\max\left\{f(p) = \min_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i : \; p \in \Sigma_m\right\},$$

эквивалентную задаче ЛП,

$$v \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i - v \ge 0, \quad j = 1, \dots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$
$$p_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, m.$$



в которой в подграфике функции $f(p)$ ищется точка (p^0, v^0) с максим. координатой $v^0 = f(p^0)$.

Перейти к определению ф-ции выигрышей

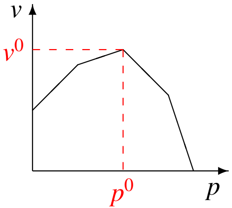
Задача поиска оптимальной стратегии игрока 1

Игрок 1 найдет свою оптим. стратегию p^0, решая задачу

$$\max \left\{ f(p) = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i : \; p \in \Sigma_m \right\},$$

эквивалентную задаче ЛП,

$$v \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i - v \ge 0, \quad j = 1, \dots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$
$$p_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, m.$$



в которой в подграфике функции $f(p)$ ищется точка (p^0, v^0) с максим. координатой $v^0 = f(p^0)$.

Перейти к определению ф-ции выигрышей

Задача поиска оптимальной стратегии игрока 2

Игрок 2 найдет свою оптим. стратегию q^0, решая задачу

$$\min\left\{ g(q) = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j : \ q \in \Sigma_n \right\},$$

эквивалентную задаче ЛП,

$$v \to \min,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \ge 0, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$
$$q_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

в которой в надграфике функции $g(q)$ ищется точка (q^0, v^0) с минимальной координатой $v^0 = g(q^0)$.

Перейти к определению ф-ции проигрышей

Задача поиска оптимальной стратегии игрока 2

Игрок 2 найдет свою оптим. стратегию q^0, решая задачу

$$\min\left\{g(q) = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j : \ q \in \Sigma_n\right\},$$

эквивалентную задаче ЛП,

$$v \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \ge 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

$$q_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

в которой в надграфике функции $g(q)$ ищется точка (q^0, v^0) с минимальной координатой $v^0 = g(q^0)$.

Перейти к определению ф-ции проигрышей

Задача поиска оптимальной стратегии игрока 2

Игрок 2 найдет свою оптим. стратегию q^0, решая задачу

$$\min \left\{ g(q) = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j : \; q \in \Sigma_n \right\},$$

эквивалентную задаче ЛП,

$$\begin{aligned} & v \to \min, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \\ & q_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

в которой в надграфике функции $g(q)$ ищется точка (q^0, v^0) с минимальной координатой $v^0 = g(q^0)$.

Перейти к определению ф-ции проигрышей

Переход к игре с положительной ценой

Лемма

Пусть матрица A^a получена добавлением к кажлому элементу матрицы A числа a. Тогда $E_{A^a}(p,q) = E_A(p,q) + a$ для любых смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_n$.

Следствие

Матричные игры с матрицами A и A^a эквивалентны в том смысле, что они имеют одинаковые оптимальные стратегии.

В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что

> *нижняя чистая цена игры положительна, т. е.* $\alpha(A) > 0$.

Переход к игре с положительной ценой

Лемма

Пусть матрица A^a получена добавлением к каждому элементу матрицы A числа a. Тогда $E_{A^a}(p,q) = E_A(p,q) + a$ для любых смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_n$.

Следствие

Матричные игры с матрицами A и A^a эквивалентны в том смысле, что они имеют одинаковые оптимальные стратегии.

В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что

нижняя чистая цена игры положительна, т. е. $\alpha(A) > 0$.

Переход к игре с положительной ценой

Лемма

Пусть матрица A^a получена добавлением к кажлому элементу матрицы A числа a. Тогда $E_{A^a}(p,q) = E_A(p,q) + a$ для любых смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_n$.

Следствие

Матричные игры с матрицами A и A^a эквивалентны в том смысле, что они имеют одинаковые оптимальные стратегии.

В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что

нижняя чистая цена игры положительна, т. е. $\alpha(A) > 0$.

Переход к игре с положительной ценой

Лемма

Пусть матрица A^a получена добавлением к кажлому элементу матрицы A числа a. Тогда $E_{A^a}(p, q) = E_A(p, q) + a$ для любых смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_n$.

Следствие

Матричные игры с матрицами A и A^a эквивалентны в том смысле, что они имеют одинаковые оптимальные стратегии.

В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что

нижняя чистая цена игры положительна, т. е. $\alpha(A) > 0$.

Переход к игре с положительной ценой

Лемма

Пусть матрица A^a получена добавлением к кажлому элементу матрицы A числа a. Тогда $E_{A^a}(p,q) = E_A(p,q) + a$ для любых смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_n$.

Следствие

Матричные игры с матрицами A и A^a эквивалентны в том смысле, что они имеют одинаковые оптимальные стратегии.

В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что

нижняя чистая цена игры положительна, т. е. $\alpha(A) > 0$.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$v \to \max,$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$ $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$ $p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$	$v \to \min,$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$ $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$ $q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$

переменная v — также положительна.

Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \dots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$$v \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$
$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$v \to \min,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$
$$q_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

переменная v — также положительна.
Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \ldots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Так как $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$$
\begin{aligned}
&v \to \max,\\
&\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i - v \ge 0, \quad j = 1,\dots,n,\\
&\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\\
&p_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&v \to \min,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j - v \ge 0, \quad i = 1,\dots,m,\\
&\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\\
&q_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n
\end{aligned}
$$

переменная v — также положительна.

Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1,\dots,m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1,\dots,n.$$

Так как $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП

преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$$\boxed{\begin{array}{l} v \to \max, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \\ p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} v \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \\ q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array}}$$

переменная v — также положительна.

Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \dots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$$\begin{aligned} & v \to \max, \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \\ & p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v \to \min, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \\ & q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

переменная v — также положительна.

Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \dots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$$\begin{array}{l} v \to \max, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \\ p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{array} \qquad \begin{array}{l} v \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \\ q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array}$$

переменная v — также положительна.

Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \dots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$$\boxed{\begin{aligned} & v \to \max, \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \\ & p_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} & v \to \min, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \\ & q_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}}$$

переменная v — также положительна.

Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \ldots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Так как $\dfrac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$$\begin{array}{l} v \to \max, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \\ p_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array} \qquad \begin{array}{l} v \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \\ q_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

переменная v — также положительна.

Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \ldots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Так как $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП

преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

Так как $\alpha(A) > 0$, то в задачах

$$\boxed{\begin{array}{l} v \to \max, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \\ p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} v \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \\ q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array}}$$

переменная v — также положительна.

Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \dots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП

преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$
$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$v \to \min,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - v \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$
$$q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \dots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \ldots, m; \qquad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Так как $\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$, то наши задачи ЛП

преобразуются в пару двойственных задач.

Сведение матр. игры к решению пары двойств. з-ч ЛП

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема

Решение матричной игры эквивалентно решению пары двойственных задач ЛП.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \leq 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
5. Вычисляем $\bar{v} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ и цену исходной игры $v(A) = \bar{v} - a$,
6. а затем определяем оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{v}y^*$ и $q^0 = \bar{v}x^*$.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \le 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
5. Вычисляем $\bar{v} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ и цену исходной игры $v(A) = \bar{v} - a$,
6. а затем определяем оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{v}y^*$ и $q^0 = \bar{v}x^*$.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \leq 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
5. Вычисляем $\bar{v} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ и цену исходной игры $v(A) = \bar{v} - a$,
6. а затем определяем оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{v}y^*$ и $q^0 = \bar{v}x^*$.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае $(\alpha(A) < \beta(A))$ переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \leq 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
5. Вычисляем $\bar{v} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ и цену исходной игры $v(A) = \bar{v} - a$,
6. а затем определяем оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{v}y^*$ и $q^0 = \bar{v}x^*$.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \leq 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
5. Вычисляем $\bar{v} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ и цену исходной игры $v(A) = \bar{v} - a$,
6. а затем определяем оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{v}y^*$ и $q^0 = \bar{v}x^*$.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае $(\alpha(A) < \beta(A))$ переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \le 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
5. Вычисляем $\bar{v} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ и цену исходной игры $v(A) = \bar{v} - a$,
6. а затем определяем оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{v}y^*$ и $q^0 = \bar{v}x^*$.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \le 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
5. Вычисляем $\bar{v} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ и цену исходной игры $v(A) = \bar{v} - a$,
6. а затем определяем оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{v}y^*$ и $q^0 = \bar{v}x^*$.

Алгоритм решения матричной игры

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры.
   - Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем.
   - В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \le 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$.
3. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A.
4. Решаем любую из пары двойств. задач ЛП и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
5. Вычисляем $\bar{v} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$ и цену исходной игры $v(A) = \bar{v} - a$,
6. а затем определяем оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{v}y^*$ и $q^0 = \bar{v}x^*$.

Пример: планирование посева

- Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засеять свое поле тремя культурами,
- если урожайность этих культур, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: прохладным и дождливым, нормальным, или жарким и сухим.
- Фермер подсчитал чистую прибыль с 1 га от разных культур в зависимости от погоды:

	прохладное и дождливое	нормальное	жаркое и сухое
Культура 1	0	2	5
Культура 2	2	3	1
Культура 3	4	3	-1

К решению К задаче ЛП

Пример: планирование посева

- Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засеять свое поле тремя культурами,
- если урожайность этих культур, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: прохладным и дождливым, нормальным, или жарким и сухим.
- Фермер подсчитал чистую прибыль с 1 га от разных культур в зависимости от погоды:

	прохладное и дождливое	нормальное	жаркое и сухое
Культура 1	0	2	5
Культура 2	2	3	1
Культура 3	4	3	-1

К решению К задаче ЛП

Пример: планирование посева

- Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засеять свое поле тремя культурами,
- если урожайность этих культур, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: прохладным и дождливым, нормальным, или жарким и сухим.
- Фермер подсчитал чистую прибыль с 1 га от разных культур в зависимости от погоды:

	прохладное и дождливое	нормальное	жаркое и сухое
Культура 1	0	2	5
Культура 2	2	3	1
Культура 3	4	3	-1

К решению К задаче ЛП

Пример: планирование посева

- Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засеять свое поле тремя культурами,
- если урожайность этих культур, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: прохладным и дождливым, нормальным, или жарким и сухим.
- Фермер подсчитал чистую прибыль с 1 га от разных культур в зависимости от погоды:

	прохладное и дождливое	нормальное	жаркое и сухое	
Культура 1	0	2	5	0
Культура 2	2	3	1	<u>1</u>
Культура 3	4	3	-1	-1
	4	<u>3</u>	5	

◂ К решению ◂ К задаче ЛП

Обсуждение примера

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,
- то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.
- В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру,
- в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2.
- Матрица A выигрышей в данной игре — это таблица доходов фермера.

Обсуждение примера

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,
- то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.
- В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру,
- в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2.
- Матрица A выигрышей в данной игре — это таблица доходов фермера.

Обсуждение примера

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,
- то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.
- В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру,
- в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2.
- Матрица A выигрышей в данной игре — это таблица доходов фермера.

Обсуждение примера

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,
- то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.
- В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру,
- в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2.
- Матрица A выигрышей в данной игре — это таблица доходов фермера.

Обсуждение примера

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,
- то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.
- В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру,
- в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2.
- Матрица A выигрышей в данной игре — это таблица доходов фермера.

Обсуждение примера

- Здесь у фермера нет реального противника.
- Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия,
- то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.
- В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру,
- в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2.
- Матрица A выигрышей в данной игре — это таблица доходов фермера.

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях. ▸ Показать матрицу
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.
- Сразу запишем задачу ЛП:

$$
\begin{aligned}
x_1 + \ x_2 + \ x_3 &\to \max \\
2x_2 + 5x_3 &\le 1, \\
2x_1 + 3x_2 + 1x_3 &\le 1, \\
4x_1 + 3x_2 - 1x_3 &\le 1, \\
x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

- Оптимальное решение этой и двойственной к ней задач следующие: $x^0 = (3/10, 0, 1/5)^T$ и $y^0 = (1/4, 0, 1/4)^T$.
- Найдем цену игры: $v(A) = \dfrac{1}{y_1^0 + y_2^0 + y_3^0} = \dfrac{1}{1/4 + 1/4} = 2.$
- Опт. стратегия игрока 1: $p^0 = v(A) y^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$.

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.
- Сразу запишем задачу ЛП:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &\to \max \\ 2x_2 + 5x_3 &\leq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 &\leq 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 1x_3 &\leq 1, \\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

- Оптимальное решение этой и двойственной к ней задач следующие: $x^0 = (3/10, 0, 1/5)^T$ и $y^0 = (1/4, 0, 1/4)^T$.
- Найдем цену игры: $v(A) = \dfrac{1}{y_1^0 + y_2^0 + y_3^0} = \dfrac{1}{1/4 + 1/4} = 2.$
- Опт. стратегия игрока 1: $p^0 = v(A)y^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$.

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.
- Сразу запишем задачу ЛП: ▸ Показать матрицу

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\to \max \\ 2x_2 + 5x_3 &\le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 &\le 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 1x_3 &\le 1, \\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

- Оптимальное решение этой и двойственной к ней задач следующие: $x^0 = (3/10, 0, 1/5)^T$ и $y^0 = (1/4, 0, 1/4)^T$.
- Найдем цену игры: $v(A) = \dfrac{1}{y_1^0 + y_2^0 + y_3^0} = \dfrac{1}{1/4 + 1/4} = 2$.
- Опт. стратегия игрока 1: $p^0 = v(A)y^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$.

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.
- Сразу запишем задачу ЛП:

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + \ x_3 &\to \max \\ 2x_2 + 5x_3 &\leq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 &\leq 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 1x_3 &\leq 1, \\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

- Оптимальное решение этой и двойственной к ней задач следующие: $x^0 = (3/10, 0, 1/5)^T$ и $y^0 = (1/4, 0, 1/4)^T$.
- Найдем цену игры: $v(A) = \dfrac{1}{y_1^0 + y_2^0 + y_3^0} = \dfrac{1}{1/4 + 1/4} = 2.$
- Опт. стратегия игрока 1: $p^0 = v(A)y^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$.

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.
- Сразу запишем задачу ЛП:

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + \ x_3 &\to \max \\ 2x_2 + 5x_3 &\leq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 &\leq 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 1x_3 &\leq 1, \\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

- Оптимальное решение этой и двойственной к ней задач следующие: $x^0 = (3/10, 0, 1/5)^T$ и $y^0 = (1/4, 0, 1/4)^T$.
- Найдем цену игры: $v(A) = \dfrac{1}{y_1^0 + y_2^0 + y_3^0} = \dfrac{1}{1/4 + 1/4} = 2.$
- Опт. стратегия игрока 1: $p^0 = v(A)y^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$.

Решение примера

- Так как $\alpha(A) = 1 < 3 = \beta(A)$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.
- Сразу запишем задачу ЛП:

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + \ x_3 &\to \max \\ 2x_2 + 5x_3 &\le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 &\le 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 1x_3 &\le 1, \\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

- Оптимальное решение этой и двойственной к ней задач следующие: $x^0 = (3/10, 0, 1/5)^T$ и $y^0 = (1/4, 0, 1/4)^T$.
- Найдем цену игры: $v(A) = \dfrac{1}{y_1^0 + y_2^0 + y_3^0} = \dfrac{1}{1/4 + 1/4} = 2$.
- Опт. стратегия игрока 1: $p^0 = v(A)y^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$.

Обсуждение результата

- Здесь смешанная стратегия $p^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$ допускает иную, более естественную, интерпретацию.
- Она рекомендует фермеру засеять половину своего поля культурой 1,
- а другую половину — культурой 3.
- При любой погоде доход фермера не будет меньшим цены $v(A) = 2$ данной игры.

Обсуждение результата

- Здесь смешанная стратегия $p^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$ допускает иную, более естественную, интерпретацию.
- Она рекомендует фермеру засеять половину своего поля культурой 1,
- а другую половину — культурой 3.
- При любой погоде доход фермера не будет меньшим цены $v(A) = 2$ данной игры.

Обсуждение результата

- Здесь смешанная стратегия $p^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$ допускает иную, более естественную, интерпретацию.
- Она рекомендует фермеру засеять половину своего поля культурой 1,
- а другую половину — культурой 3.
- При любой погоде доход фермера не будет меньшим цены $v(A) = 2$ данной игры.

Обсуждение результата

- Здесь смешанная стратегия $p^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$ допускает иную, более естественную, интерпретацию.
- Она рекомендует фермеру засеять половину своего поля культурой 1,
- а другую половину — культурой 3.
- При любой погоде доход фермера не будет меньшим цены $v(A) = 2$ данной игры.

О совпадении максимина и минимакса

Теорема

Пусть для действительной функции $f(x,y), x \in X, y \in Y$ *существуют*

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) \quad \text{и} \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y).$$

Тогда $\alpha \le \beta$.

1. $\alpha = \beta$ *тогда и только тогда, когда функция* $f(x,y)$ *имеет седловую точку* (x^0, y^0):
$$f(x,y^0) \le f(x^0,y^0) \le f(x^0,y), \quad x \in X, \ y \in Y.$$
2. *Если* (x^0,y^0) — *седловая точка функции* $f(x,y)$, *то* $f(x^0,y^0) = \alpha = \beta$.

◂ Вернуться к матричным играм ◂ Вернуться к док-ву теоремы фон Неймана

О совпадении максимина и минимакса

Теорема

Пусть для действительной функции $f(x,y), x \in X, y \in Y$ *существуют*

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) \quad \text{и} \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y).$$

Тогда $\alpha \le \beta$.

1. $\alpha = \beta$ *тогда и только тогда, когда функция* $f(x,y)$ *имеет седловую точку* (x^0, y^0):
$$f(x,y^0) \le f(x^0,y^0) \le f(x^0,y), \quad x \in X,\ y \in Y.$$
2. *Если* (x^0,y^0) — *седловая точка функции* $f(x,y)$, *то* $f(x^0,y^0) = \alpha = \beta$.

◂ Вернуться к матричным играм ◂ Вернуться к док-ву теоремы фон Неймана

О совпадении максимина и минимакса

Теорема

Пусть для действительной функции $f(x,y), x \in X, y \in Y$ *существуют*

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x,y) \quad \text{и} \quad \beta \overset{\text{def}}{=} \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x,y).$$

Тогда $\alpha \leq \beta$.

1. $\alpha = \beta$ *тогда и только тогда, когда функция* $f(x,y)$ *имеет седловую точку* (x^0, y^0)*:*

$$f(x,y^0) \leq f(x^0,y^0) \leq f(x^0,y), \quad x \in X, \; y \in Y.$$

2. *Если* (x^0,y^0) *— седловая точка функции* $f(x,y)$*, то* $f(x^0,y^0) = \alpha = \beta$.

Вернуться к матричным играм

Вернуться к док-ву теоремы фон Неймана

О совпадении максимина и минимакса

Теорема

Пусть для действительной функции $f(x,y), x \in X, y \in Y$ *существуют*

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x,y) \quad \text{и} \quad \beta \overset{\text{def}}{=} \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x,y).$$

Тогда $\alpha \leq \beta$.

1. $\alpha = \beta$ *тогда и только тогда, когда функция* $f(x,y)$ *имеет седловую точку* (x^0, y^0)*:*

$$f(x,y^0) \leq f(x^0,y^0) \leq f(x^0,y), \quad x \in X, \; y \in Y.$$

2. *Если* (x^0,y^0) *— седловая точка функции* $f(x,y)$*, то* $f(x^0,y^0) = \alpha = \beta$.

Вернуться к матричным играм
Вернуться к док-ву теоремы фон Неймана