

Позиционные игры:  
дерево игры, стратегическая форма,  
поведенческие стратегии

Н.Н. Писарук  
pisaruk@yandex.by

Экономический факультет  
Белорусский государственный университет

Минск - 2014

# Содержание

## 1 Позиционные игры

- Дерево игры
  - Игра «упрощенный покер»
- Игры с совершенной памятью
- Стратегическая форма игры
  - Игра «упрощенный покер»: продолжение

## 2 Поведенческие стратегии

- Мотивация и определение
- Переход от поведенческой стратегии к смешанной
- Переход от смешанной стратегии к поведенческой

# Многоходовые бескоалиционные игры

- Основы теории позиционных игр заложены Х. Куном (H.W. Kuhn).
- Позиционные игры — это многоходовые (или динамические) бескоалиционные игры.
- В позиционной игре ходы делаются в логической последовательности.
- Каждый ход делается либо одним из игроков (личный ход),
- либо выбирается случайным образом (случайный ход) в соответствии с заданным распределением вероятностей.
- В каждой конечной позиции игры задан вектор выигрышей игроков.

# Многоходовые бескоалиционные игры

- Основы теории позиционных игр заложены Х. Куном (H.W. Kuhn).
- Позиционные игры — это многоходовые (или динамические) бескоалиционные игры.
- В позиционной игре ходы делаются в логической последовательности.
- Каждый ход делается либо одним из игроков (личный ход),
- либо выбирается случайным образом (случайный ход) в соответствии с заданным распределением вероятностей.
- В каждой конечной позиции игры задан вектор выигрышей игроков.

# Многоходовые бескоалиционные игры

- Основы теории позиционных игр заложены Х. Куном (H.W. Kuhn).
- Позиционные игры — это многоходовые (или динамические) бескоалиционные игры.
- В позиционной игре ходы делаются в логической последовательности.
- Каждый ход делается либо одним из игроков (личный ход),
- либо выбирается случайным образом (случайный ход) в соответствии с заданным распределением вероятностей.
- В каждой конечной позиции игры задан вектор выигрышей игроков.

# Многоходовые бескоалиционные игры

- Основы теории позиционных игр заложены Х. Куном (H.W. Kuhn).
- Позиционные игры — это многоходовые (или динамические) бескоалиционные игры.
- В позиционной игре ходы делаются в логической последовательности.
- **Каждый ход делается либо одним из игроков (личный ход),**
- либо выбирается случайным образом (случайный ход) в соответствии с заданным распределением вероятностей.
- В каждой конечной позиции игры задан вектор выигрышей игроков.

# Многоходовые бескоалиционные игры

- Основы теории позиционных игр заложены Х. Куном (H.W. Kuhn).
- Позиционные игры — это многоходовые (или динамические) бескоалиционные игры.
- В позиционной игре ходы делаются в логической последовательности.
- Каждый ход делается либо одним из игроков (личный ход),
- либо выбирается случайным образом (случайный ход) в соответствии с заданным распределением вероятностей.
- В каждой конечной позиции игры задан вектор выигрышей игроков.

# Многоходовые бескоалиционные игры

- Основы теории позиционных игр заложены Х. Куном (H.W. Kuhn).
- Позиционные игры — это многоходовые (или динамические) бескоалиционные игры.
- В позиционной игре ходы делаются в логической последовательности.
- Каждый ход делается либо одним из игроков (личный ход),
- либо выбирается случайным образом (случайный ход) в соответствии с заданным распределением вероятностей.
- В каждой конечной позиции игры задан вектор выигрышей игроков.



# Содержание

## 1 Позиционные игры

- Дерево игры
  - Игра «упрощенный покер»
- Игры с совершенной памятью
- Стратегическая форма игры
  - Игра «упрощенный покер»: продолжение

## 2 Поведенческие стратегии

- Мотивация и определение
- Переход от поведенческой стратегии к смешанной
- Переход от смешанной стратегии к поведенческой

# Модель позиционной игры: дерево игры

- **Позиц. игра представляется *деревом игры*  $T = (V, E)$ ,**
- вершины (узлы)  $v \in V$  — *позиции*,
- а дуги  $e \in E$  — *ходы* в игре.
- Корень дерева соответствует *начальной позиции* игры.
- Каждый узел, за исключением листьев, помечен одним из чисел  $0, 1, \dots, n$ , указывающим номер игрока, который должен делать ход в данной позиции,  $0$  означает случайный ход.
- Дугам  $(v, w)$ , выходящих из узла  $v$  с меткой  $0$ , приписаны вероятности  $\rho(v, w)$  применения соответствующих им случайных ходов,  
$$\sum_{(v,w) \in E(v,V)} \rho(v, w) = 1.$$
- Листья дерева  $T$  — это *конечные позиции* в игре.
- Каждому листу  $t$  приписан вектор  $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$  выигрышей игроков, в случае, когда игра заканчивается в данном узле.

# Модель позиционной игры: дерево игры

- Позиц. игра представляется *деревом игры*  $T = (V, E)$ ,
- **вершины (узлы)  $v \in V$  — позиции,**
- а дуги  $e \in E$  — *ходы* в игре.
- Корень дерева соответствует *начальной позиции* игры.
- Каждый узел, за исключением листьев, помечен одним из чисел  $0, 1, \dots, n$ , указывающим номер игрока, который должен делать ход в данной позиции,  $0$  означает случайный ход.
- Дугам  $(v, w)$ , выходящих из узла  $v$  с меткой  $0$ , приписаны вероятности  $\rho(v, w)$  применения соответствующих им случайных ходов,  
$$\sum_{(v,w) \in E(v,V)} \rho(v, w) = 1.$$
- Листья дерева  $T$  — это *конечные позиции* в игре.
- Каждому листу  $t$  приписан вектор  $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$  выигрышей игроков, в случае, когда игра заканчивается в данном узле.

# Модель позиционной игры: дерево игры

- Позиц. игра представляется *деревом игры*  $T = (V, E)$ ,
- вершины (узлы)  $v \in V$  — *позиции*,
- а дуги  $e \in E$  — *ходы* в игре.
- Корень дерева соответствует *начальной позиции* игры.
- Каждый узел, за исключением листьев, помечен одним из чисел  $0, 1, \dots, n$ , указывающим номер игрока, который должен делать ход в данной позиции, 0 означает случайный ход.
- Дугам  $(v, w)$ , выходящих из узла  $v$  с меткой 0, приписаны вероятности  $\rho(v, w)$  применения соответствующих им случайных ходов,  
$$\sum_{(v,w) \in E(v,V)} \rho(v, w) = 1.$$
- Листья дерева  $T$  — это *конечные позиции* в игре.
- Каждому листу  $t$  приписан вектор  $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$  выигрышей игроков, в случае, когда игра заканчивается в данном узле.

# Модель позиционной игры: дерево игры

- Позиц. игра представляется *деревом игры*  $T = (V, E)$ ,
- вершины (узлы)  $v \in V$  — *позиции*,
- а дуги  $e \in E$  — *ходы* в игре.
- **Корень дерева соответствует начальной позиции игры.**
- Каждый узел, за исключением листьев, помечен одним из чисел  $0, 1, \dots, n$ , указывающим номер игрока, который должен делать ход в данной позиции,  $0$  означает случайный ход.
- Дугам  $(v, w)$ , выходящих из узла  $v$  с меткой  $0$ , приписаны вероятности  $\rho(v, w)$  применения соответствующих им случайных ходов,  
$$\sum_{(v,w) \in E(v,V)} \rho(v, w) = 1.$$
- Листья дерева  $T$  — это *конечные позиции* в игре.
- Каждому листу  $t$  приписан вектор  $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$  выигрышей игроков, в случае, когда игра заканчивается в данном узле.

# Модель позиционной игры: дерево игры

- Позиц. игра представляется *деревом игры*  $T = (V, E)$ ,
- вершины (узлы)  $v \in V$  — *позиции*,
- а дуги  $e \in E$  — *ходы* в игре.
- Корень дерева соответствует *начальной позиции* игры.
- Каждый узел, за исключением листьев, помечен одним из чисел  $0, 1, \dots, n$ , указывающим номер игрока, который должен делать ход в данной позиции,  $0$  означает случайный ход.
- Дугам  $(v, w)$ , выходящих из узла  $v$  с меткой  $0$ , приписаны вероятности  $\rho(v, w)$  применения соответствующих им случайных ходов,  
$$\sum_{(v,w) \in E(v,V)} \rho(v, w) = 1.$$
- Листья дерева  $T$  — это *конечные позиции* в игре.
- Каждому листу  $t$  приписан вектор  $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$  выигрышей игроков, в случае, когда игра заканчивается в данном узле.

# Модель позиционной игры: дерево игры

- Позиц. игра представляется *деревом игры*  $T = (V, E)$ ,
- вершины (узлы)  $v \in V$  — *позиции*,
- а дуги  $e \in E$  — *ходы* в игре.
- Корень дерева соответствует *начальной позиции* игры.
- Каждый узел, за исключением листьев, помечен одним из чисел  $0, 1, \dots, n$ , указывающим номер игрока, который должен делать ход в данной позиции,  $0$  означает случайный ход.
- Дугам  $(v, w)$ , выходящих из узла  $v$  с меткой  $0$ , приспаны вероятности  $\rho(v, w)$  применения соответствующих им случайных ходов,  
$$\sum_{(v,w) \in E(v,V)} \rho(v, w) = 1.$$
- Листья дерева  $T$  — это *конечные позиции* в игре.
- Каждому листу  $t$  приспан вектор  $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$  выигрышей игроков, в случае, когда игра заканчивается в данном узле.

# Модель позиционной игры: дерево игры

- Позиц. игра представляется *деревом игры*  $T = (V, E)$ ,
- вершины (узлы)  $v \in V$  — *позиции*,
- а дуги  $e \in E$  — *ходы* в игре.
- Корень дерева соответствует *начальной позиции* игры.
- Каждый узел, за исключением листьев, помечен одним из чисел  $0, 1, \dots, n$ , указывающим номер игрока, который должен делать ход в данной позиции,  $0$  означает случайный ход.
- Дугам  $(v, w)$ , выходящих из узла  $v$  с меткой  $0$ , приписаны вероятности  $\rho(v, w)$  применения соответствующих им случайных ходов,  
$$\sum_{(v,w) \in E(v,V)} \rho(v, w) = 1.$$
- **Листья дерева  $T$  — это конечные позиции в игре.**
- Каждому листу  $t$  приписан вектор  $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$  выигрышей игроков, в случае, когда игра заканчивается в данном узле.



# Модель позиционной игры: дерево игры

- Позиц. игра представляется *деревом игры*  $T = (V, E)$ ,
- вершины (узлы)  $v \in V$  — *позиции*,
- а дуги  $e \in E$  — *ходы* в игре.
- Корень дерева соответствует *начальной позиции* игры.
- Каждый узел, за исключением листьев, помечен одним из чисел  $0, 1, \dots, n$ , указывающим номер игрока, который должен делать ход в данной позиции,  $0$  означает случайный ход.
- Дугам  $(v, w)$ , выходящих из узла  $v$  с меткой  $0$ , приписаны вероятности  $\rho(v, w)$  применения соответствующих им случайных ходов,  
$$\sum_{(v,w) \in E(v,V)} \rho(v, w) = 1.$$
- Листья дерева  $T$  — это *конечные позиции* в игре.
- Каждому листу  $t$  приписан вектор  $(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$  выигрышей игроков, в случае, когда игра заканчивается в данном узле.

# Информация в позиционной игре

- **Информация в игре задается с помощью информационных множеств.**
- Две позиции принадлежат одному *инф. множеству*,
- если игрок, который делает ход в каждой из этих позиций, не может отличить одну позицию от другой.
- Следовательно, из всех узлов одного информационного множества выходит одинаковое число дуг.
- Как правило, при задании игры ходам приписываются некоторые имена, не обязательно уникальные.
- Нужно понимать, что одноименные ходы во всех позициях одного *инф. множества* — это один ход для игрока, который делает ход во всех этих позициях.
- Но одноименные ходы, которые делаются игроком в позициях разных *инф. множеств*, — это различные ходы этого игрока.

# Информация в позиционной игре

- Информация в игре задается с помощью информационных множеств.
- Две позиции принадлежат одному инф. множеству,
- если игрок, который делает ход в каждой из этих позиций, не может отличить одну позицию от другой.
- Следовательно, из всех узлов одного информационного множества выходит одинаковое число дуг.
- Как правило, при задании игры ходам приписываются некоторые имена, не обязательно уникальные.
- Нужно понимать, что одноименные ходы во всех позициях одного инф. множества — это один ход для игрока, который делает ход во всех этих позициях.
- Но одноименные ходы, которые делаются игроком в позициях разных инф. множеств, — это различные ходы этого игрока.

# Информация в позиционной игре

- Информация в игре задается с помощью информационных множеств.
- Две позиции принадлежат одному *инф. множеству*,
- **если игрок, который делает ход в каждой из этих позиций, не может отличить одну позицию от другой.**
- Следовательно, из всех узлов одного информационного множества выходит одинаковое число дуг.
- Как правило, при задании игры ходам приписываются некоторые имена, не обязательно уникальные.
- Нужно понимать, что одноименные ходы во всех позициях одного инф. множества — это один ход для игрока, который делает ход во всех этих позициях.
- Но одноименные ходы, которые делаются игроком в позициях разных инф. множеств, — это различные ходы этого игрока.

# Информация в позиционной игре

- Информация в игре задается с помощью информационных множеств.
- Две позиции принадлежат одному *инф. множеству*,
- если игрок, который делает ход в каждой из этих позиций, не может отличить одну позицию от другой.
- **Следовательно, из всех узлов одного информационного множества выходит одинаковое число дуг.**
- Как правило, при задании игры ходам приписываются некоторые имена, не обязательно уникальные.
- Нужно понимать, что одноименные ходы во всех позициях одного инф. множества — это один ход для игрока, который делает ход во всех этих позициях.
- Но одноименные ходы, которые делаются игроком в позициях разных инф. множеств, — это различные ходы этого игрока.

# Информация в позиционной игре

- Информация в игре задается с помощью информационных множеств.
- Две позиции принадлежат одному *инф. множеству*,
- если игрок, который делает ход в каждой из этих позиций, не может отличить одну позицию от другой.
- Следовательно, из всех узлов одного информационного множества выходит одинаковое число дуг.
- **Как правило, при задании игры ходам приписываются некоторые имена, не обязательно уникальные.**
- Нужно понимать, что одноименные ходы во всех позициях одного инф. множества — это один ход для игрока, который делает ход во всех этих позициях.
- Но одноименные ходы, которые делаются игроком в позициях разных инф. множеств, — это различные ходы этого игрока.

# Информация в позиционной игре

- Информация в игре задается с помощью информационных множеств.
- Две позиции принадлежат одному *инф. множеству*,
- если игрок, который делает ход в каждой из этих позиций, не может отличить одну позицию от другой.
- Следовательно, из всех узлов одного информационного множества выходит одинаковое число дуг.
- Как правило, при задании игры ходам приписываются некоторые имена, не обязательно уникальные.
- Нужно понимать, что одноименные ходы во всех позициях одного инф. множества — это один ход для игрока, который делает ход во всех этих позициях.
- Но одноименные ходы, которые делаются игроком в позициях разных инф. множеств, — это различные ходы этого игрока.

# Информация в позиционной игре

- Информация в игре задается с помощью информационных множеств.
- Две позиции принадлежат одному *инф. множеству*,
- если игрок, который делает ход в каждой из этих позиций, не может отличить одну позицию от другой.
- Следовательно, из всех узлов одного информационного множества выходит одинаковое число дуг.
- Как правило, при задании игры ходам приписываются некоторые имена, не обязательно уникальные.
- Нужно понимать, что одноименные ходы во всех позициях одного инф. множества — это один ход для игрока, который делает ход во всех этих позициях.
- Но одноименные ходы, которые делаются игроком в позициях разных инф. множеств, — это различные ходы этого игрока.



# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.

# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.

# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- **Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .**
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.

# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- Посмотрев на свою карту, игрок 1 может пасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.

# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.

# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.

# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.

# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.



# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.

# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.

# Игра «упрощенный покер»

- В начале игры каждый игрок делает единичную ставку.
- Колода карт, содержащая  $m$  красных и  $n$  черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1.
- Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму  $a$ .
- Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается;
  - игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта,
  - и проигрывает ставку, если у него черная карта.
- Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, решает: пасовать ему или объявить игру.
- Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку.
- Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму  $a$ , то карты открываются и
  - игрок 1 выигрывает  $1 + a$ , если у него красная карта,
  - и проигрывает  $1 + a$ , если у него черная карта.

# Дерево игры «упрощенный покер»

A ○

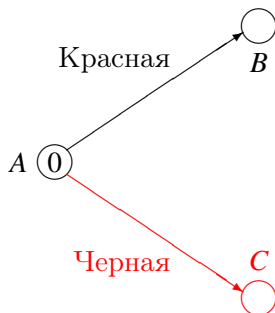
# Дерево игры «упрощенный покер»

A  $\textcircled{0}$

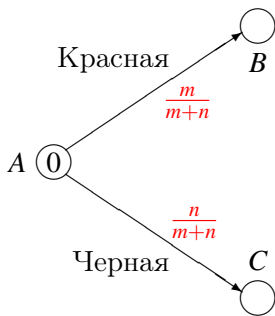
# Дерево игры «упрощенный покер»



## Дерево игры «упрощенный покер»

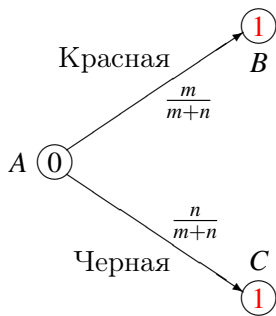


## Дерево игры «упрощенный покер»

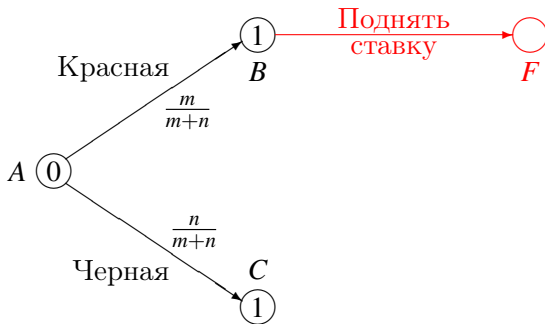




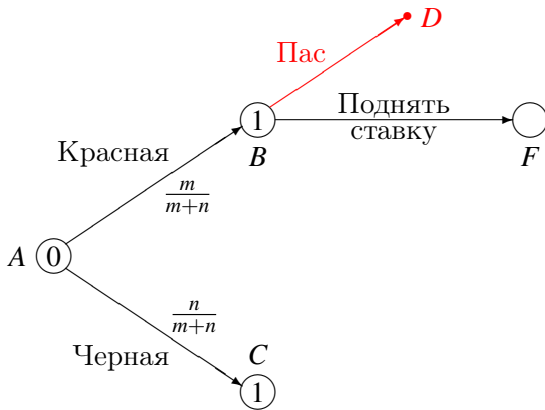
## Дерево игры «упрощенный покер»



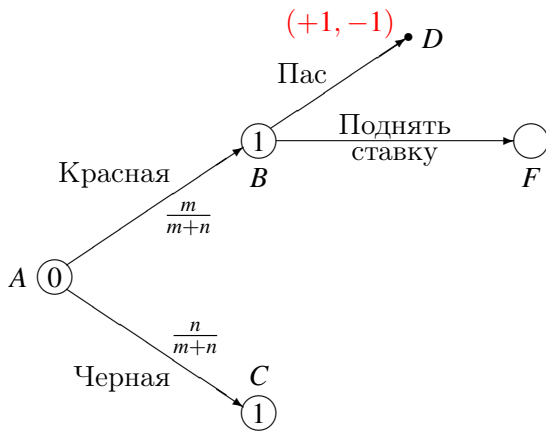
## Дерево игры «упрощенный покер»



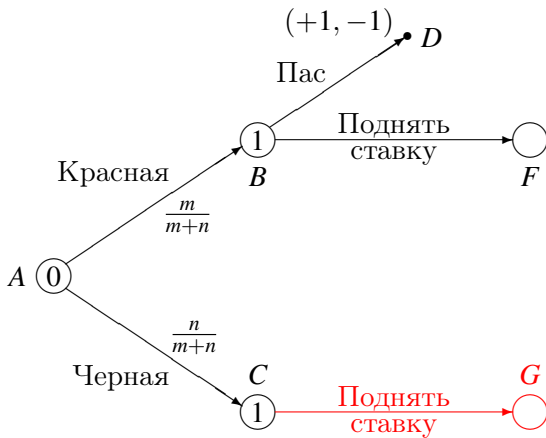
## Дерево игры «упрощенный покер»



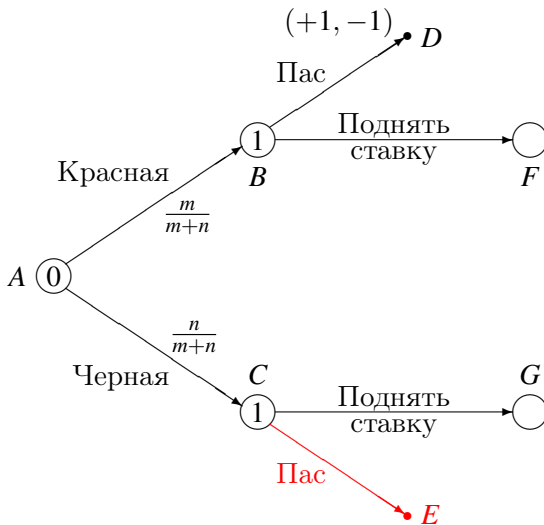
## Дерево игры «упрощенный покер»



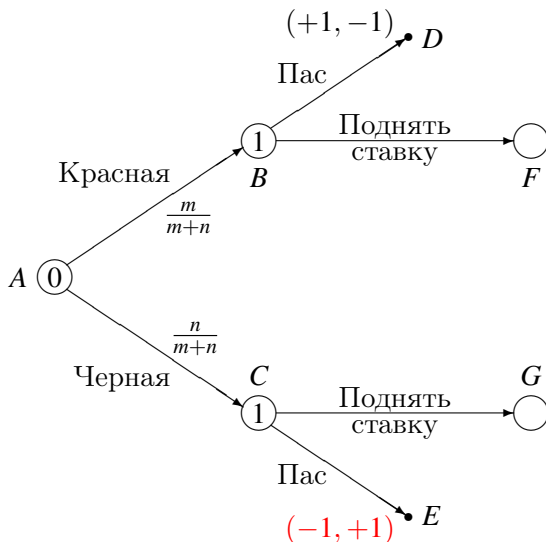
# Дерево игры «упрощенный покер»



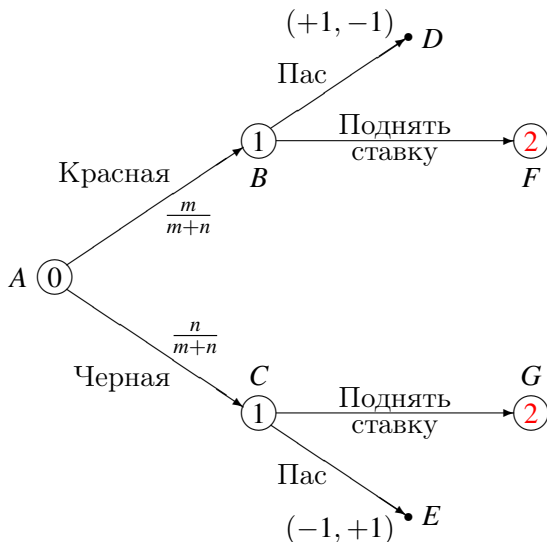
# Дерево игры «упрощенный покер»



## Дерево игры «упрощенный покер»

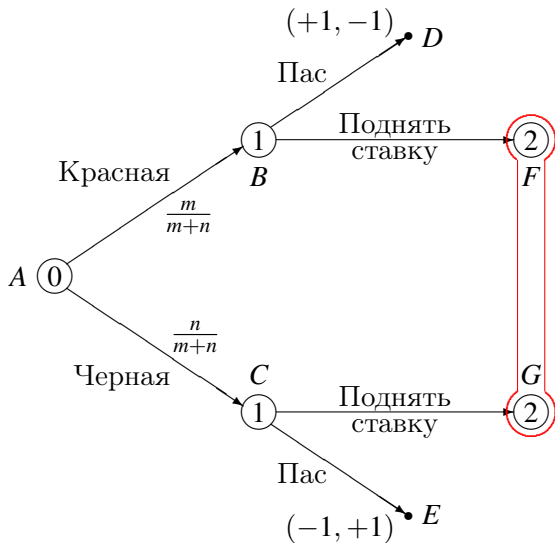


## Дерево игры «упрощенный покер»

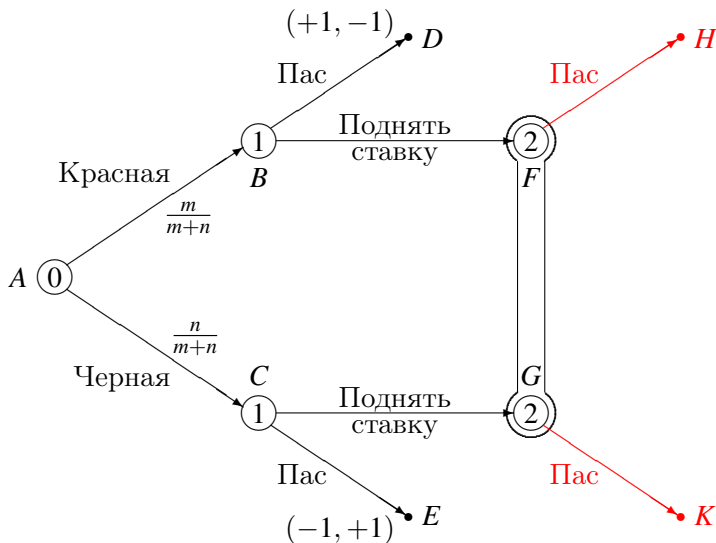




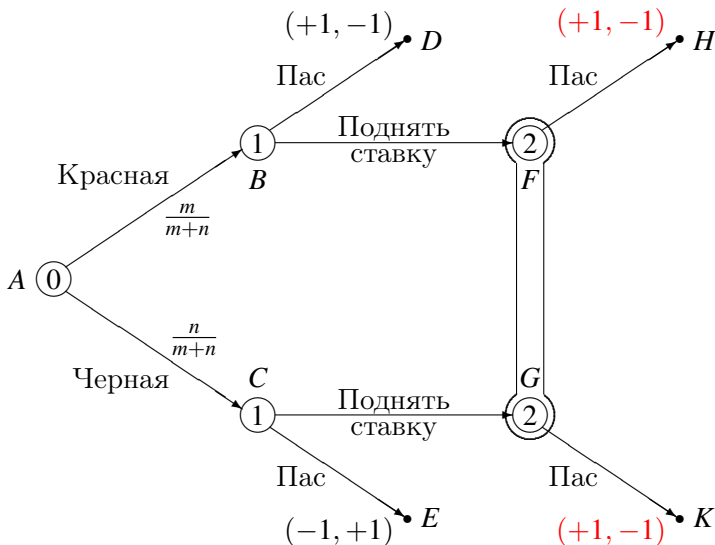
# Дерево игры «упрощенный покер»



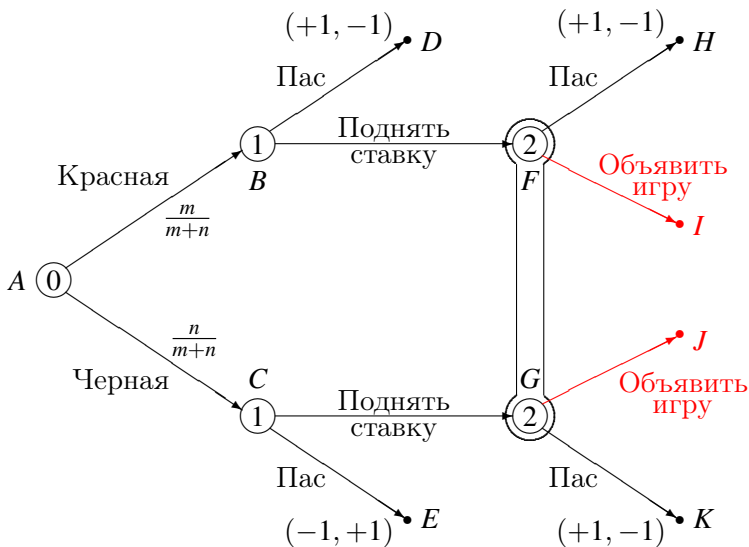
# Дерево игры «упрощенный покер»



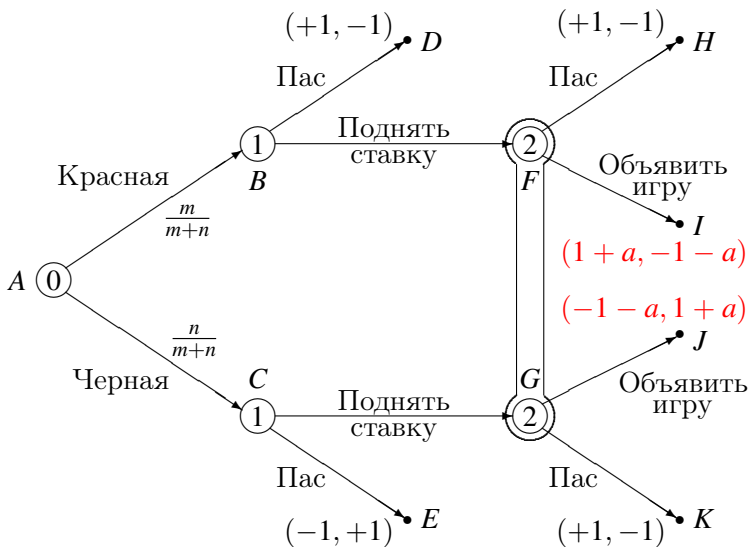
# Дерево игры «упрощенный покер»



# Дерево игры «упрощенный покер»



# Дерево игры «упрощенный покер»



# Содержание

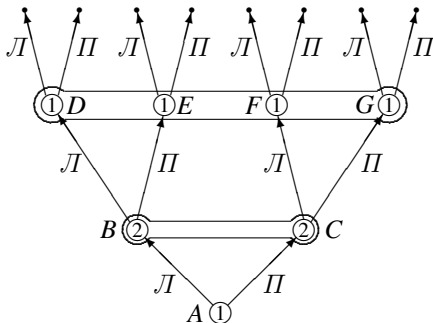
## 1 Позиционные игры

- Дерево игры
  - Игра «упрощенный покер»
- Игры с совершенной памятью
- Стратегическая форма игры
  - Игра «упрощенный покер»: продолжение

## 2 Поведенческие стратегии

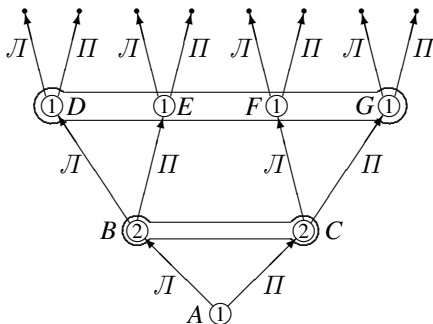
- Мотивация и определение
- Переход от поведенческой стратегии к смешанной
- Переход от смешанной стратегии к поведенческой

# Пример игры с несовершенной памятью



- Если игрок 1 не знает хода игрока 2, то он не может отличить позиции  $D$  от  $E$  и  $F$  от  $G$ .
- Но игрок 1 должен отличать позиции  $D$  и  $E$  от позиций  $F$  и  $G$ , если он помнит свой ход, сделанный в позиции  $A$ .
- То, что игрок 1 объединил все позиции  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  в одно инф. множество, можно объяснить только тем, что он «забыл» ход, который он сделал в позиции  $A$ .

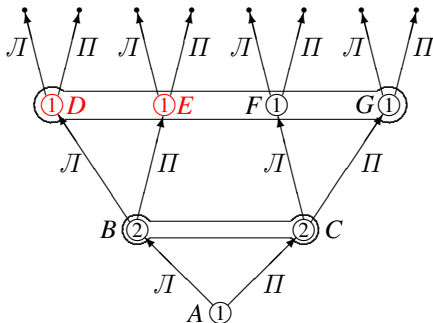
# Пример игры с несовершенной памятью



- Если игрок 1 не знает хода игрока 2, то он не может отличить позиции  $D$  от  $E$  и  $F$  от  $G$ .
- Но игрок 1 должен отличать позиции  $D$  и  $E$  от позиций  $F$  и  $G$ , если он помнит свой ход, сделанный в позиции  $A$ .
- То, что игрок 1 объединил все позиции  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  в одно инф. множество, можно объяснить только тем, что он «забыл» ход, который он сделал в позиции  $A$ .

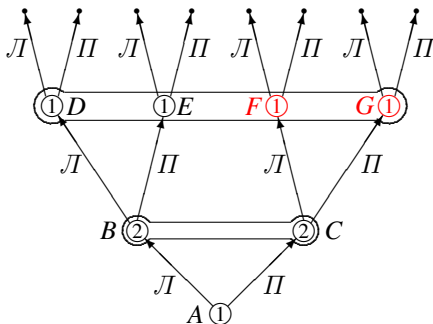


# Пример игры с несовершенной памятью



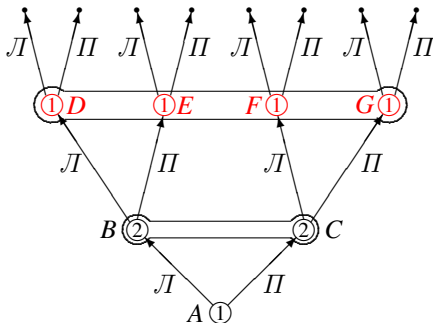
- Если игрок 1 не знает хода игрока 2, то он не может отличить позиции **D** от **E** и **F** от **G**.
- Но игрок 1 должен отличать позиции **D** и **E** от позиций **F** и **G**, если он помнит свой ход, сделанный в позиции **A**.
- То, что игрок 1 объединил все позиции **D**, **E**, **F** и **G** в одно инф. множество, можно объяснить только тем, что он «забыл» ход, который он сделал в позиции **A**.

# Пример игры с несовершенной памятью



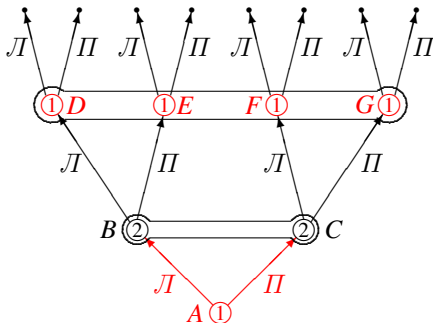
- Если игрок 1 не знает хода игрока 2, то он не может отличить позиции  $D$  от  $E$  и  $F$  от  $G$ .
- Но игрок 1 должен отличать позиции  $D$  и  $E$  от позиций  $F$  и  $G$ , если он помнит свой ход, сделанный в позиции  $A$ .
- То, что игрок 1 объединил все позиции  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  в одно инф. множество, можно объяснить только тем, что он «забыл» ход, который он сделал в позиции  $A$ .

# Пример игры с несовершенной памятью



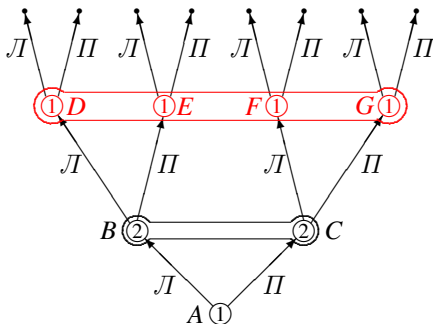
- Если игрок 1 не знает хода игрока 2, то он не может отличить позиции  $D$  от  $E$  и  $F$  от  $G$ .
- Но игрок 1 должен отличать позиции  $D$  и  $E$  от позиций  $F$  и  $G$ , если он помнит свой ход, сделанный в позиции  $A$ .
- То, что игрок 1 объединил все позиции  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  в одно инф. множество, можно объяснить только тем, что он «забыл» ход, который он сделал в позиции  $A$ .

# Пример игры с несовершенной памятью



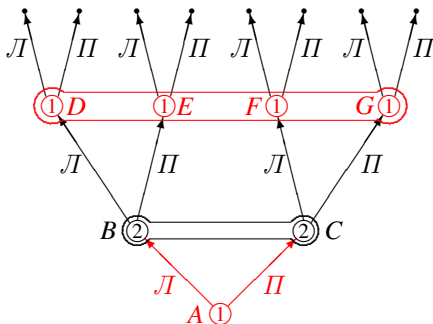
- Если игрок 1 не знает хода игрока 2, то он не может отличить позиции  $D$  от  $E$  и  $F$  от  $G$ .
- Но игрок 1 должен отличать позиции  $D$  и  $E$  от позиций  $F$  и  $G$ , **если он помнит свой ход, сделанный в позиции  $A$ .**
- То, что игрок 1 объединил все позиции  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  в одно инф. множество, можно объяснить только тем, что он «забыл» ход, который он сделал в позиции  $A$ .

# Пример игры с несовершенной памятью



- Если игрок 1 не знает хода игрока 2, то он не может отличить позиции  $D$  от  $E$  и  $F$  от  $G$ .
- Но игрок 1 должен отличать позиции  $D$  и  $E$  от позиций  $F$  и  $G$ , если он помнит свой ход, сделанный в позиции  $A$ .
- То, что игрок 1 объединил все позиции  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  в одно инф. множество, можно объяснить только тем, что он «забыл» ход, который он сделал в позиции  $A$ .

# Пример игры с несовершенной памятью



- Если игрок 1 не знает хода игрока 2, то он не может отличить позиции  $D$  от  $E$  и  $F$  от  $G$ .
- Но игрок 1 должен отличать позиции  $D$  и  $E$  от позиций  $F$  и  $G$ , если он помнит свой ход, сделанный в позиции  $A$ .
- То, что игрок 1 объединил все позиции  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  в одно инф. множество, можно объяснить только тем, что он «забыл» ход, который он сделал в позиции  $A$ .

# Игры с совершенной памятью

## Определение

- Говорят, что игрок обладает *совершенной памятью*, если любые две его позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов данного игрока.
- Позиционная игра называется *игрой с совершенной памятью*, если все участвующие в ней игроки обладают совершенной памятью.
- Несовершенная память игроков создает трудности при интерпретации игры
- и противоречит постулату о разумности игроков (разумный игрок должен найти способ запомнить ходы, сделанные им ранее).
- Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только игры с совершенной памятью.

# Игры с совершенной памятью

## Определение

- Говорят, что игрок обладает *совершенной памятью*, если любые две его позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов данного игрока.
- Позиционная игра называется *игрой с совершенной памятью*, если все участвующие в ней игроки обладают совершенной памятью.
- Несовершенная память игроков создает трудности при интерпретации игры
- и противоречит постулату о разумности игроков (разумный игрок должен найти способ запомнить ходы, сделанные им ранее).
- Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только игры с совершенной памятью.



# Игры с совершенной памятью

## Определение

- Говорят, что игрок обладает *совершенной памятью*, если любые две его позиции из одного информационного множества **имеют одно и то же множество предшествующих ходов данного игрока.**
- Позиционная игра называется *игрой с совершенной памятью*, если все участвующие в ней игроки обладают совершенной памятью.
- Несовершенная память игроков создает трудности при интерпретации игры
- и противоречит постулату о разумности игроков (разумный игрок должен найти способ запомнить ходы, сделанные им ранее).
- Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только игры с совершенной памятью.

# Игры с совершенной памятью

## Определение

- Говорят, что игрок обладает *совершенной памятью*, если любые две его позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов данного игрока.
- **Позиционная игра называется *игрой с совершенной памятью***, если все участвующие в ней игроки обладают совершенной памятью.
- Несовершенная память игроков создает трудности при интерпретации игры
- и противоречит постулату о разумности игроков (разумный игрок должен найти способ запомнить ходы, сделанные им ранее).
- Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только игры с совершенной памятью.

# Игры с совершенной памятью

## Определение

- Говорят, что игрок обладает *совершенной памятью*, если любые две его позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов данного игрока.
- Позиционная игра называется *игрой с совершенной памятью*, если все участвующие в ней игроки обладают **совершенной памятью**.

- Несовершенная память игроков создает трудности при интерпретации игры
- и противоречит постулату о разумности игроков (разумный игрок должен найти способ запомнить ходы, сделанные им ранее).
- Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только игры с совершенной памятью.

# Игры с совершенной памятью

## Определение

- Говорят, что игрок обладает *совершенной памятью*, если любые две его позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов данного игрока.
- Позиционная игра называется *игрой с совершенной памятью*, если все участвующие в ней игроки обладают совершенной памятью.

- **Несовершенная память игроков создает трудности при интерпретации игры**
- и противоречит постулату о разумности игроков (разумный игрок должен найти способ запомнить ходы, сделанные им ранее).
- Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только игры с совершенной памятью.

# Игры с совершенной памятью

## Определение

- Говорят, что игрок обладает *совершенной памятью*, если любые две его позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов данного игрока.
- Позиционная игра называется *игрой с совершенной памятью*, если все участвующие в ней игроки обладают совершенной памятью.
- Несовершенная память игроков создает трудности при интерпретации игры
- и противоречит постулату о разумности игроков (разумный игрок должен найти способ запомнить ходы, сделанные им ранее).
- Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только игры с совершенной памятью.

# Игры с совершенной памятью

## Определение

- Говорят, что игрок обладает *совершенной памятью*, если любые две его позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов данного игрока.
- Позиционная игра называется *игрой с совершенной памятью*, если все участвующие в ней игроки обладают совершенной памятью.
- Несовершенная память игроков создает трудности при интерпретации игры
- и противоречит постулату о разумности игроков (разумный игрок должен найти способ запомнить ходы, сделанные им ранее).
- Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только игры с совершенной памятью.

# Свойства игр с совершенной памятью

В качестве упражнения докажите следующие свойства игр с совершенной памятью.

## Утверждение

*В позиционной игре с совершенной памятью*

- любой позиции не может предшествовать другая позиция из того же самого информационного множества;*
- любые две позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшественников;*

# Свойства игр с совершенной памятью

В качестве упражнения докажите следующие свойства игр с совершенной памятью.

## Утверждение

### *В позиционной игре с совершенной памятью*

- 1 любой позиции не может предшествовать другая позиция из того же самого информационного множества;*
- 2 любые две позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов игрока, которому принадлежит данное информационное множество, причем, порядок следования этих ходов один и тот же.*



# Свойства игр с совершенной памятью

В качестве упражнения докажите следующие свойства игр с совершенной памятью.

## Утверждение

*В позиционной игре с совершенной памятью*

- любой позиции не может предшествовать другая позиция из того же самого информационного множества;*
- любые две позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов игрока, которому принадлежит данное информационное множество, причем, порядок следования этих ходов один и тот же.*

# Свойства игр с совершенной памятью

В качестве упражнения докажите следующие свойства игр с совершенной памятью.

## Утверждение

*В позиционной игре с совершенной памятью*

- 1 любой позиции не может предшествовать другая позиция из того же самого информационного множества;*
- 2 любые две позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов игрока, которому принадлежит данное информационное множество, причем, порядок следования этих ходов один и тот же.*

# Свойства игр с совершенной памятью

В качестве упражнения докажите следующие свойства игр с совершенной памятью.

## Утверждение

*В позиционной игре с совершенной памятью*

- 1 любой позиции не может предшествовать другая позиция из того же самого информационного множества;*
- 2 любые две позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов игрока, которому принадлежит данное информационное множество, причем, порядок следования этих ходов один и тот же.*

# Свойства игр с совершенной памятью

В качестве упражнения докажите следующие свойства игр с совершенной памятью.

## Утверждение

*В позиционной игре с совершенной памятью*

- 1 любой позиции не может предшествовать другая позиция из того же самого информационного множества;*
- 2 любые две позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов игрока, которому принадлежит данное информационное множество, причем, порядок следования этих ходов один и тот же.*

# Содержание

## 1 Позиционные игры

- Дерево игры
  - Игра «упрощенный покер»
- Игры с совершенной памятью
- Стратегическая форма игры
  - Игра «упрощенный покер»: продолжение

## 2 Поведенческие стратегии

- Мотивация и определение
- Переход от поведенческой стратегии к смешанной
- Переход от смешанной стратегии к поведенческой

# Стратегия — это план на игру

- Стратегия игрока есть *план* его действий, следуя которому игрок делает ходы на протяжении всей игры.
- Стратегия игрока должна однозначно определять его ход в каждом из принадлежащих ему инф. множеств.
- Если игрок  $i$  имеет  $k_i$  инф. множеств  $I_1^{(i)}, \dots, I_{k_i}^{(i)}$ ,
- и  $A_j^{(i)}$  есть множество ходов в позициях инф. множества  $I_j^{(i)}$  ( $1 \leq j \leq k_i$ ),
- то мы можем определить его множество стратегий  $S_i$  как множество наборов  $(a_1^{(i)}, \dots, a_{k_i}^{(i)}) \in \prod_{j=1}^{k_i} A_j^{(i)}$ ,
- где  $a_j^{(i)} \in A_j^{(i)}$  — это ход игрока  $i$ , который он будет делать, если игра достигнет какой либо позиции информационного множества  $I_j^{(i)}$ .
- Заметим, что игрок  $i$  имеет  $|S_i| = |A_1^{(i)}| \times \dots \times |A_{k_i}^{(i)}|$  различных стратегий.

# Стратегия — это план на игру

- Стратегия игрока есть *план* его действий, следуя которому игрок делает ходы на протяжении всей игры.
- *Стратегия* игрока должна однозначно определять его ход в каждом из принадлежащих ему инф. множеств.
- Если игрок  $i$  имеет  $k_i$  инф. множеств  $I_1^{(i)}, \dots, I_{k_i}^{(i)}$ ,
- и  $A_j^{(i)}$  есть множество ходов в позициях инф. множества  $I_j^{(i)}$  ( $1 \leq j \leq k_i$ ),
- то мы можем определить его множество стратегий  $S_i$  как множество наборов  $(a_1^{(i)}, \dots, a_{k_i}^{(i)}) \in \prod_{j=1}^{k_i} A_j^{(i)}$ ,
- где  $a_j^{(i)} \in A_j^{(i)}$  — это ход игрока  $i$ , который он будет делать, если игра достигнет какой либо позиции информационного множества  $I_j^{(i)}$ .
- Заметим, что игрок  $i$  имеет  $|S_i| = |A_1^{(i)}| \times \dots \times |A_{k_i}^{(i)}|$  различных стратегий.

# Стратегия — это план на игру

- Стратегия игрока есть *план* его действий, следуя которому игрок делает ходы на протяжении всей игры.
- *Стратегия* игрока должна однозначно определять его ход в каждом из принадлежащих ему инф. множеств.
- Если игрок  $i$  имеет  $k_i$  инф. множеств  $I_1^{(i)}, \dots, I_{k_i}^{(i)}$ ,
- и  $A_j^{(i)}$  есть множество ходов в позициях инф. множества  $I_j^{(i)}$  ( $1 \leq j \leq k_i$ ),
- то мы можем определить его множество стратегий  $S_i$  как множество наборов  $(a_1^{(i)}, \dots, a_{k_i}^{(i)}) \in \prod_{j=1}^{k_i} A_j^{(i)}$ ,
- где  $a_j^{(i)} \in A_j^{(i)}$  — это ход игрока  $i$ , который он будет делать, если игра достигнет какой либо позиции информационного множества  $I_j^{(i)}$ .
- Заметим, что игрок  $i$  имеет  $|S_i| = |A_1^{(i)}| \times \dots \times |A_{k_i}^{(i)}|$  различных стратегий.



# Стратегия — это план на игру

- Стратегия игрока есть *план* его действий, следуя которому игрок делает ходы на протяжении всей игры.
- *Стратегия* игрока должна однозначно определять его ход в каждом из принадлежащих ему инф. множеств.
- Если игрок  $i$  имеет  $k_i$  инф. множеств  $I_1^{(i)}, \dots, I_{k_i}^{(i)}$ ,
- и  $A_j^{(i)}$  есть множество ходов в позициях инф. множества  $I_j^{(i)}$  ( $1 \leq j \leq k_i$ ),
- то мы можем определить его множество стратегий  $S_i$  как множество наборов  $(a_1^{(i)}, \dots, a_{k_i}^{(i)}) \in \prod_{j=1}^{k_i} A_j^{(i)}$ ,
- где  $a_j^{(i)} \in A_j^{(i)}$  — это ход игрока  $i$ , который он будет делать, если игра достигнет какой либо позиции информационного множества  $I_j^{(i)}$ .
- Заметим, что игрок  $i$  имеет  $|S_i| = |A_1^{(i)}| \times \dots \times |A_{k_i}^{(i)}|$  различных стратегий.

# Стратегия — это план на игру

- Стратегия игрока есть *план* его действий, следуя которому игрок делает ходы на протяжении всей игры.
- *Стратегия* игрока должна однозначно определять его ход в каждом из принадлежащих ему инф. множеств.
- Если игрок  $i$  имеет  $k_i$  инф. множеств  $I_1^{(i)}, \dots, I_{k_i}^{(i)}$ ,
- и  $A_j^{(i)}$  есть множество ходов в позициях инф. множества  $I_j^{(i)}$  ( $1 \leq j \leq k_i$ ),
- **то мы можем определить его множество стратегий  $S_i$  как множество наборов  $(a_1^{(i)}, \dots, a_{k_i}^{(i)}) \in \prod_{j=1}^{k_i} A_j^{(i)}$ ,**
- где  $a_j^{(i)} \in A_j^{(i)}$  — это ход игрока  $i$ , который он будет делать, если игра достигнет какой либо позиции информационного множества  $I_j^{(i)}$ .
- Заметим, что игрок  $i$  имеет  $|S_i| = |A_1^{(i)}| \times \dots \times |A_{k_i}^{(i)}|$  различных стратегий.

# Стратегия — это план на игру

- Стратегия игрока есть *план* его действий, следуя которому игрок делает ходы на протяжении всей игры.
- *Стратегия* игрока должна однозначно определять его ход в каждом из принадлежащих ему инф. множеств.
- Если игрок  $i$  имеет  $k_i$  инф. множеств  $I_1^{(i)}, \dots, I_{k_i}^{(i)}$ ,
- и  $A_j^{(i)}$  есть множество ходов в позициях инф. множества  $I_j^{(i)}$  ( $1 \leq j \leq k_i$ ),
- то мы можем определить его множество стратегий  $S_i$  как множество наборов  $(a_1^{(i)}, \dots, a_{k_i}^{(i)}) \in \prod_{j=1}^{k_i} A_j^{(i)}$ ,
- где  $a_j^{(i)} \in A_j^{(i)}$  — это ход игрока  $i$ , который он будет делать, если игра достигнет какой либо позиции информационного множества  $I_j^{(i)}$ .
- Заметим, что игрок  $i$  имеет  $|S_i| = |A_1^{(i)}| \times \dots \times |A_{k_i}^{(i)}|$  различных стратегий.

# Стратегия — это план на игру

- Стратегия игрока есть *план* его действий, следуя которому игрок делает ходы на протяжении всей игры.
- *Стратегия* игрока должна однозначно определять его ход в каждом из принадлежащих ему инф. множеств.
- Если игрок  $i$  имеет  $k_i$  инф. множеств  $I_1^{(i)}, \dots, I_{k_i}^{(i)}$ ,
- и  $A_j^{(i)}$  есть множество ходов в позициях инф. множества  $I_j^{(i)}$  ( $1 \leq j \leq k_i$ ),
- то мы можем определить его множество стратегий  $S_i$  как множество наборов  $(a_1^{(i)}, \dots, a_{k_i}^{(i)}) \in \prod_{j=1}^{k_i} A_j^{(i)}$ ,
- где  $a_j^{(i)} \in A_j^{(i)}$  — это ход игрока  $i$ , который он будет делать, если игра достигнет какой либо позиции информационного множества  $I_j^{(i)}$ .
- Заметим, что игрок  $i$  имеет  $|S_i| = |A_1^{(i)}| \times \dots \times |A_{k_i}^{(i)}|$  различных стратегий.

# Стратегическая форма позиционной игры

- Набор стратегий игроков  $s_i \in S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) образует *ситуацию*  $s = (s_1, \dots, s_n)$ .
- Каждая ситуация приводит игру к окончанию в одной из позиций некоторого подмножества  $V(s)$  конечных позиций (листьев дерева игры  $T$ ).
- В ситуации  $s$  вероятность  $p_t(s)$  окончания игры в позиции  $t \in V(s)$ , равна произведению вероятностей, припис. дугам единственного пути из корня дерева в узел  $t$ .

- Средний выигрыш игрока  $i$  в ситуации  $s$ :

$$\bar{\phi}_i(s) = \sum_{t \in V(s)} \phi_i(t) p_t(s).$$

- Таким образом, мы получаем бескоалиционную игру

$$\gamma = (\{1, \dots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^n),$$

- которую называют *стратегической* или *нормальной формой позиционной игры*.

# Стратегическая форма позиционной игры

- Набор стратегий игроков  $s_i \in S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) образует *ситуацию*  $s = (s_1, \dots, s_n)$ .
- Каждая ситуация приводит игру к окончанию в одной из позиций некоторого подмножества  $V(s)$  конечных позиций (листьев дерева игры  $T$ ).
- В ситуации  $s$  вероятность  $p_t(s)$  окончания игры в позиции  $t \in V(s)$ , равна произведению вероятностей, припис. дугам единственного пути из корня дерева в узел  $t$ .

- Средний выигрыш игрока  $i$  в ситуации  $s$ :

$$\bar{\phi}_i(s) = \sum_{t \in V(s)} \phi_i(t) p_t(s).$$

- Таким образом, мы получаем бескоалиционную игру

$$\gamma = (\{1, \dots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^n),$$

- которую называют *стратегической* или *нормальной формой позиционной игры*.

# Стратегическая форма позиционной игры

- Набор стратегий игроков  $s_i \in S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) образует *ситуацию*  $s = (s_1, \dots, s_n)$ .
- Каждая ситуация приводит игру к окончанию в одной из позиций некоторого подмножества  $V(s)$  конечных позиций (листьев дерева игры  $T$ ).
- В ситуации  $s$  вероятность  $p_t(s)$  окончания игры в позиции  $t \in V(s)$ , равна произведению вероятностей, припис. дугам единственного пути из корня дерева в узел  $t$ .

- Средний выигрыш игрока  $i$  в ситуации  $s$ :

$$\bar{\phi}_i(s) = \sum_{t \in V(s)} \phi_i(t) p_t(s).$$

- Таким образом, мы получаем бескоалиционную игру

$$\gamma = (\{1, \dots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^n),$$

- которую называют *стратегической* или *нормальной формой позиционной игры*.

# Стратегическая форма позиционной игры

- Набор стратегий игроков  $s_i \in S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) образует *ситуацию*  $s = (s_1, \dots, s_n)$ .
- Каждая ситуация приводит игру к окончанию в одной из позиций некоторого подмножества  $V(s)$  конечных позиций (листьев дерева игры  $T$ ).
- В ситуации  $s$  вероятность  $p_t(s)$  окончания игры в позиции  $t \in V(s)$ , **равна произведению вероятностей, припис. дугам единственного пути из корня дерева в узел  $t$ .**
- Средний выигрыш игрока  $i$  в ситуации  $s$ :

$$\bar{\phi}_i(s) = \sum_{t \in V(s)} \phi_i(t) p_t(s).$$

- Таким образом, мы получаем бескоалиционную игру
 
$$\gamma = (\{1, \dots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^n),$$
- которую называют *стратегической* или *нормальной формой позиционной игры*.



# Стратегическая форма позиционной игры

- Набор стратегий игроков  $s_i \in S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) образует *ситуацию*  $s = (s_1, \dots, s_n)$ .
- Каждая ситуация приводит игру к окончанию в одной из позиций некоторого подмножества  $V(s)$  конечных позиций (листьев дерева игры  $T$ ).
- В ситуации  $s$  вероятность  $p_t(s)$  окончания игры в позиции  $t \in V(s)$ , равна произведению вероятностей, припис. дугам единственного пути из корня дерева в узел  $t$ .

- Средний выигрыш игрока  $i$  в ситуации  $s$ :

$$\bar{\phi}_i(s) = \sum_{t \in V(s)} \phi_i(t) p_t(s).$$

- Таким образом, мы получаем бескоалиционную игру

$$\gamma = (\{1, \dots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^n),$$

- которую называют *стратегической* или *нормальной формой позиционной игры*.

# Стратегическая форма позиционной игры

- Набор стратегий игроков  $s_i \in S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) образует *ситуацию*  $s = (s_1, \dots, s_n)$ .
- Каждая ситуация приводит игру к окончанию в одной из позиций некоторого подмножества  $V(s)$  конечных позиций (листьев дерева игры  $T$ ).
- В ситуации  $s$  вероятность  $p_t(s)$  окончания игры в позиции  $t \in V(s)$ , равна произведению вероятностей, припис. дугам единственного пути из корня дерева в узел  $t$ .

- Средний выигрыш игрока  $i$  в ситуации  $s$ :

$$\bar{\phi}_i(s) = \sum_{t \in V(s)} \phi_i(t) p_t(s).$$

- Таким образом, мы получаем **бескоалиционную игру**

$$\gamma = (\{1, \dots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^n),$$

- которую называют *стратегической* или *нормальной формой позиционной игры*.

# Стратегическая форма позиционной игры

- Набор стратегий игроков  $s_i \in S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) образует *ситуацию*  $s = (s_1, \dots, s_n)$ .
- Каждая ситуация приводит игру к окончанию в одной из позиций некоторого подмножества  $V(s)$  конечных позиций (листьев дерева игры  $T$ ).
- В ситуации  $s$  вероятность  $p_t(s)$  окончания игры в позиции  $t \in V(s)$ , равна произведению вероятностей, припис. дугам единственного пути из корня дерева в узел  $t$ .

- Средний выигрыш игрока  $i$  в ситуации  $s$ :

$$\bar{\phi}_i(s) = \sum_{t \in V(s)} \phi_i(t) p_t(s).$$

- Таким образом, мы получаем бескоалиционную игру

$$\gamma = (\{1, \dots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^n),$$

- которую называют *стратегической* или *нормальной формой позиционной игры*.

# Ситуации равновесия

- В качестве *решений позиционной игры* мы можем принять ситуации равновесия для ее стратегической формы.
- Напомним, что ситуация  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $s_i \in S_i$ , называется ситуацией равновесия в игре  $\gamma$ , если
$$\bar{\phi}_i(s) \geq \bar{\phi}_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \quad \forall \bar{s}_i \in S_i, i = 1, \dots, n.$$
- К сожалению, не все так просто.
- Позже мы узнаем, что не все ситуации равновесия для стратегической формы игры являются ситуациями равновесия для исходной игры в позиционной форме.
- Причина этого в том, что при переходе к стратегической форме теряется информация о последовательности ходов.
- В частности, две различные позиционные игры могут иметь одинаковые стратегические формы.

# Ситуации равновесия

- В качестве *решений позиционной игры* мы можем принять ситуации равновесия для ее стратегической формы.

- Напомним, что ситуация  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $s_i \in S_i$ , называется ситуацией равновесия в игре  $\gamma$ , если

$$\bar{\phi}_i(s) \geq \bar{\phi}_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \quad \forall \bar{s}_i \in S_i, i = 1, \dots, n.$$

- К сожалению, не все так просто.
- Позже мы узнаем, что не все ситуации равновесия для стратегической формы игры являются ситуациями равновесия для исходной игры в позиционной форме.
- Причина этого в том, что при переходе к стратегической форме теряется информация о последовательности ходов.
- В частности, две различные позиционные игры могут иметь одинаковые стратегические формы.

# Ситуации равновесия

- В качестве *решений позиционной игры* мы можем принять ситуации равновесия для ее стратегической формы.

- Напомним, что ситуация  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $s_i \in S_i$ , называется ситуацией равновесия в игре  $\gamma$ , если

$$\bar{\phi}_i(s) \geq \bar{\phi}_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \quad \forall \bar{s}_i \in S_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- **К сожалению, не все так просто.**
- Позже мы узнаем, что не все ситуации равновесия для стратегической формы игры являются ситуациями равновесия для исходной игры в позиционной форме.
- Причина этого в том, что при переходе к стратегической форме теряется информация о последовательности ходов.
- В частности, две различные позиционные игры могут иметь одинаковые стратегические формы.

# Ситуации равновесия

- В качестве *решений позиционной игры* мы можем принять ситуации равновесия для ее стратегической формы.
- Напомним, что ситуация  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $s_i \in S_i$ , называется ситуацией равновесия в игре  $\gamma$ , если
$$\bar{\phi}_i(s) \geq \bar{\phi}_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \quad \forall \bar{s}_i \in S_i, \quad i = 1, \dots, n.$$
- К сожалению, не все так просто.
- Позже мы узнаем, что не все ситуации равновесия для стратегической формы игры являются ситуациями равновесия для исходной игры в позиционной форме.
- Причина этого в том, что при переходе к стратегической форме теряется информация о последовательности ходов.
- В частности, две различные позиционные игры могут иметь одинаковые стратегические формы.

# Ситуации равновесия

- В качестве *решений позиционной игры* мы можем принять ситуации равновесия для ее стратегической формы.
- Напомним, что ситуация  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $s_i \in S_i$ , называется ситуацией равновесия в игре  $\gamma$ , если
$$\bar{\phi}_i(s) \geq \bar{\phi}_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \quad \forall \bar{s}_i \in S_i, \quad i = 1, \dots, n.$$
- К сожалению, не все так просто.
- Позже мы узнаем, что не все ситуации равновесия для стратегической формы игры являются ситуациями равновесия для исходной игры в позиционной форме.
- **Причина этого в том, что при переходе к стратегической форме теряется информация о последовательности ходов.**
- В частности, две различные позиционные игры могут иметь одинаковые стратегические формы.



# Ситуации равновесия

- В качестве *решений позиционной игры* мы можем принять ситуации равновесия для ее стратегической формы.
- Напомним, что ситуация  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $s_i \in S_i$ , называется ситуацией равновесия в игре  $\gamma$ , если
$$\bar{\phi}_i(s) \geq \bar{\phi}_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \quad \forall \bar{s}_i \in S_i, \quad i = 1, \dots, n.$$
- К сожалению, не все так просто.
- Позже мы узнаем, что не все ситуации равновесия для стратегической формы игры являются ситуациями равновесия для исходной игры в позиционной форме.
- Причина этого в том, что при переходе к стратегической форме теряется информация о последовательности ходов.
- **В частности, две различные позиционные игры могут иметь одинаковые стратегические формы.**

# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

*П* — пас,

*С* — поднять ставку,

*И* — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	<i>И</i>	<i>П</i>
<i>СС</i>		
<i>СП</i>		
<i>ПС</i>		
<i>ПП</i>		



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

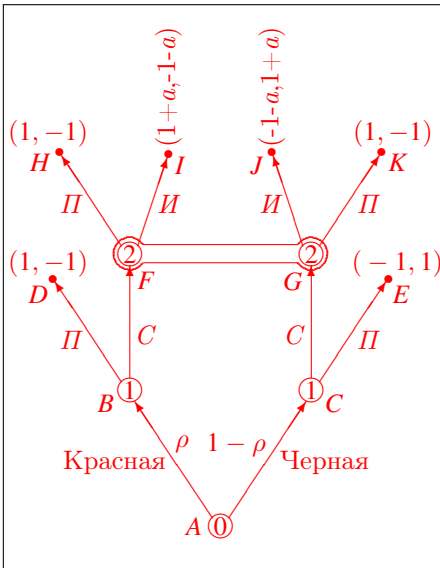
*П* — пас,

*С* — поднять ставку,

*И* — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	<i>И</i>	<i>П</i>
<i>СС</i>		
<i>СП</i>		
<i>ПС</i>		
<i>ПП</i>		



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

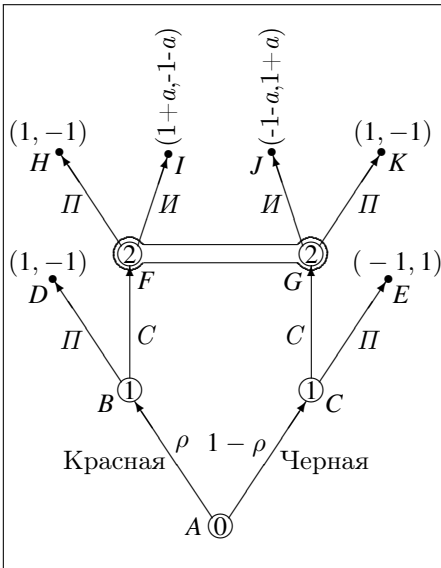
$\Pi$  — пас,

$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер»  
— антагонист. игра, то ее  
страт. форма — матричная  
игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$		
$CP$		
$PC$		
$PP$		



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

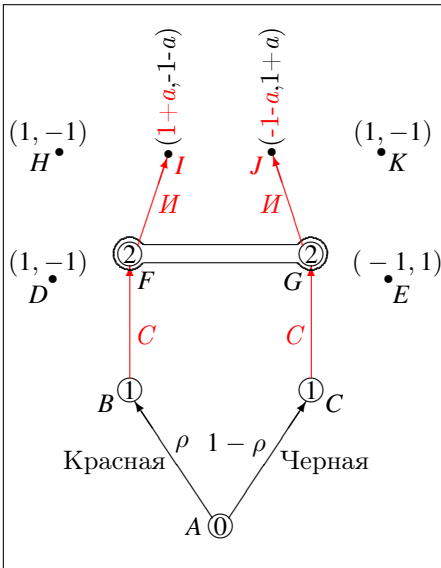
$\Pi$  — пас,

$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$		
$CP$		
$PC$		
$PP$		



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

$\Pi$  — пас,

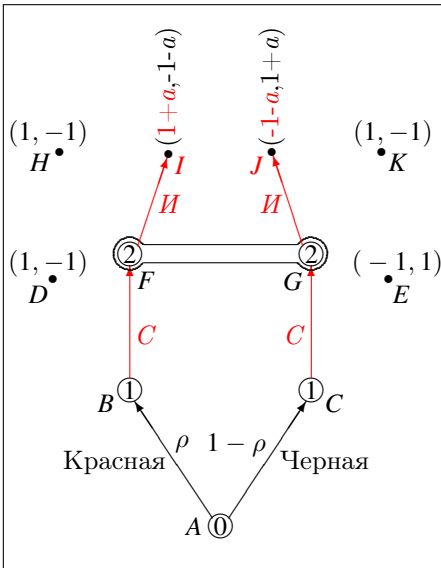
$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$	$(2\rho-1)(1+a)$	
$CP$		
$PC$		
$PP$		

$$(1+a)\rho + (-1-a)(1-\rho) = (2\rho-1)(1+a)$$



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

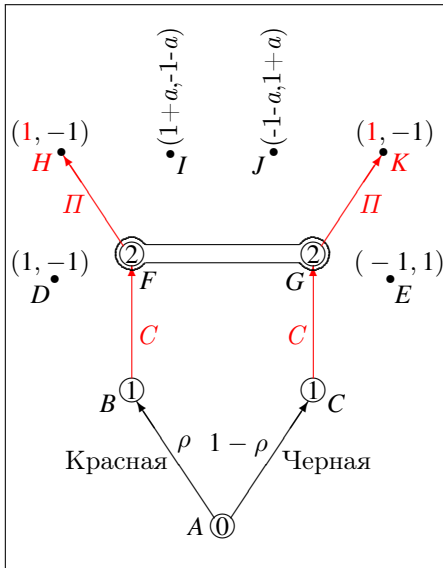
$\Pi$  — пас,

$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$	$(2\rho-1)(1+a)$	
$CP$		
$PC$		
$PP$		



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

*П* — пас,

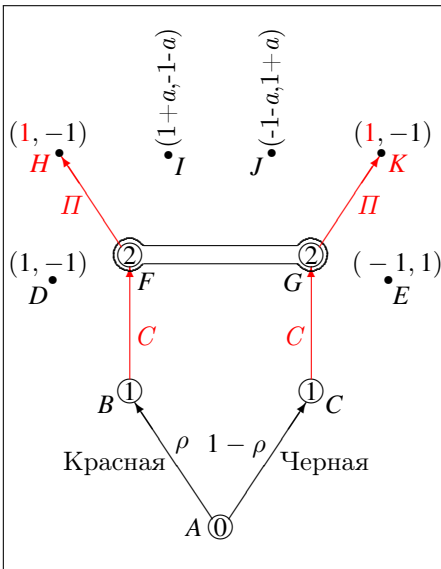
*С* — поднять ставку,

*И* — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	<i>И</i>	<i>П</i>
<i>С</i> <i>С</i>	$(2\rho-1)(1+a)$	<b>1</b>
<i>С</i> <i>П</i>		
<i>П</i> <i>С</i>		
<i>П</i> <i>П</i>		

$$1 \cdot \rho + 1 \cdot (1 - \rho) = 1$$





# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

$\Pi$  — пас,

$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$	$(2\rho-1)(1+a)$	1
$CP$		
$PC$		
$PP$		



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

$\Pi$  — пас,

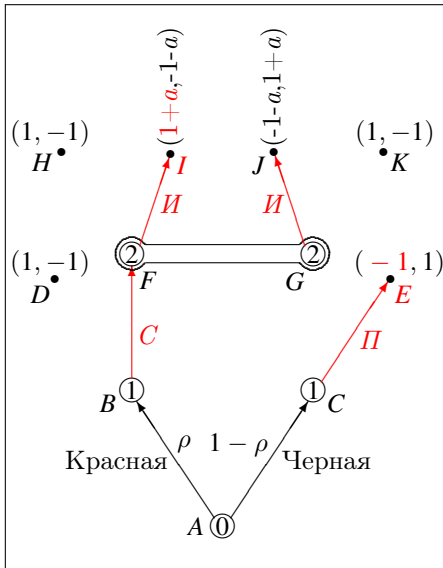
$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$	$(2\rho-1)(1+a)$	1
$CI$	$(2+a)\rho-1$	
$PC$		
$PI$		

$$(1+a)\rho + (-1)(1-\rho) = (2+a)\rho - 1$$



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

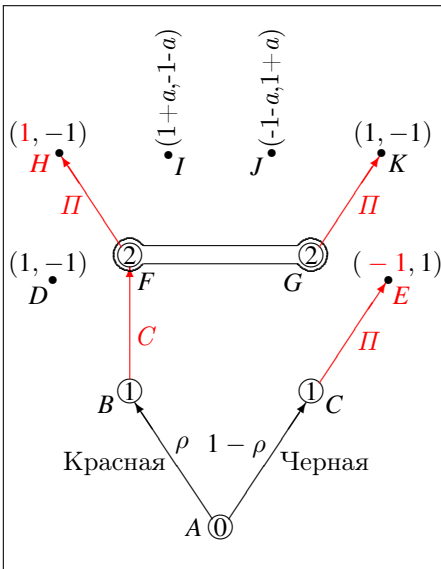
$\Pi$  — пас,

$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$	$(2\rho-1)(1+a)$	1
$CP$	$(2+a)\rho-1$	
$PC$		
$PP$		



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

$\Pi$  — пас,

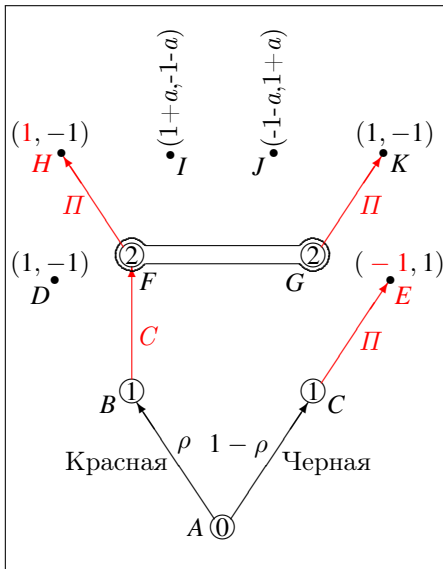
$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$	$(2\rho-1)(1+a)$	1
$CP$	$(2+a)\rho-1$	$2\rho-1$
$PC$		
$PP$		

$$1 \cdot \rho + (-1)(1 - \rho) = 2\rho - 1$$



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

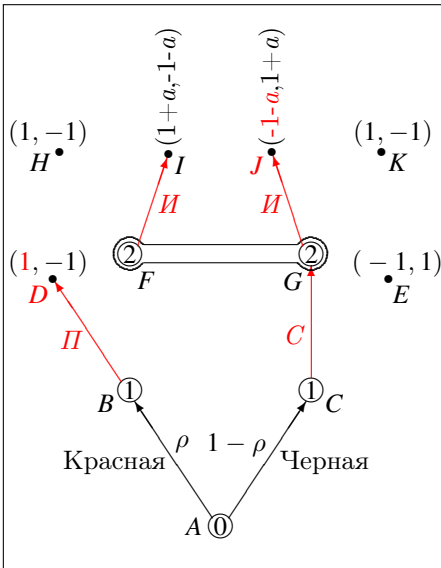
$\Pi$  — пас,

$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$	$(2\rho-1)(1+a)$	1
$CP$	$(2+a)\rho-1$	$2\rho-1$
$PC$		
$PP$		



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

$\Pi$  — пас,

$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер»

— антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$	$(2\rho-1)(1+a)$	1
$CP$	$(2+a)\rho-1$	$2\rho-1$
$PC$	$a(\rho-1)+2\rho-1$	
$PP$		

$$1 \cdot \rho + (-1 - a)(1 - \rho) = a(\rho - 1) + 2\rho - 1$$



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

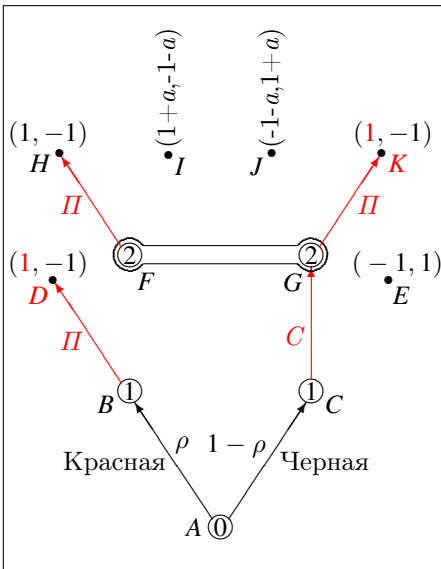
*П* — пас,

*С* — поднять ставку,

*И* — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	<i>И</i>	<i>П</i>
<i>СС</i>	$(2\rho-1)(1+a)$	1
<i>СП</i>	$(2+a)\rho-1$	$2\rho-1$
<i>ПС</i>	$a(\rho-1)+2\rho-1$	
<i>ПП</i>		



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

$\Pi$  — пас,

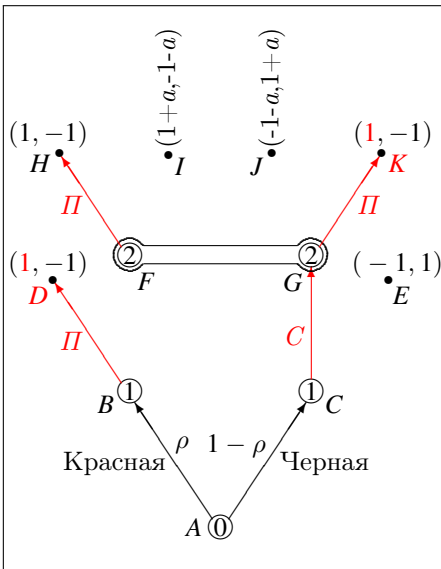
$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$	$(2\rho-1)(1+a)$	1
$CP$	$(2+a)\rho-1$	$2\rho-1$
$PC$	$a(\rho-1)+2\rho-1$	1
$PP$		

$$1 \cdot \rho + 1 \cdot (1 - \rho) = 1$$





# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

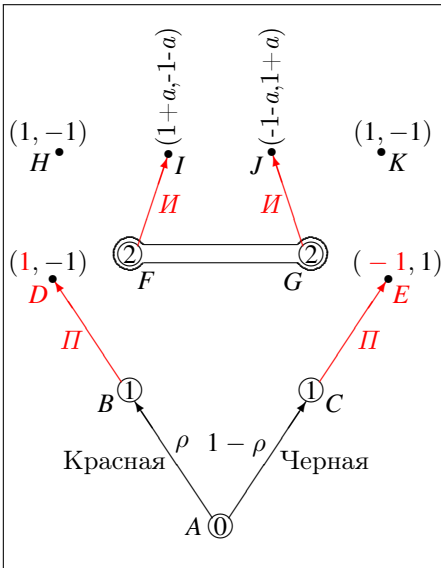
*П* — пас,

*С* — поднять ставку,

*И* — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	<i>И</i>	<i>П</i>
<i>СС</i>	$(2\rho-1)(1+a)$	1
<i>СП</i>	$(2+a)\rho-1$	$2\rho-1$
<i>ПС</i>	$a(\rho-1)+2\rho-1$	1
<i>ПП</i>		



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

*П* — пас,

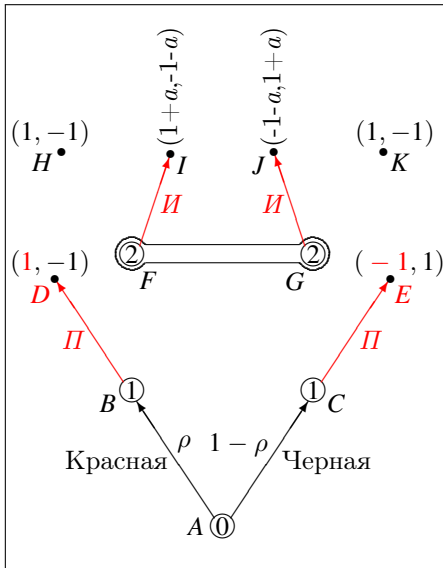
*С* — поднять ставку,

*И* — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	<i>И</i>	<i>П</i>
<i>СС</i>	$(2\rho-1)(1+a)$	1
<i>СП</i>	$(2+a)\rho-1$	$2\rho-1$
<i>ПС</i>	$a(\rho-1)+2\rho-1$	1
<i>ПП</i>	$2\rho-1$	

$$1 \cdot \rho + (-1)(1 - \rho) = 2\rho - 1$$



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

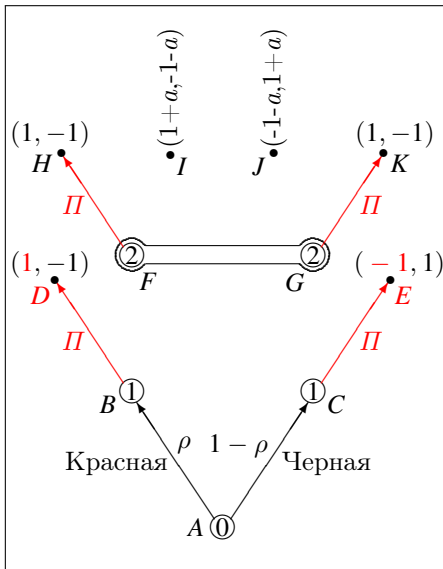
*П* — пас,

*С* — поднять ставку,

*И* — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	<i>И</i>	<i>П</i>
<i>С</i> <i>С</i>	$(2\rho-1)(1+a)$	1
<i>С</i> <i>П</i>	$(2+a)\rho-1$	$2\rho-1$
<i>П</i> <i>С</i>	$a(\rho-1)+2\rho-1$	1
<i>П</i> <i>П</i>	$2\rho-1$	



# Стратегическая форма для игры «упрощенный покер»

Пусть  $\rho = \frac{m}{m+n}$ ,

$\Pi$  — пас,

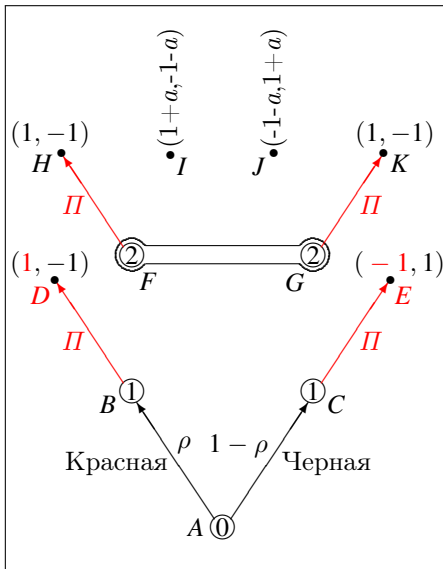
$C$  — поднять ставку,

$I$  — объявить игру.

«Упрощенный покер» — антагонист. игра, то ее страт. форма — матричная игра:

	$I$	$\Pi$
$CC$	$(2\rho-1)(1+a)$	1
$CP$	$(2+a)\rho-1$	$2\rho-1$
$PC$	$a(\rho-1)+2\rho-1$	1
$PP$	$2\rho-1$	$2\rho-1$

$$1 \cdot \rho + (-1)(1 - \rho) = 2\rho - 1$$



## Равновесие в игре «упрощенный покер»

$$A =$$

	<i>И</i>	<i>П</i>
<i>СС</i>	$(2\rho - 1)(1 + a)$	1
<i>СП</i>	$(2 + a)\rho - 1$	$2\rho - 1$
<i>ПС</i>	$a(\rho - 1) + 2\rho - 1$	1
<i>ПП</i>	$2\rho - 1$	$2\rho - 1$

- Рассмотрим случай, когда  $a = 1$ ,  $m = n$  и тогда  $\rho = 1/2$ .
- Поскольку  $\alpha(A) = 0 < 1/2 = \beta(A)$ , то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Оптимальные смешанные стратегии игроков можно найти графическим методом (сделайте это!):

$$p^0 = (p_{СС}^0, p_{СП}^0, p_{ПС}^0, p_{ПП}^0)^T = (1/3, 2/3, 0, 0)^T,$$

$$q^0 = (q_{И}^0, q_{П}^0)^T = (2/3, 1/3)^T.$$

- Цена игры  $v(A) = 1/3$ .

## Равновесие в игре «упрощенный покер»

$$A = \begin{array}{c|cc} & И & П \\ \hline СС & 0 & 1 \\ СП & \frac{1}{2} & 0 \\ ПС & -\frac{1}{2} & 1 \\ ПП & 0 & 0 \end{array}$$

- Рассмотрим случай, когда  $a = 1$ ,  $m = n$  и тогда  $\rho = 1/2$ .
- Поскольку  $\alpha(A) = 0 < 1/2 = \beta(A)$ , то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Оптимальные смешанные стратегии игроков можно найти графическим методом (сделайте это!):

$$p^0 = (p_{СС}^0, p_{СП}^0, p_{ПС}^0, p_{ПП}^0)^T = (1/3, 2/3, 0, 0)^T,$$

$$q^0 = (q_{И}^0, q_{П}^0)^T = (2/3, 1/3)^T.$$

- Цена игры  $v(A) = 1/3$ .

# Равновесие в игре «упрощенный покер»

$$A = \begin{array}{cc|cc|c} & & \text{И} & \text{П} & \\ \hline \text{СС} & & 0 & 1 & 0 \\ \text{СП} & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \text{ПС} & & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \text{ПП} & & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \frac{1}{2} & 1 & \end{array}$$

- Рассмотрим случай, когда  $a = 1$ ,  $m = n$  и тогда  $\rho = 1/2$ .
- Поскольку  $\alpha(A) = 0 < 1/2 = \beta(A)$ , то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Оптимальные смешанные стратегии игроков можно найти графическим методом (сделайте это!):

$$p^0 = (p_{СС}^0, p_{СП}^0, p_{ПС}^0, p_{ПП}^0)^T = (1/3, 2/3, 0, 0)^T,$$

$$q^0 = (q_{И}^0, q_{П}^0)^T = (2/3, 1/3)^T.$$

- Цена игры  $v(A) = 1/3$ .

## Равновесие в игре «упрощенный покер»

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & И & П & \\ \hline СС & 0 & 1 & 0 \\ СП & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline ПС & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ ПП & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & 1 & \end{array}$$

- Рассмотрим случай, когда  $a = 1$ ,  $m = n$  и тогда  $\rho = 1/2$ .
- Поскольку  $\alpha(A) = 0 < 1/2 = \beta(A)$ , то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- **Оптимальные смешанные стратегии игроков можно найти графическим методом (сделайте это!):**

$$p^0 = (p_{СС}^0, p_{СП}^0, p_{ПС}^0, p_{ПП}^0)^T = (1/3, 2/3, 0, 0)^T,$$

$$q^0 = (q_{И}^0, q_{П}^0)^T = (2/3, 1/3)^T.$$

- Цена игры  $v(A) = 1/3$ .



## Равновесие в игре «упрощенный покер»

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & И & П & \\ \hline СС & 0 & 1 & 0 \\ СП & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline ПС & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ ПП & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & 1 & \end{array}$$

- Рассмотрим случай, когда  $a = 1$ ,  $m = n$  и тогда  $\rho = 1/2$ .
- Поскольку  $\alpha(A) = 0 < 1/2 = \beta(A)$ , то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях.
- Оптимальные смешанные стратегии игроков можно найти графическим методом (сделайте это!):

$$p^0 = (p_{СС}^0, p_{СП}^0, p_{ПС}^0, p_{ПП}^0)^T = (1/3, 2/3, 0, 0)^T,$$

$$q^0 = (q_{И}^0, q_{П}^0)^T = (2/3, 1/3)^T.$$

- Цена игры  $v(A) = 1/3$ .

# Содержание

## 1 Позиционные игры

- Дерево игры
  - Игра «упрощенный покер»
- Игры с совершенной памятью
- Стратегическая форма игры
  - Игра «упрощенный покер»: продолжение

## 2 Поведенческие стратегии

- Мотивация и определение
- Переход от поведенческой стратегии к смешанной
- Переход от смешанной стратегии к поведенческой

## Интерпрет. равновесия в игре «упрощенный покер»

- Для значения параметра  $\rho = 1/2$  и  $a = 1$ , мы нашли равновесные стратегии обоих игроков

$$p^0 = (p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3, p_{PC}^0 = 0, p_{PP}^0 = 0)^T,$$

$$q^0 = (q_I^0 = 2/3, q_{II}^0 = 1/3)^T.$$

- Со стратегией игрока 2 все понятно: в позициях своего единственного инф. множества игрок 2 объявляет игру с вероятностью  $2/3$  и пасует с вероятностью  $1/3$ .
- Смешанную стратегию  $p^0$  игрок 1 может реализовать стандартным для одноходовой игры образом:
- вначале игры игрок 1 тасует три карточки,  $\boxed{CC}$ ,  $\boxed{CP}$ ,  $\boxed{CP}$ , и затем выбирает одну из них.
- Если это карточка  $\boxed{CC}$ , то в обеих позициях  $B$  и  $C$  игрок 1 будет поднимать ставку.
- Если это карточка  $\boxed{CP}$ , то в позиции  $B$  игрок 1 будет поднимать ставку, а в позиции  $C$  — пасовать.

## Интерпрет. равновесия в игре «упрощенный покер»

- Для значения параметра  $\rho = 1/2$  и  $a = 1$ , мы нашли равновесные стратегии обоих игроков

$$p^0 = (p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3, p_{PC}^0 = 0, p_{PP}^0 = 0)^T,$$

$$q^0 = (q_I^0 = 2/3, q_{II}^0 = 1/3)^T.$$

- Со стратегией игрока 2 все понятно: в позициях своего единственного инф. множества игрок 2 объявляет игру с вероятностью  $2/3$  и пасует с вероятностью  $1/3$ .
- Смешанную стратегию  $p^0$  игрок 1 может реализовать стандартным для одноходовой игры образом:
- вначале игры игрок 1 пасует три карточки,  $\boxed{CC}$ ,  $\boxed{CP}$ ,  $\boxed{CP}$ , и затем выбирает одну из них.
- Если это карточка  $\boxed{CC}$ , то в обеих позициях  $B$  и  $C$  игрок 1 будет поднимать ставку.
- Если это карточка  $\boxed{CP}$ , то в позиции  $B$  игрок 1 будет поднимать ставку, а в позиции  $C$  — пасовать.

## Интерпрет. равновесия в игре «упрощенный покер»

- Для значения параметра  $\rho = 1/2$  и  $a = 1$ , мы нашли равновесные стратегии обоих игроков

$$p^0 = (p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3, p_{PC}^0 = 0, p_{PP}^0 = 0)^T,$$

$$q^0 = (q_I^0 = 2/3, q_{II}^0 = 1/3)^T.$$

- Со стратегией игрока 2 все понятно: в позициях своего единственного инф. множества игрок 2 объявляет игру с вероятностью  $2/3$  и пасует с вероятностью  $1/3$ .
- Смешанную стратегию  $p^0$  игрок 1 может реализовать стандартным для одноходовой игры образом:
  - вначале игры игрок 1 пасует три карточки,  $\boxed{CC}$ ,  $\boxed{CP}$ ,  $\boxed{CP}$ , и затем выбирает одну из них.
  - Если это карточка  $\boxed{CC}$ , то в обеих позициях  $B$  и  $C$  игрок 1 будет поднимать ставку.
  - Если это карточка  $\boxed{CP}$ , то в позиции  $B$  игрок 1 будет поднимать ставку, а в позиции  $C$  — пасовать.

## Интерпрет. равновесия в игре «упрощенный покер»

- Для значения параметра  $\rho = 1/2$  и  $a = 1$ , мы нашли равновесные стратегии обоих игроков

$$p^0 = (p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3, p_{PC}^0 = 0, p_{PP}^0 = 0)^T,$$

$$q^0 = (q_I^0 = 2/3, q_{II}^0 = 1/3)^T.$$

- Со стратегией игрока 2 все понятно: в позициях своего единственного инф. множества игрок 2 объявляет игру с вероятностью  $2/3$  и пасует с вероятностью  $1/3$ .
- Смешанную стратегию  $p^0$  игрок 1 может реализовать стандартным для одноходовой игры образом:
- **вначале игры игрок 1 тасует три карточки,  $\boxed{CC}$ ,  $\boxed{CP}$ ,  $\boxed{CP}$ , и затем выбирает одну из них.**
- Если это карточка  $\boxed{CC}$ , то в обеих позициях  $B$  и  $C$  игрок 1 будет поднимать ставку.
- Если это карточка  $\boxed{CP}$ , то в позиции  $B$  игрок 1 будет поднимать ставку, а в позиции  $C$  — пасовать.

## Интерпрет. равновесия в игре «упрощенный покер»

- Для значения параметра  $\rho = 1/2$  и  $a = 1$ , мы нашли равновесные стратегии обоих игроков

$$p^0 = (p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3, p_{PC}^0 = 0, p_{PP}^0 = 0)^T,$$

$$q^0 = (q_I^0 = 2/3, q_{II}^0 = 1/3)^T.$$

- Со стратегией игрока 2 все понятно: в позициях своего единственного инф. множества игрок 2 объявляет игру с вероятностью  $2/3$  и пасует с вероятностью  $1/3$ .
- Смешанную стратегию  $p^0$  игрок 1 может реализовать стандартным для одноходовой игры образом:
- вначале игры игрок 1 пасует три карточки,  $\boxed{CC}$ ,  $\boxed{CP}$ ,  $\boxed{CP}$ , и затем выбирает одну из них.
- Если это карточка  $\boxed{CC}$ , то в обеих позициях  $B$  и  $C$  игрок 1 будет поднимать ставку.
- Если это карточка  $\boxed{CP}$ , то в позиции  $B$  игрок 1 будет поднимать ставку, а в позиции  $C$  — пасовать.

## Интерпрет. равновесия в игре «упрощенный покер»

- Для значения параметра  $\rho = 1/2$  и  $a = 1$ , мы нашли равновесные стратегии обоих игроков

$$p^0 = (p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3, p_{PC}^0 = 0, p_{PP}^0 = 0)^T,$$

$$q^0 = (q_I^0 = 2/3, q_{II}^0 = 1/3)^T.$$

- Со стратегией игрока 2 все понятно: в позициях своего единственного инф. множества игрок 2 объявляет игру с вероятностью  $2/3$  и пасует с вероятностью  $1/3$ .
- Смешанную стратегию  $p^0$  игрок 1 может реализовать стандартным для одноходовой игры образом:
- вначале игры игрок 1 пасует три карточки,  $\boxed{CC}$ ,  $\boxed{CP}$ ,  $\boxed{CP}$ , и затем выбирает одну из них.
- Если это карточка  $\boxed{CC}$ , то в обеих позициях  $B$  и  $C$  игрок 1 будет поднимать ставку.
- Если это карточка  $\boxed{CP}$ , то в позиции  $B$  игрок 1 будет подымать ставку, а в позиции  $C$  — пасовать.



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

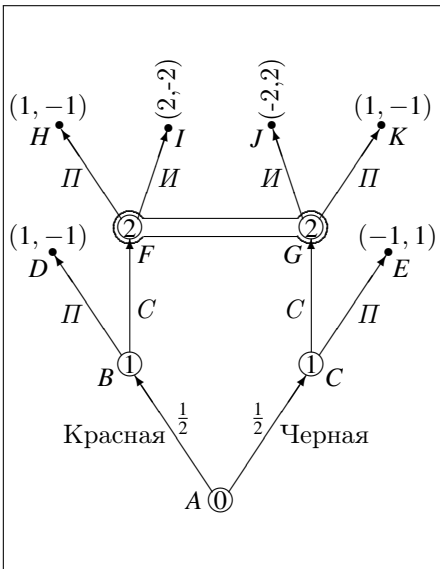
$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3;$$

Игрок 1

в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*  
под. ставку с вероятн.  $1/3$   
и пасует с вероятн.  $2/3$ .

$$q^0: q_{И}^0 = 2/3, q_{П}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$   
играет с вероятн.  $2/3$   
и пасует с вероятн.  $1/3$ .



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

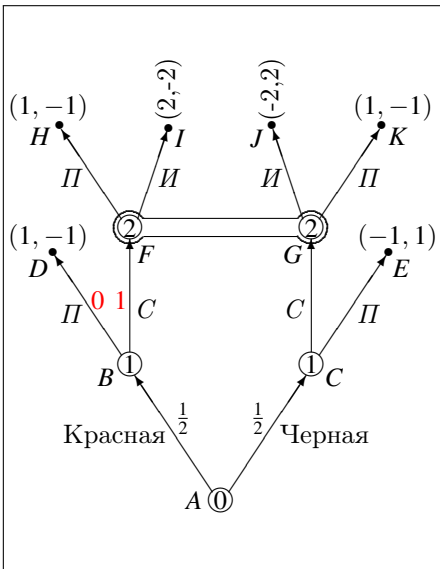
$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3;$$

Игрок 1

в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*  
под. ставку с вероятн.  $1/3$   
и пасует с вероятн.  $2/3$ .

$$q^0: q_{II}^0 = 2/3, q_{PI}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$   
играет с вероятн.  $2/3$   
и пасует с вероятн.  $1/3$ .



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

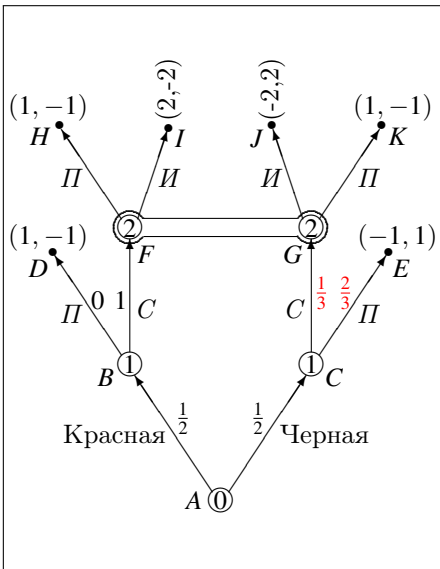
$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3;$$

Игрок 1

в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*  
под. ставку с вероятн.  $1/3$   
и пасует с вероятн.  $2/3$ .

$$q^0: q_{II}^0 = 2/3, q_{PI}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$   
играет с вероятн.  $2/3$   
и пасует с вероятн.  $1/3$ .



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

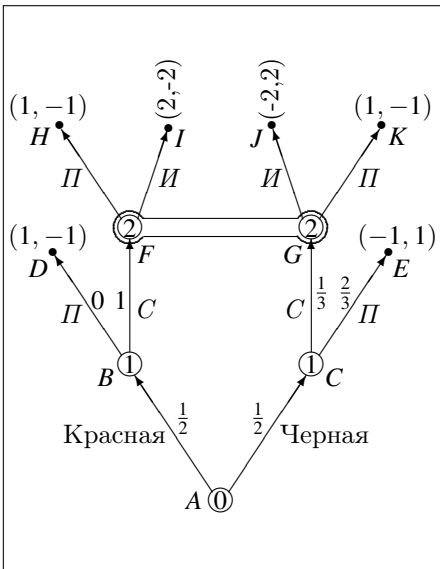
$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{C\Pi}^0 = 2/3;$$

## Игрок 1

в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*  
под. ставку с вероятн.  $1/3$   
и пасует с вероятн.  $2/3$ .

$$q^0: q_{И}^0 = 2/3, q_{\Pi}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$   
играет с вероятн.  $2/3$   
и пасует с вероятн.  $1/3$ .



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{C\Pi}^0 = 2/3;$$

Игрок 1

в поз. **B** подымает ставку,

в позиции **C**

под. ставку с вероятн.  $1/3$

и пасует с вероятн.  $2/3$ .

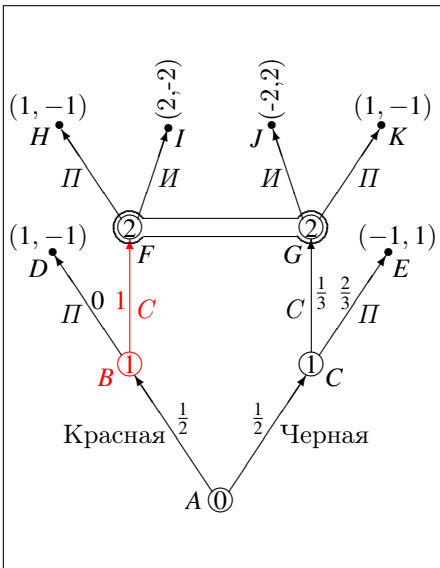
$$q^0: q_{\Pi}^0 = 2/3, q_{\Pi}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.

множествава  $\{F, G\}$

играет с вероятн.  $2/3$

и пасует с вероятн.  $1/3$ .



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3;$$

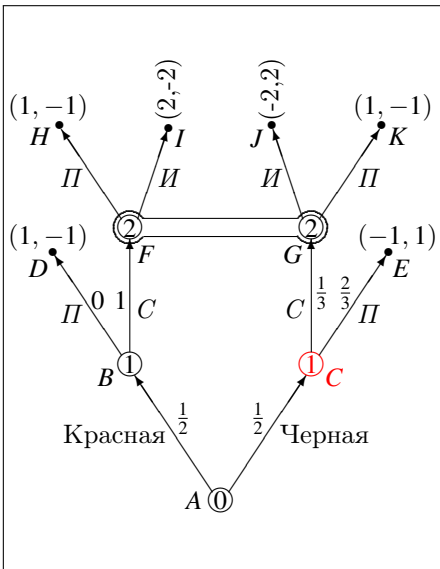
Игрок 1

в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*

под. ставку с вероятн.  $1/3$   
и пасует с вероятн.  $2/3$ .

$$q^0: q_{IC}^0 = 2/3, q_{IP}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$   
играет с вероятн.  $2/3$   
и пасует с вероятн.  $1/3$ .



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{CP}^0 = 2/3;$$

Игрок 1

в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*

под. ставку с вероятн.  $1/3$

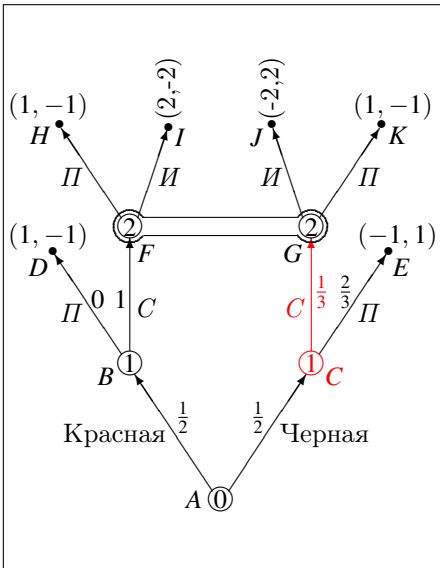
и пасует с вероятн.  $2/3$ .

$$q^0: q_{И}^0 = 2/3, q_{П}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$

играет с вероятн.  $2/3$

и пасует с вероятн.  $1/3$ .



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{C\Pi}^0 = 2/3;$$

Игрок 1

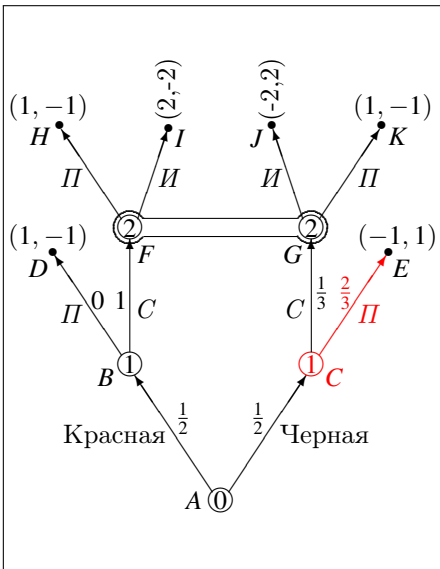
в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*

под. ставку с вероятн.  $1/3$   
**и пасует с вероятн.  $2/3$ .**

$$q^0: q_{\Pi}^0 = 2/3, q_{\Pi}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$

играет с вероятн.  $2/3$   
и пасует с вероятн.  $1/3$ .





# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{C\Pi}^0 = 2/3;$$

Игрок 1

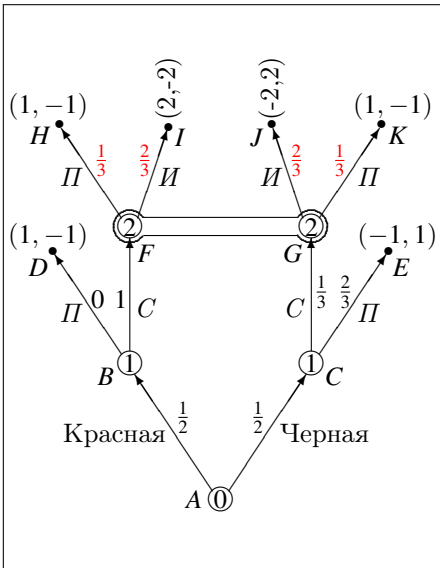
в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*

под. ставку с вероятн.  $1/3$   
и пасует с вероятн.  $2/3$ .

$$q^0: q_{И}^0 = 2/3, q_{\Pi}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$

играет с вероятн.  $2/3$   
и пасует с вероятн.  $1/3$ .



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{CI}^0 = 2/3;$$

Игрок 1

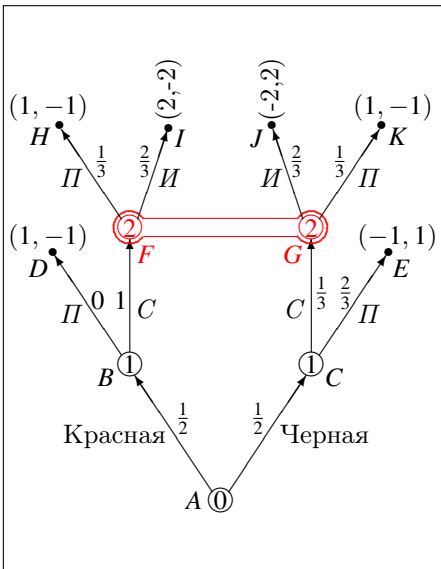
в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*

под. ставку с вероятн.  $1/3$   
и пасует с вероятн.  $2/3$ .

$$q^0: q_{II}^0 = 2/3, q_{II}^0 = 1/3.$$

**Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$**

играет с вероятн.  $2/3$   
и пасует с вероятн.  $1/3$ .



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{C\Pi}^0 = 2/3;$$

Игрок 1

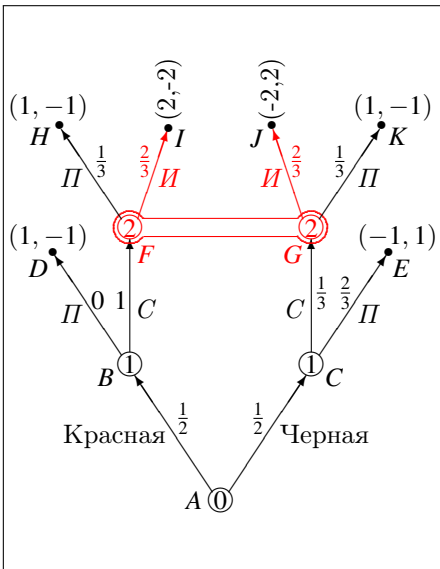
в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*  
под. ставку с вероятн.  $1/3$   
и пасует с вероятн.  $2/3$ .

$$q^0: q_{И}^0 = 2/3, q_{\Pi}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$

**играет с вероятн.  $2/3$**

и пасует с вероятн.  $1/3$ .



# Повед. стратегии в игре «упрощенный покер»

$$p^0: p_{CC}^0 = 1/3, p_{C\Pi}^0 = 2/3;$$

Игрок 1

в поз. *B* подымает ставку,  
в позиции *C*

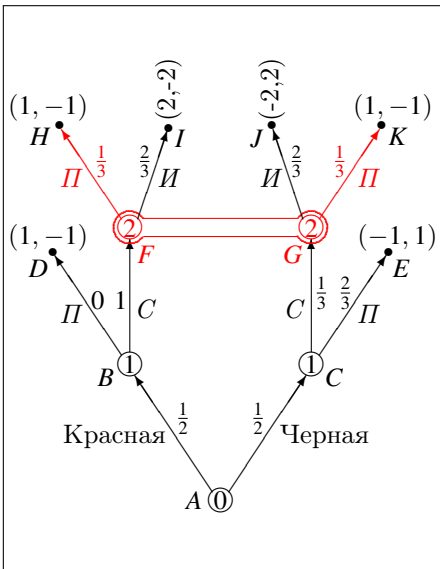
под. ставку с вероятн.  $1/3$   
и пасует с вероятн.  $2/3$ .

$$q^0: q_{И}^0 = 2/3, q_{\Pi}^0 = 1/3.$$

Игрок 2 в позициях инф.  
множествава  $\{F, G\}$

играет с вероятн.  $2/3$

**и пасует с вероятн.  $1/3$ .**



# Зачем нужны поведенческие стратегии

- В чем разнятся два способа реализации смешанной стратегии  $p^0$ ?
- В первом случае игрок 1 принимает решение, как действовать в обоих своих позициях (информационных множествах), еще до начала игры.
- Во втором случае игрок 1 в каждой позиции выбирает свой ход тогда, когда игра достигает этой позиции.
- Для такой малой игры может показаться, что разница незначительна.
- Но для игр с большим количеством ходов у каждого из игроков
  - поведенческие стратегии интуитивно более понятны,
  - и их гораздо более просто описывать.

# Зачем нужны поведенческие стратегии

- В чем разнятся два способа реализации смешанной стратегии  $p^0$ ?
- В первом случае игрок 1 принимает решение, как действовать в обоих своих позициях (информационных множествах), еще до начала игры.
- Во втором случае игрок 1 в каждой позиции выбирает свой ход тогда, когда игра достигает этой позиции.
- Для такой малой игры может показаться, что разница незначительна.
- Но для игр с большим количеством ходов у каждого из игроков
  - поведенческие стратегии интуитивно более понятны,
  - и их гораздо более просто описывать.

# Зачем нужны поведенческие стратегии

- В чем разнятся два способа реализации смешанной стратегии  $p^0$ ?
- В первом случае игрок 1 принимает решение, как действовать в обоих своих позициях (информационных множествах), еще до начала игры.
- Во втором случае игрок 1 в каждой позиции выбирает свой ход тогда, когда игра достигает этой позиции.
- Для такой малой игры может показаться, что разница незначительна.
- Но для игр с большим количеством ходов у каждого из игроков
  - поведенческие стратегии интуитивно более понятны,
  - и их гораздо более просто описывать.

# Зачем нужны поведенческие стратегии

- В чем разнятся два способа реализации смешанной стратегии  $p^0$ ?
- В первом случае игрок 1 принимает решение, как действовать в обоих своих позициях (информационных множествах), еще до начала игры.
- Во втором случае игрок 1 в каждой позиции выбирает свой ход тогда, когда игра достигает этой позиции.
- Для такой малой игры может показаться, что разница незначительна.
- Но для игр с большим количеством ходов у каждого из игроков
  - поведенческие стратегии интуитивно более понятны,
  - и их гораздо более просто описывать.



# Зачем нужны поведенческие стратегии

- В чем разнятся два способа реализации смешанной стратегии  $p^0$ ?
- В первом случае игрок 1 принимает решение, как действовать в обоих своих позициях (информационных множествах), еще до начала игры.
- Во втором случае игрок 1 в каждой позиции выбирает свой ход тогда, когда игра достигает этой позиции.
- Для такой малой игры может показаться, что разница незначительна.
- Но для игр с большим количеством ходов у каждого из игроков
  - поведенческие стратегии интуитивно более понятны,
  - и их гораздо более просто описывать.

# Зачем нужны поведенческие стратегии

- В чем разнятся два способа реализации смешанной стратегии  $p^0$ ?
- В первом случае игрок 1 принимает решение, как действовать в обоих своих позициях (информационных множествах), еще до начала игры.
- Во втором случае игрок 1 в каждой позиции выбирает свой ход тогда, когда игра достигает этой позиции.
- Для такой малой игры может показаться, что разница незначительна.
- Но для игр с большим количеством ходов у каждого из игроков
  - поведенческие стратегии интуитивно более понятны,
  - и их гораздо более просто описывать.

# Зачем нужны поведенческие стратегии

- В чем разнятся два способа реализации смешанной стратегии  $p^0$ ?
- В первом случае игрок 1 принимает решение, как действовать в обоих своих позициях (информационных множествах), еще до начала игры.
- Во втором случае игрок 1 в каждой позиции выбирает свой ход тогда, когда игра достигает этой позиции.
- Для такой малой игры может показаться, что разница незначительна.
- Но для игр с большим количеством ходов у каждого из игроков
  - поведенческие стратегии интуитивно более понятны,
  - **и их гораздо более просто описывать.**

# Формальное определение поведенческой стратегии

## Определение

- *Поведенческой стратегией* игрока называется
- набор вероятностей, приписанный всем его ходам (дугам),
- при этом, сумма вероятностей на дугах выходящих из заданной позиции равна 1,
- а вероятности на дугах, представляющих один ход в некотором информационном множестве, равны между собой.

# Формальное определение поведенческой стратегии

## Определение

- *Поведенческой стратегией* игрока называется
- набор вероятностей, приписанный всем его ходам (дугам),
- при этом, сумма вероятностей на дугах выходящих из заданной позиции равна 1,
- а вероятности на дугах, представляющих один ход в некотором информационном множестве, равны между собой.

# Формальное определение поведенческой стратегии

## Определение

- *Поведенческой стратегией* игрока называется
- набор вероятностей, приписанный всем его ходам (дугам),
- при этом, сумма вероятностей на дугах выходящих из заданной позиции равна 1,
- а вероятности на дугах, представляющих один ход в некотором информационном множестве, равны между собой.

# Формальное определение поведенческой стратегии

## Определение

- *Поведенческой стратегией* игрока называется
- набор вероятностей, приписанный всем его ходам (дугам),
- при этом, сумма вероятностей на дугах выходящих из заданной позиции равна 1,
- а вероятности на дугах, представляющих один ход в некотором информационном множестве, равны между собой.

# Содержание

## 1 Позиционные игры

- Дерево игры
  - Игра «упрощенный покер»
- Игры с совершенной памятью
- Стратегическая форма игры
  - Игра «упрощенный покер»: продолжение

## 2 Поведенческие стратегии

- Мотивация и определение
- Переход от поведенческой стратегии к смешанной
- Переход от смешанной стратегии к поведенческой



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

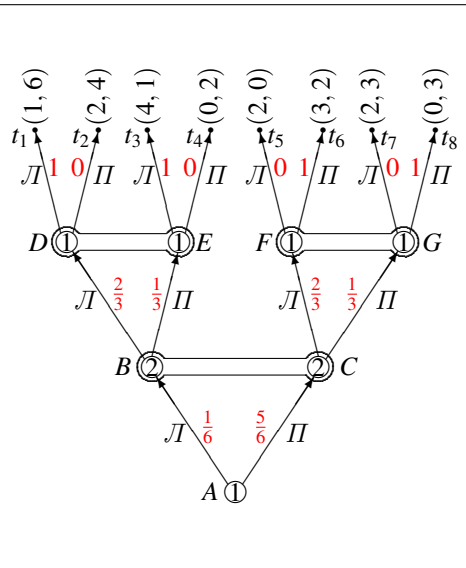
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

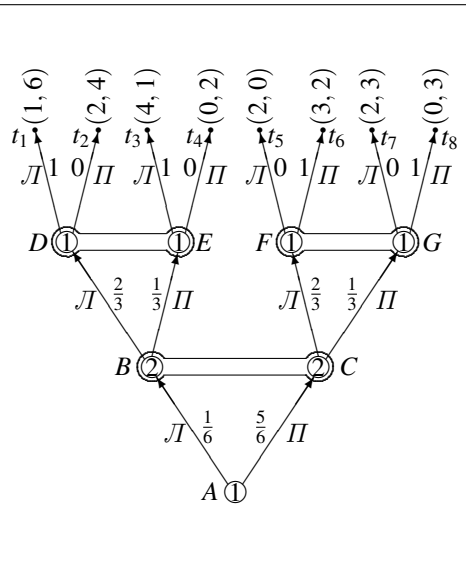
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

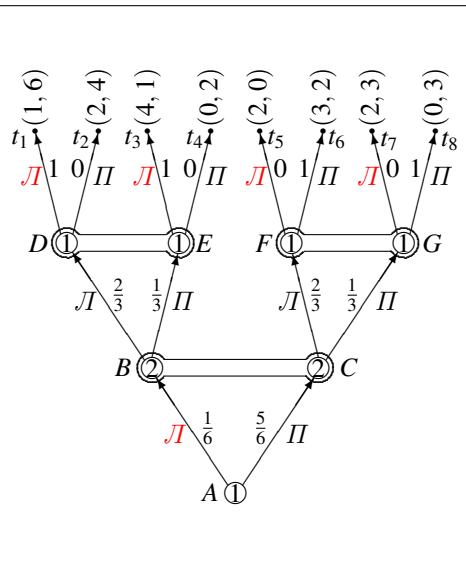
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

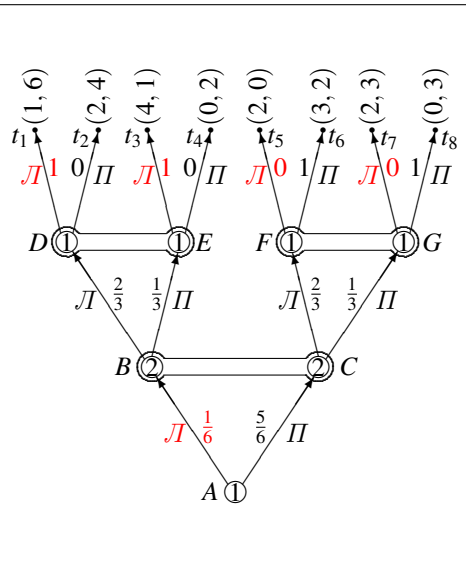
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

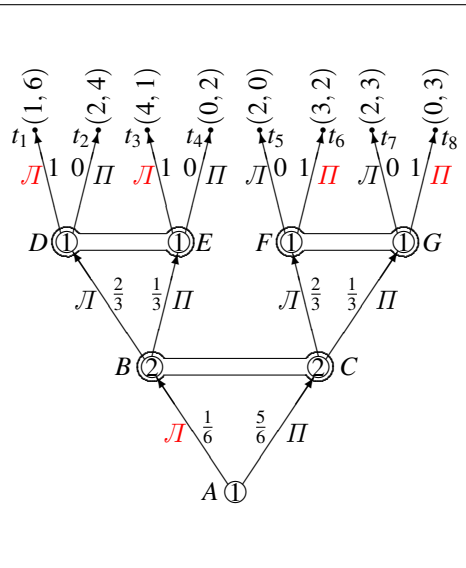
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

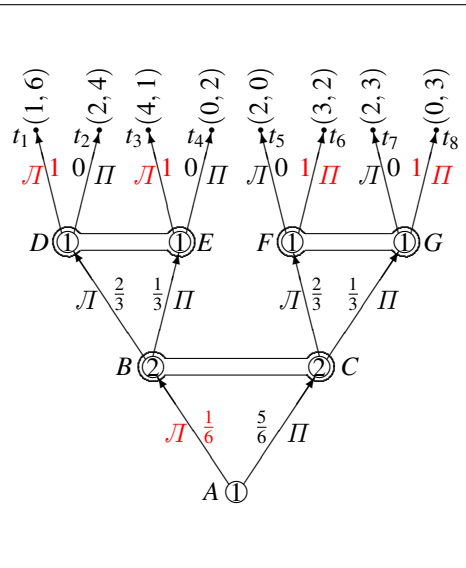
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

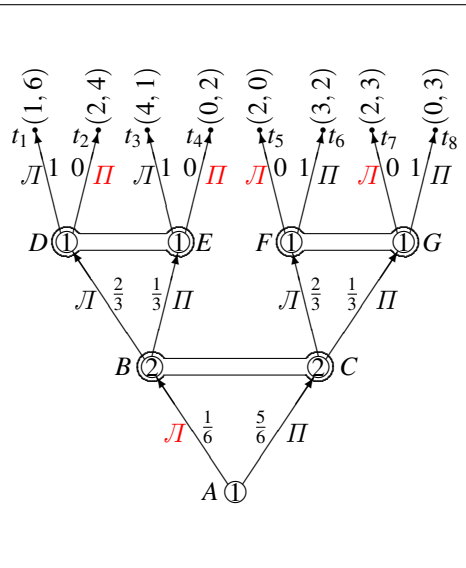
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

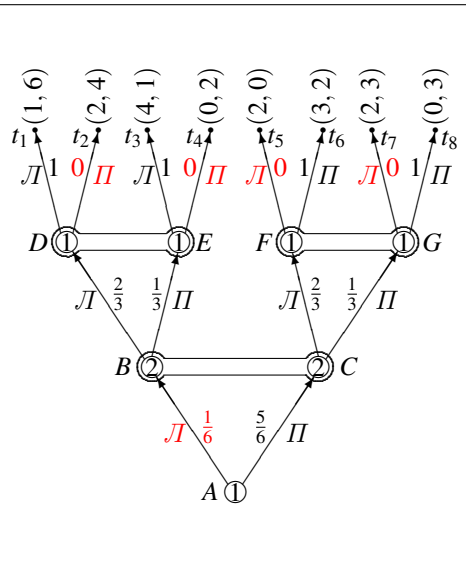
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$





# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

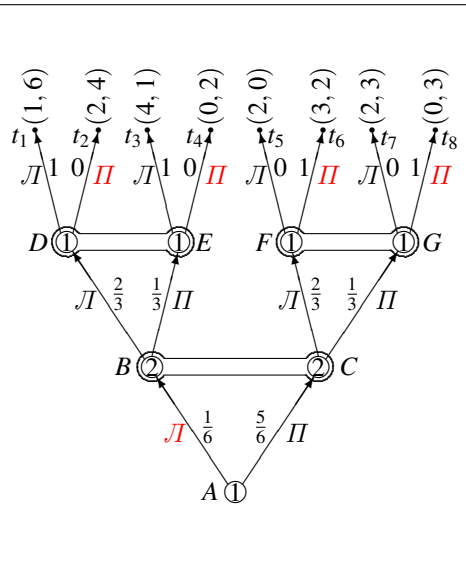
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

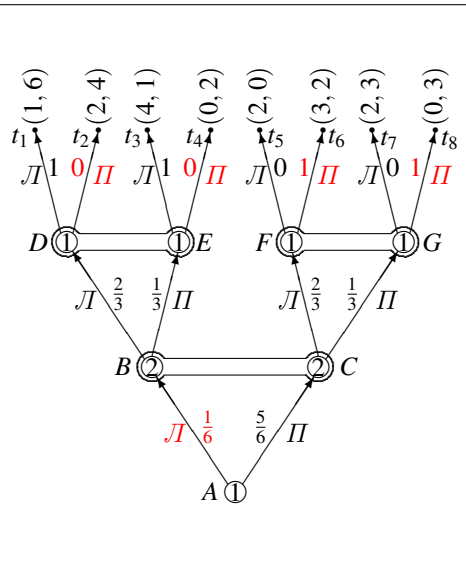
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

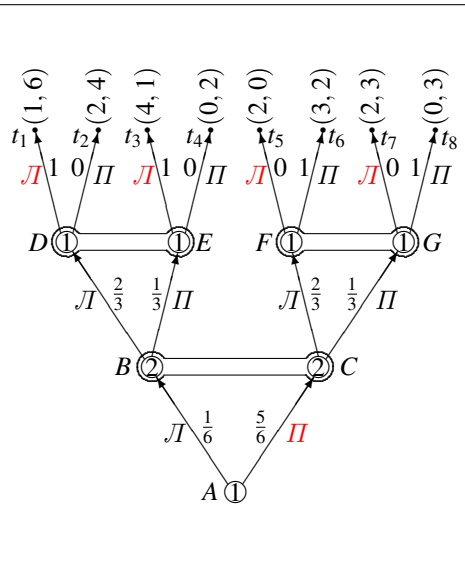
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

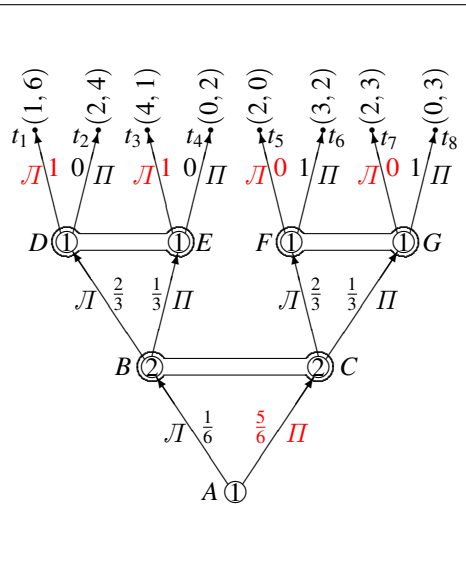
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

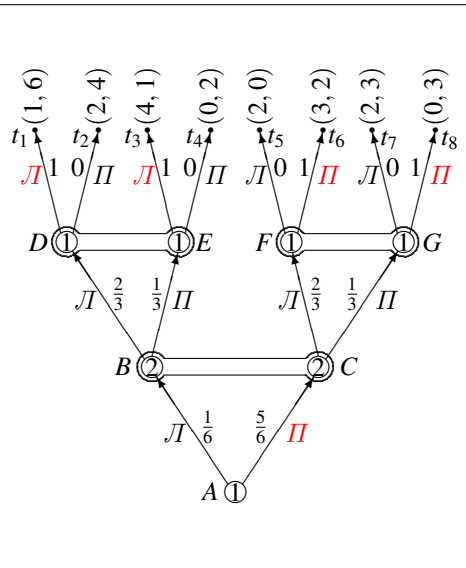
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

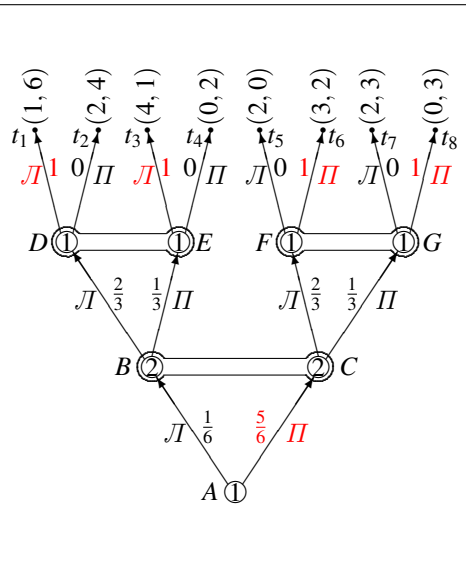
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

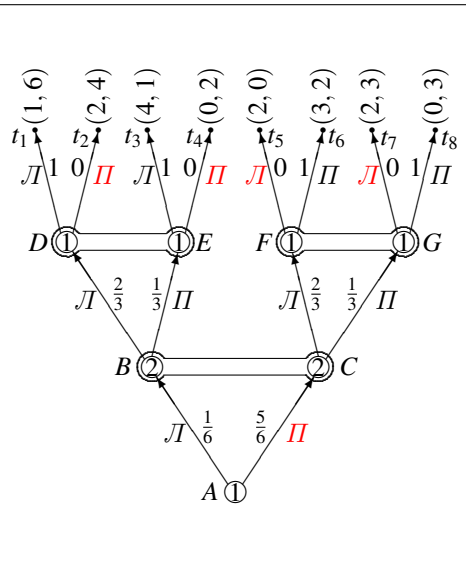
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

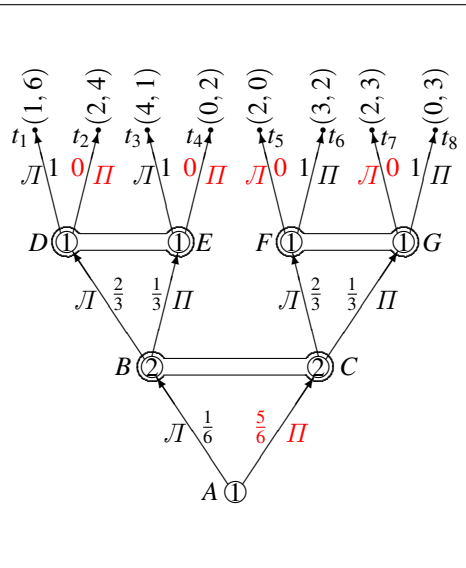
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$





# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

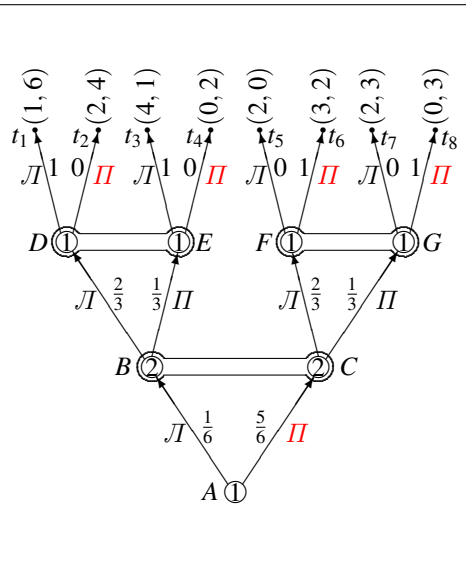
$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

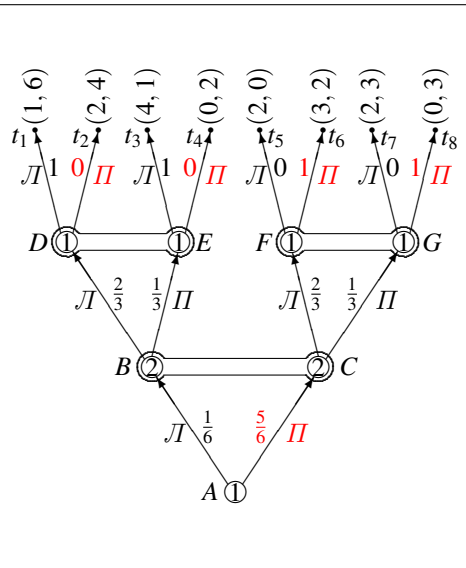
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

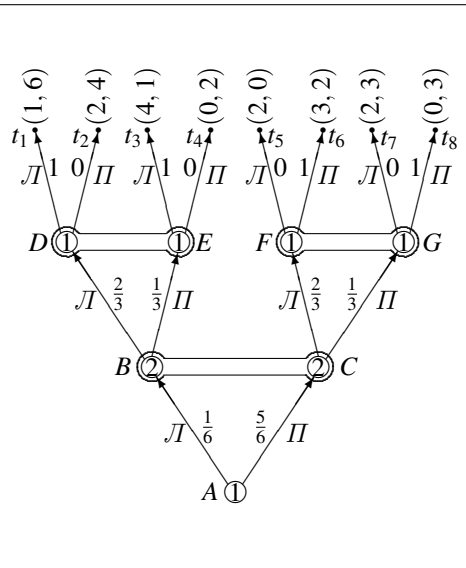
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

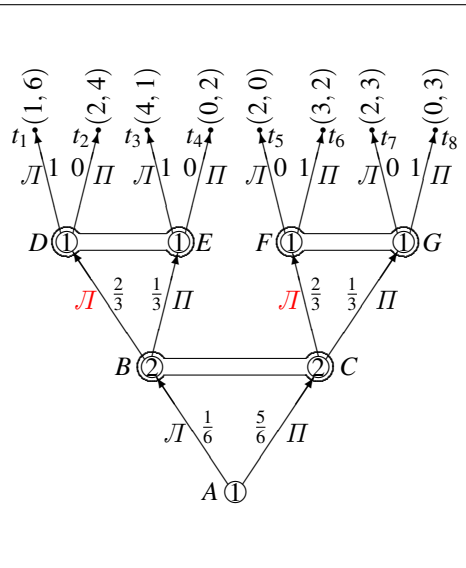
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

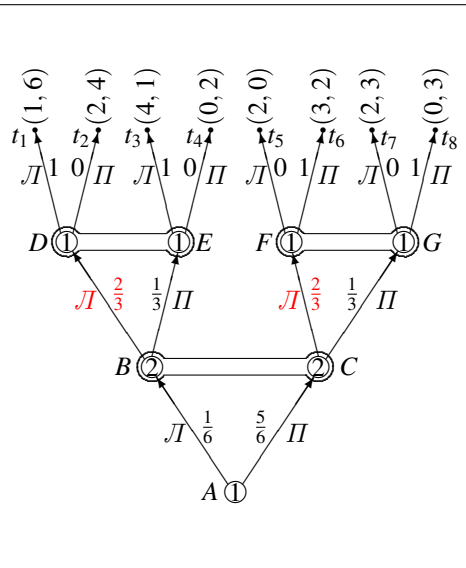
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

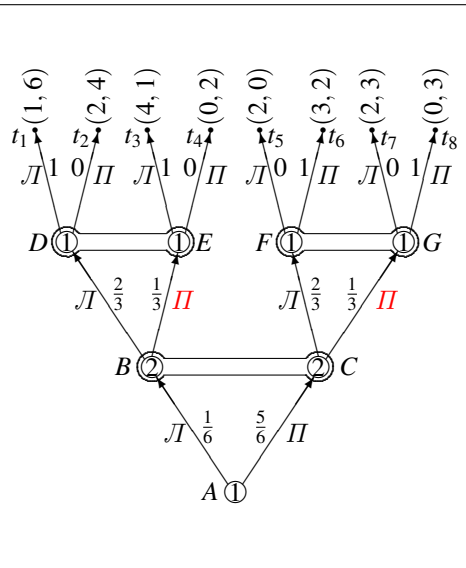
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Переход от поведенческой стратегии к смешанной

8 страт. игрока 1:

$$ЛЛЛ - p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ЛЛП - p_{ЛЛП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$ЛПЛ - p_{ЛПЛ}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ЛПП - p_{ЛПП}^0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$ПЛЛ - p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$ПЛП - p_{ПЛП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

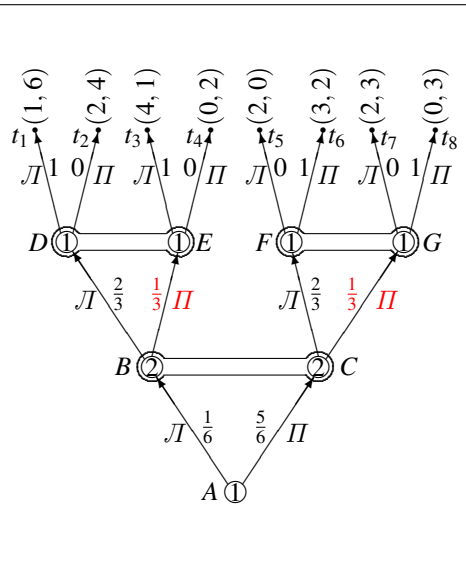
$$ППЛ - p_{ППЛ}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$ППП - p_{ППП}^0 = \frac{5}{6} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

2 страт. игрока 2:

$$Л - q_L^0 = \frac{2}{3}$$

$$П - q_P^0 = \frac{1}{3}$$



# Содержание

## 1 Позиционные игры

- Дерево игры
  - Игра «упрощенный покер»
- Игры с совершенной памятью
- Стратегическая форма игры
  - Игра «упрощенный покер»: продолжение

## 2 Поведенческие стратегии

- Мотивация и определение
- Переход от поведенческой стратегии к смешанной
- Переход от смешанной стратегии к поведенческой



# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

$$p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6}, p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6}.$$

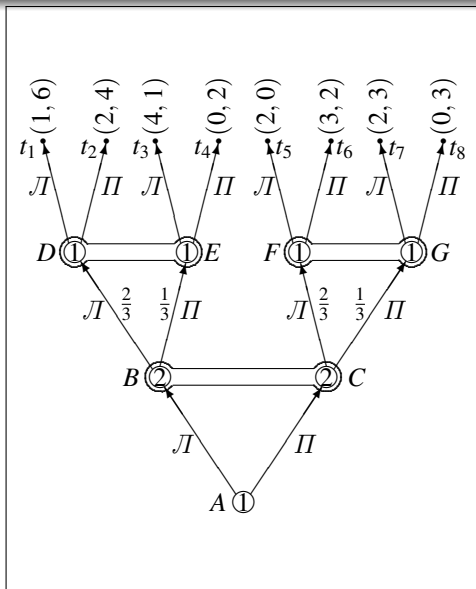
$$q_L^0 = \frac{2}{3}, q_P^0 = \frac{1}{3}$$

Стратег. форма:

	Л	П
ЛЛЛ	1, 6	4, 1
ЛЛП	1, 6	4, 1
ЛПЛ	2, 4	0, 2
ЛПП	2, 4	0, 2
ПЛЛ	2, 0	2, 3
ПЛП	3, 2	0, 3
ППЛ	2, 0	2, 3
ППП	3, 2	0, 3

$(p^0, q^0)$  — равновесие.

$(p^1, q^0)$  — равновесие, где  $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$  есть ненулевые комп.  $p^1$ .



# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

$$p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6}, p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6}.$$

$$q_L^0 = \frac{2}{3}, q_P^0 = \frac{1}{3}$$

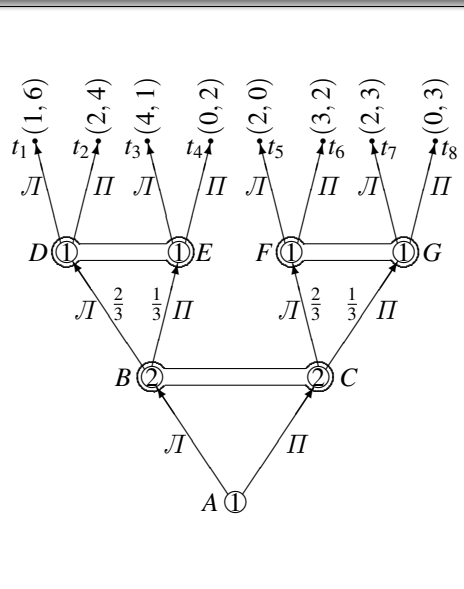
Стратег. форма:

	Л	П
ЛЛЛ	1, 6	4, 1
ЛЛП	1, 6	4, 1
ЛПЛ	2, 4	0, 2
ЛПП	2, 4	0, 2
ПЛЛ	2, 0	2, 3
ПЛП	3, 2	0, 3
ППЛ	2, 0	2, 3
ППП	3, 2	0, 3

$(p^0, q^0)$  — равновесие.

$(p^1, q^0)$  — равновесие, где

$p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$   
 есть ненулевые комп.  $p^1$ .



# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

$$p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6}, p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6}.$$

$$q_L^0 = \frac{2}{3}, q_P^0 = \frac{1}{3}$$

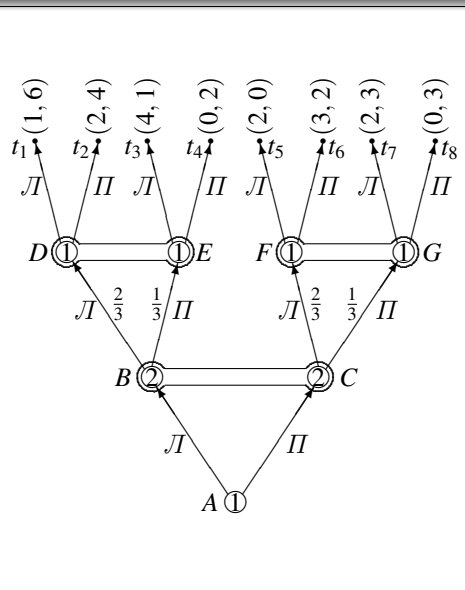
Стратег. форма:

	Л	П
ЛЛЛ	1, 6*	4, 1
ЛЛП	1, 6*	4*, 1
ЛПЛ	2, 4*	0, 2
ЛПП	2, 4*	0, 2
ПЛЛ	2, 0	2, 3*
ПЛП	3*, 2	0, 3*
ППЛ	2, 0	2, 3*
ППП	3*, 2	0, 3*

$(p^0, q^0)$  — равновесие.

$(p^1, q^0)$  — равновесие, где

$p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$   
 есть ненулевые комп.  $p^1$ .



# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

$$p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6}, p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6}.$$

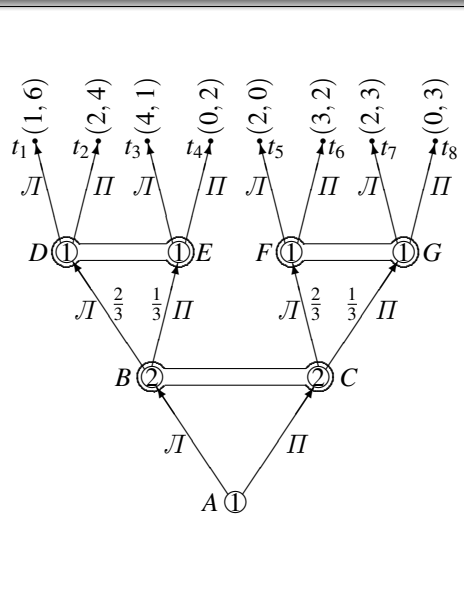
$$q_L^0 = \frac{2}{3}, q_P^0 = \frac{1}{3}$$

Стратег. форма:

	Л	П
ЛЛЛ	1, 6	4, 1
ЛЛП	1, 6	4, 1
ЛПЛ	2, 4	0, 2
ЛПП	2, 4	0, 2
ПЛЛ	2, 0	2, 3
ПЛП	3, 2	0, 3
ППЛ	2, 0	2, 3
ППП	3, 2	0, 3

$(p^0, q^0)$  — равновесие.

$(p^1, q^0)$  — равновесие, где  $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$  есть ненулевые комп.  $p^1$ .



# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

$$p_{ЛЛЛ}^0 = \frac{1}{6}, p_{ПЛЛ}^0 = \frac{5}{6}.$$

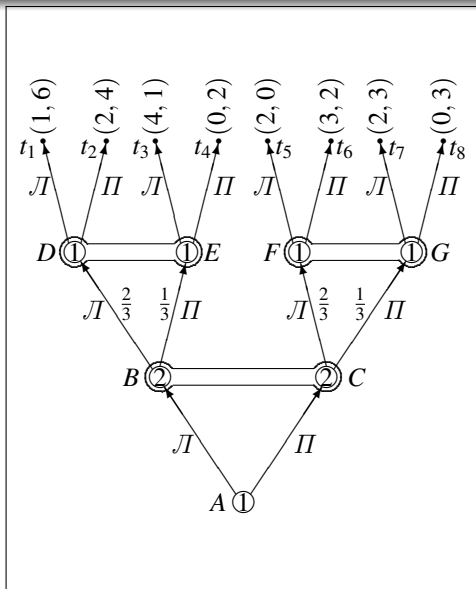
$$q_L^0 = \frac{2}{3}, q_P^0 = \frac{1}{3}$$

Стратег. форма:

	Л	П
<b>ЛЛЛ</b>	1, 6	4, 1
<b>ЛЛП</b>	1, 6	4, 1
<b>ЛПЛ</b>	2, 4	0, 2
<b>ЛПП</b>	2, 4	0, 2
<b>ПЛЛ</b>	2, 0	2, 3
<b>ПЛП</b>	3, 2	0, 3
<b>ППЛ</b>	2, 0	2, 3
<b>ППП</b>	3, 2	0, 3

$(p^0, q^0)$  — равновесие.

$(p^1, q^0)$  — равновесие, где  $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$  есть ненулевые комп.  $p^1$ .



# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

Покажем, что страт.  $p^1$ ,  
 $p^1_{ЛЛЛ} = 1/6$  и  $p^1_{ППП} = 5/6$ ,  
 не предст. повед. стратегию.

Пусть  $x, y, z \in [0, 1]$  опред.  
 повед. страт.:

$$p^1_{ЛЛЛ} = 1/6 = xyz$$

$$\Rightarrow x > 0, y > 0, z > 0,$$

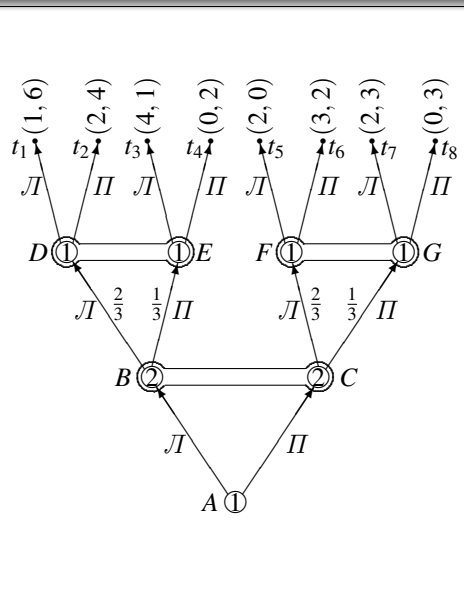
$$p^1_{ЛЛП} = 0 = xy(1-z)$$

$$\Rightarrow z = 1,$$

$$p^1_{ППП} = 5/6 =$$

$$(1-x)(1-y)(1-z) = 0$$

$\Rightarrow$  противоречие!



# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

Покажем, что страт.  $p^1$ ,  
 $p^1_{ЛЛЛ} = 1/6$  и  $p^1_{ППП} = 5/6$ ,  
 не предст. повед. стратегию.

Пусть  $x, y, z \in [0, 1]$  опред.  
 повед. страт.:

$$p^1_{ЛЛЛ} = 1/6 = xyz$$

$$\Rightarrow x > 0, y > 0, z > 0,$$

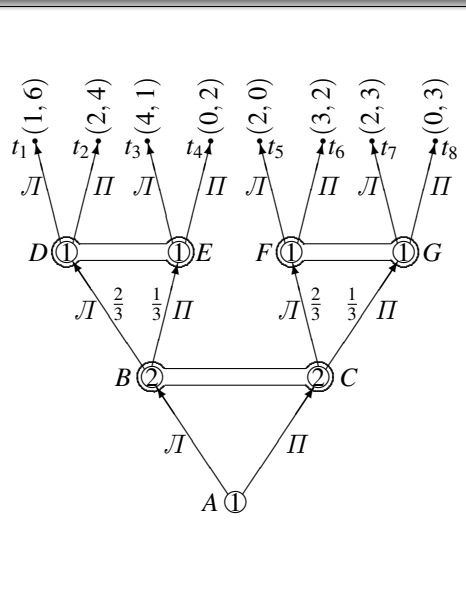
$$p^1_{ЛЛП} = 0 = xy(1-z)$$

$$\Rightarrow z = 1,$$

$$p^1_{ППП} = 5/6 =$$

$$(1-x)(1-y)(1-z) = 0$$

$\Rightarrow$  противоречие!



# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

Покажем, что страт.  $p^1$ ,  
 $p^1_{ЛЛЛ} = 1/6$  и  $p^1_{ППП} = 5/6$ ,  
 не предст. повед. стратегию.

Пусть  $x, y, z \in [0, 1]$  опред.  
 повед. страт.:

$$p^1_{ЛЛЛ} = 1/6 = xyz$$

$$\Rightarrow x > 0, y > 0, z > 0,$$

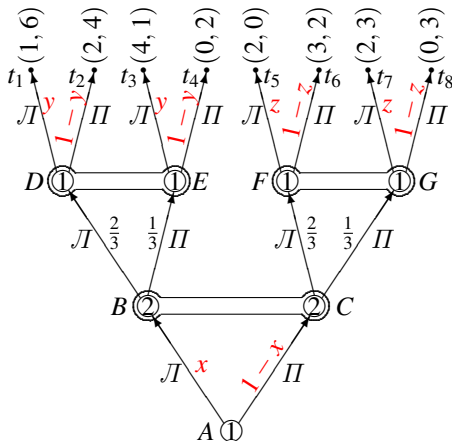
$$p^1_{ЛЛП} = 0 = xy(1-z)$$

$$\Rightarrow z = 1,$$

$$p^1_{ППП} = 5/6 =$$

$$(1-x)(1-y)(1-z) = 0$$

$\Rightarrow$  противоречие!





# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

Покажем, что страт.  $p^1$ ,  
 $p^1_{ЛЛЛ} = 1/6$  и  $p^1_{ППП} = 5/6$ ,  
 не предст. повед. стратегию.

Пусть  $x, y, z \in [0, 1]$  опред.  
 повед. страт.:

$$p^1_{ЛЛЛ} = 1/6 = xyz$$

$$\Rightarrow x > 0, y > 0, z > 0,$$

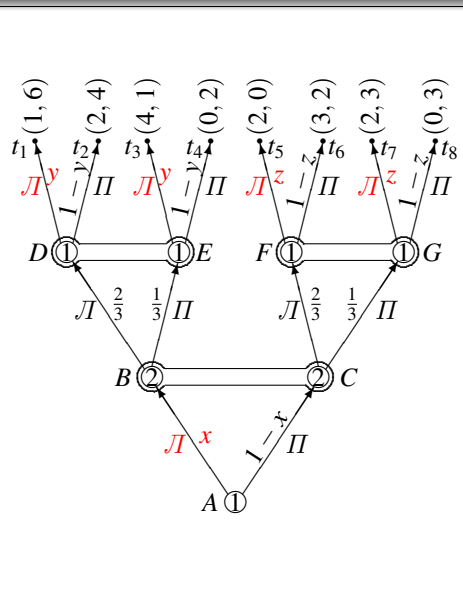
$$p^1_{ЛЛП} = 0 = xy(1-z)$$

$$\Rightarrow z = 1,$$

$$p^1_{ППП} = 5/6 =$$

$$(1-x)(1-y)(1-z) = 0$$

$\Rightarrow$  противоречие!



# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

Покажем, что страт.  $p^1$ ,  
 $p^1_{ЛЛЛ} = 1/6$  и  $p^1_{ППП} = 5/6$ ,  
 не предст. повед. стратегию.

Пусть  $x, y, z \in [0, 1]$  опред.  
 повед. страт.:

$$p^1_{ЛЛЛ} = 1/6 = xyz$$

$$\Rightarrow x > 0, y > 0, z > 0,$$

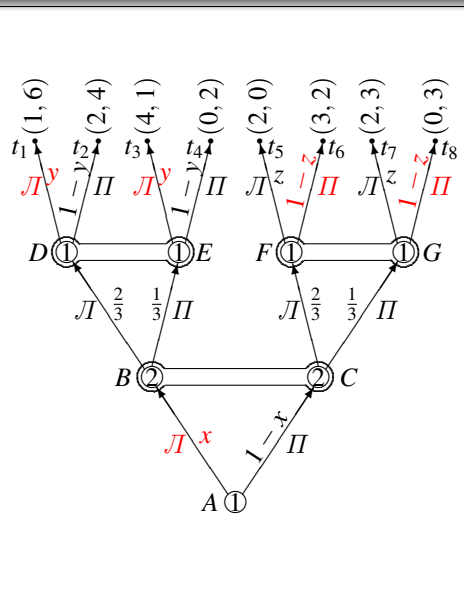
$$p^1_{ЛЛП} = 0 = xy(1-z)$$

$$\Rightarrow z = 1,$$

$$p^1_{ППП} = 5/6 =$$

$$(1-x)(1-y)(1-z) = 0$$

$$\Rightarrow \text{противоречие!}$$



# Не каждая смеш. страт. представляется повед. страт.

Покажем, что страт.  $p^1$ ,  
 $p^1_{ЛЛЛ} = 1/6$  и  $p^1_{ППП} = 5/6$ ,  
 не предст. повед. стратегию.

Пусть  $x, y, z \in [0, 1]$  опред.  
 повед. страт.:

$$p^1_{ЛЛЛ} = 1/6 = xyz$$

$$\Rightarrow x > 0, y > 0, z > 0,$$

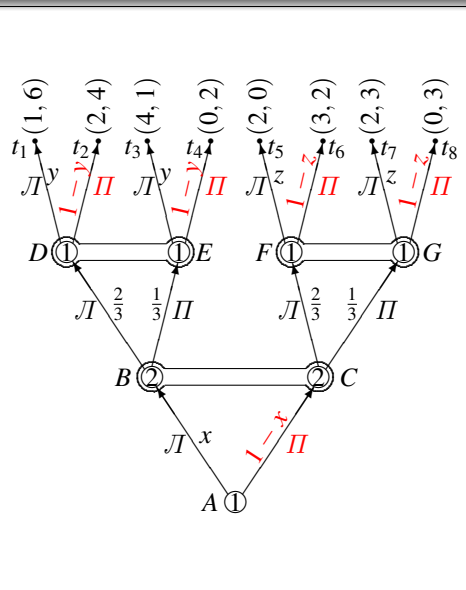
$$p^1_{ЛЛП} = 0 = xy(1 - z)$$

$$\Rightarrow z = 1,$$

$$p^1_{ППП} = 5/6 =$$

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) = 0$$

$$\Rightarrow \text{противоречие!}$$



# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,
  - вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть чистой, смешанной или поведенческой стратегией.
  - Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,
  - вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть чистой, смешанной или поведенческой стратегией.
  - Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, **в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,**
  - вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть чистой, смешанной или поведенческой стратегией.
  - Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,
  - вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть чистой, смешанной или поведенческой стратегией.
  - Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,
  - **вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.**
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть чистой, смешанной или поведенческой стратегией.
  - Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.



# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,
  - вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть чистой, смешанной или поведенческой стратегией.
  - Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,
  - вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть чистой, смешанной или поведенческой стратегией.
  - Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,
  - вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть **чистой**, смешанной или поведенческой стратегией.
  - Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,
  - вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть чистой, **смешанной** или поведенческой стратегией.
  - Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,
  - вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть чистой, смешанной или **поведенческой стратегией**.
  - Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

# Эквивалентные стратегии

## Определение

- Две стратегии  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  игрока  $i$  называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре,
  - если для любой фиксир. комбинации стратегий других игроков в обеих ситуациях, в одной из которых игрок  $i$  использует стратегию  $\bar{p}^i$ , а в другой — стратегию  $\hat{p}^i$ ,
  - вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же.
- 
- Средние выигрыши всех игроков при переходе игрока  $i$  от стратегии  $\bar{p}^i$  к стратегии  $\hat{p}^i$  не изменятся.
  - В данном опред. каждая из стратегий  $\bar{p}^i$  и  $\hat{p}^i$  может быть чистой, смешанной или поведенческой стратегией.
  - При этом, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

# Теорема Куна

## Теорема

*В позиционной игре с совершенной памятью любая смешанная стратегия игрока эквивалентна некоторой его поведенческой стратегии.*

- Результат, сформулированный в этой теореме, интуитивно не очевиден по следующей причине.
- Когда какой-то игрок применяет свою смешанную стратегию, то его ходы в позициях всех его информационных множеств в общем случае являются коррелированными (зависимыми) случайными величинами.
- Но когда этот же игрок применяет любую свою поведенческую стратегию, то его ходы в позициях всех его информационных множеств являются некоррелированными случайными величинами.

# Теорема Куна

## Теорема

*В позиционной игре с совершенной памятью любая смешанная стратегия игрока эквивалентна некоторой его поведенческой стратегии.*

- **Результат, сформулированный в этой теореме, интуитивно не очевиден по следующей причине.**
- Когда какой-то игрок применяет свою смешанную стратегию, то его ходы в позициях всех его информационных множеств в общем случае являются коррелированными (зависимыми) случайными величинами.
- Но когда этот же игрок применяет любую свою поведенческую стратегию, то его ходы в позициях всех его информационных множеств являются некоррелированными случайными величинами.



# Теорема Куна

## Теорема

*В позиционной игре с совершенной памятью любая смешанная стратегия игрока эквивалентна некоторой его поведенческой стратегии.*

- Результат, сформулированный в этой теореме, интуитивно не очевиден по следующей причине.
- Когда какой-то игрок применяет свою смешанную стратегию, то его ходы в позициях всех его информационных множеств в общем случае являются коррелированными (зависимыми) случайными величинами.
- Но когда этот же игрок применяет любую свою поведенческую стратегию, то его ходы в позициях всех его информационных множеств являются некоррелированными случайными величинами.

# Теорема Куна

## Теорема

*В позиционной игре с совершенной памятью любая смешанная стратегия игрока эквивалентна некоторой его поведенческой стратегии.*

- Результат, сформулированный в этой теореме, интуитивно не очевиден по следующей причине.
- Когда какой-то игрок применяет свою смешанную стратегию, то его ходы в позициях всех его информационных множеств в общем случае являются коррелированными (зависимыми) случайными величинами.
- Но когда этот же игрок применяет любую свою поведенческую стратегию, то его ходы в позициях всех его информационных множеств являются некоррелированными случайными величинами.

# Алгоритм построения эквив. поведенческой стратегии

**Вход:** смешанная стратегия  $p^i$  игрока  $i$

**Выход:** поведенческая стратегия, эквивалентная  $\bar{p}^i$

- 1 *Вычисляем веса конечных позиций.*
  - Полагаем  $w(t) = 0$  для всех конечных позиций  $t$ .
  - Для каждой чистой стратегии  $\sigma$  игрока  $i$ , для которой  $p_\sigma^i > 0$ , увеличиваем на  $p_\sigma^i$  веса  $w(t)$  тех конечных позиций  $t$ , в которых может закончиться игра при использовании игроком  $i$  стратегии  $\sigma$ .
- 2 *Вычисляем веса всех остальных позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока 1.*
  - Выбираем позицию  $v$ , из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.

• Если  $v$  — позиция игрока  $i$ , то выбираем  $\bar{p}_v^i$  так, чтобы  $\bar{p}_v^i$  — эквивалентная  $p_v^i$  стратегия игрока  $i$ .

• Если  $v$  — позиция игрока 1, то выбираем  $\bar{p}_v^1$  так, чтобы  $\bar{p}_v^1$  — эквивалентная  $p_v^1$  стратегия игрока 1.

# Алгоритм построения эквив. поведенческой стратегии

Вход: смешанная стратегия  $p^i$  игрока  $i$

Выход: поведенческая стратегия, эквивалентная  $\bar{p}^i$

- 1 *Вычисляем веса конечных позиций.*
  - Полагаем  $w(t) = 0$  для всех конечных позиций  $t$ .
  - Для каждой чистой стратегии  $\sigma$  игрока  $i$ , для которой  $p_\sigma^i > 0$ , увеличиваем на  $p_\sigma^i$  веса  $w(t)$  тех конечных позиций  $t$ , в которых может закончиться игра при использовании игроком  $i$  стратегии  $\sigma$ .
- 2 *Вычисляем веса всех остальных позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока 1.*
  - Выбираем позицию  $v$ , из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.

• Если  $v$  — позиция игрока  $i$ , то выбираем  $q$  так, чтобы

$\sum_{t \in T_i} w(t) = q \sum_{t \in T_i} w(t) + (1 - q) \sum_{t \in T_{-i}} w(t)$

# Алгоритм построения эквив. поведенческой стратегии

Вход: смешанная стратегия  $p^i$  игрока  $i$

Выход: поведенческая стратегия, эквивалентная  $\bar{p}^i$

- 1 *Вычисляем веса конечных позиций.*
  - Полагаем  $w(t) = 0$  для всех конечных позиций  $t$ .
  - Для каждой чистой стратегии  $\sigma$  игрока  $i$ , для которой  $p_{\sigma}^i > 0$ , увеличиваем на  $p_{\sigma}^i$  веса  $w(t)$  тех конечных позиций  $t$ , в которых может закончиться игра при использовании игроком  $i$  стратегии  $\sigma$ .
- 2 *Вычисляем веса всех остальных позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока 1.*
  - Выбираем позицию  $v$ , из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.

# Алгоритм построения эквив. поведенческой стратегии

Вход: смешанная стратегия  $p^i$  игрока  $i$

Выход: поведенческая стратегия, эквивалентная  $\bar{p}^i$

- 1 *Вычисляем веса конечных позиций.*
  - Полагаем  $w(t) = 0$  для всех конечных позиций  $t$ .
  - Для каждой чистой стратегии  $\sigma$  игрока  $i$ , для которой  $p_{\sigma}^i > 0$ , увеличиваем на  $p_{\sigma}^i$  веса  $w(t)$  тех конечных позиций  $t$ , в которых может закончиться игра при использовании игроком  $i$  стратегии  $\sigma$ .
- 2 *Вычисляем веса всех остальных позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока 1.*
  - Выбираем позицию  $v$ , из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.

# Алгоритм построения эквив. поведенческой стратегии

Вход: смешанная стратегия  $p^i$  игрока  $i$

Выход: поведенческая стратегия, эквивалентная  $\bar{p}^i$

- 1 *Вычисляем веса конечных позиций.*
  - Полагаем  $w(t) = 0$  для всех конечных позиций  $t$ .
  - Для каждой чистой стратегии  $\sigma$  игрока  $i$ , для которой  $p_{\sigma}^i > 0$ , увеличиваем на  $p_{\sigma}^i$  веса  $w(t)$  тех конечных позиций  $t$ , в которых может закончиться игра при использовании игроком  $i$  стратегии  $\sigma$ .
- 2 *Вычисляем веса всех остальных позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока 1.*
  - Выбираем позицию  $v$ , из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.

# Алгоритм построения эквив. поведенческой стратегии

Вход: смешанная стратегия  $p^i$  игрока  $i$

Выход: поведенческая стратегия, эквивалентная  $\bar{p}^i$

- 1 *Вычисляем веса конечных позиций.*
  - Полагаем  $w(t) = 0$  для всех конечных позиций  $t$ .
  - Для каждой чистой стратегии  $\sigma$  игрока  $i$ , для которой  $p_{\sigma}^i > 0$ , увеличиваем на  $p_{\sigma}^i$  веса  $w(t)$  тех конечных позиций  $t$ , в которых может закончиться игра при использовании игроком  $i$  стратегии  $\sigma$ .
- 2 *Вычисляем веса всех остальных позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока 1.*
  - Выбираем позицию  $v$ , из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.
    - Если  $v$  есть позиция игрока  $i$ , то вычисляем  $w(v)$  как сумму весов тех позиций, в к-рые входят дуги из  $v$ .
    - Если  $v$  не есть позиция игрока  $i$ , то веса всех позиций, в которые входят дуги из вершины  $v$ , должны быть одинаковыми, скажем, равными  $u$ . Полагаем  $w(v) = u$ .



# Алгоритм построения эквив. поведенческой стратегии

Вход: смешанная стратегия  $p^i$  игрока  $i$

Выход: поведенческая стратегия, эквивалентная  $\bar{p}^i$

- 1 *Вычисляем веса конечных позиций.*
  - Полагаем  $w(t) = 0$  для всех конечных позиций  $t$ .
  - Для каждой чистой стратегии  $\sigma$  игрока  $i$ , для которой  $p_{\sigma}^i > 0$ , увеличиваем на  $p_{\sigma}^i$  веса  $w(t)$  тех конечных позиций  $t$ , в которых может закончиться игра при использовании игроком  $i$  стратегии  $\sigma$ .
- 2 *Вычисляем веса всех остальных позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока 1.*
  - **Выбираем позицию  $v$ , из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.**
    - Если  $v$  есть позиция игрока  $i$ , то вычисляем  $w(v)$  как сумму весов тех позиций, в которые входят дуги из  $v$ . Всем дугам  $(v, x)$  приписываем вероятности  $\bar{p}^i(v, x) = w(x)/w(v)$ .
    - Если  $v$  не есть позиция игрока  $i$ , то веса всех позиций, в которые входят дуги из вершины  $v$ , должны быть одинаковыми, скажем, равными  $a$ . Полагаем  $w(v) = a$ .

# Алгоритм построения эквив. поведенческой стратегии

Вход: смешанная стратегия  $p^i$  игрока  $i$

Выход: поведенческая стратегия, эквивалентная  $\bar{p}^i$

- ① *Вычисляем веса конечных позиций.*
  - Полагаем  $w(t) = 0$  для всех конечных позиций  $t$ .
  - Для каждой чистой стратегии  $\sigma$  игрока  $i$ , для которой  $p_{\sigma}^i > 0$ , увеличиваем на  $p_{\sigma}^i$  веса  $w(t)$  тех конечных позиций  $t$ , в которых может закончиться игра при использовании игроком  $i$  стратегии  $\sigma$ .
- ② *Вычисляем веса всех остальных позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока 1.*
  - Выбираем позицию  $v$ , из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.
    - Если  $v$  есть позиция игрока  $i$ , то вычисляем  $w(v)$  как сумму весов тех позиций, в которые входят дуги из  $v$ . Всем дугам  $(v, x)$  приписываем вероятности  $\bar{p}^i(v, x) = w(x)/w(v)$ .
    - Если  $v$  не есть позиция игрока  $i$ , то веса всех позиций, в которые входят дуги из вершины  $v$ , должны быть одинаковыми, скажем, равными  $a$ . Полагаем  $w(v) = a$ .

# Алгоритм построения эквив. поведенческой стратегии

Вход: смешанная стратегия  $p^i$  игрока  $i$

Выход: поведенческая стратегия, эквивалентная  $\bar{p}^i$

- ① *Вычисляем веса конечных позиций.*
  - Полагаем  $w(t) = 0$  для всех конечных позиций  $t$ .
  - Для каждой чистой стратегии  $\sigma$  игрока  $i$ , для которой  $p_{\sigma}^i > 0$ , увеличиваем на  $p_{\sigma}^i$  веса  $w(t)$  тех конечных позиций  $t$ , в которых может закончиться игра при использовании игроком  $i$  стратегии  $\sigma$ .
- ② *Вычисляем веса всех остальных позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока 1.*
  - Выбираем позицию  $v$ , из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.
    - Если  $v$  есть позиция игрока  $i$ , то вычисляем  $w(v)$  как сумму весов тех позиций, в которые входят дуги из  $v$ .  
**Всем дугам  $(v, x)$  приписываем вероятности**  
 $\bar{p}^i(v, x) = w(x)/w(v)$ .
    - Если  $v$  не есть позиция игрока  $i$ , то веса всех позиций, в которые входят дуги из вершины  $v$ , должны быть одинаковыми, скажем, равными  $a$ . Полагаем  $w(v) = a$ .

# Алгоритм построения эквив. поведенческой стратегии

Вход: смешанная стратегия  $p^i$  игрока  $i$

Выход: поведенческая стратегия, эквивалентная  $\bar{p}^i$

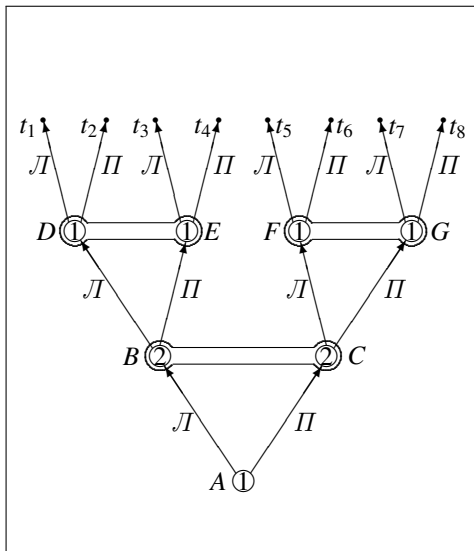
- ① *Вычисляем веса конечных позиций.*
  - Полагаем  $w(t) = 0$  для всех конечных позиций  $t$ .
  - Для каждой чистой стратегии  $\sigma$  игрока  $i$ , для которой  $p_{\sigma}^i > 0$ , увеличиваем на  $p_{\sigma}^i$  веса  $w(t)$  тех конечных позиций  $t$ , в которых может закончиться игра при использовании игроком  $i$  стратегии  $\sigma$ .
- ② *Вычисляем веса всех остальных позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока 1.*
  - Выбираем позицию  $v$ , из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.
    - Если  $v$  есть позиция игрока  $i$ , то вычисляем  $w(v)$  как сумму весов тех позиций, в которые входят дуги из  $v$ . Всем дугам  $(v, x)$  приписываем вероятности  $\bar{p}^i(v, x) = w(x)/w(v)$ .
    - Если  $v$  не есть позиция игрока  $i$ , то веса всех позиций, в которые входят дуги из вершины  $v$ , должны быть одинаковыми, скажем, равными  $a$ . Полагаем  $w(v) = a$ .

# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

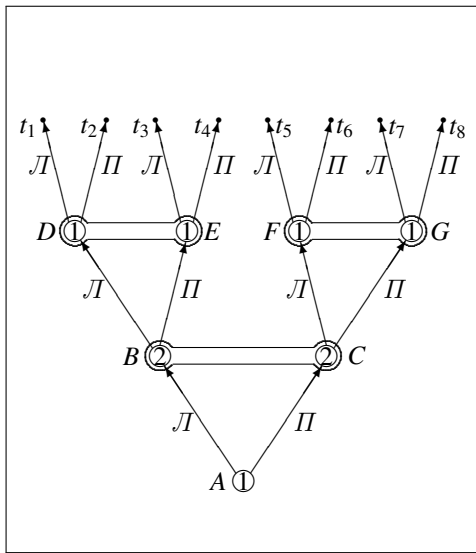


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

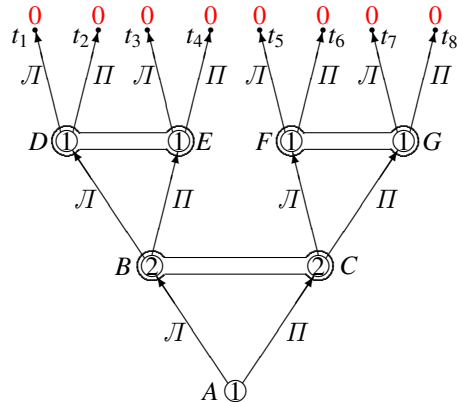


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p^1_{ЛЛЛ} = 1/6$  и  $p^1_{ППП} = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

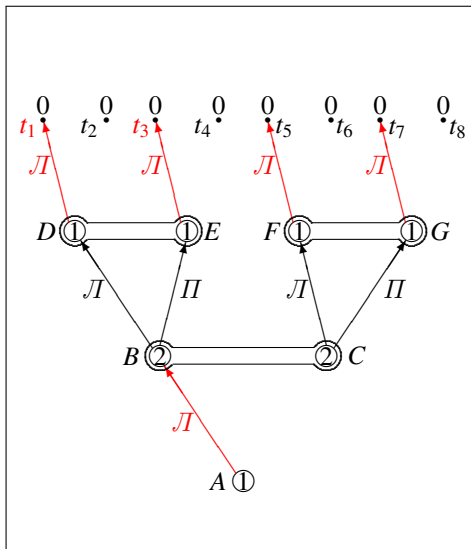


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.



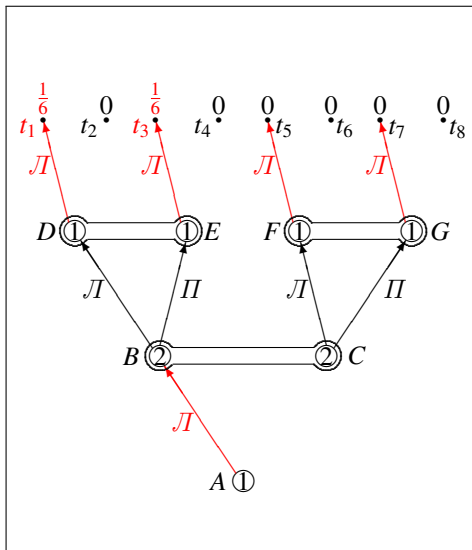


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

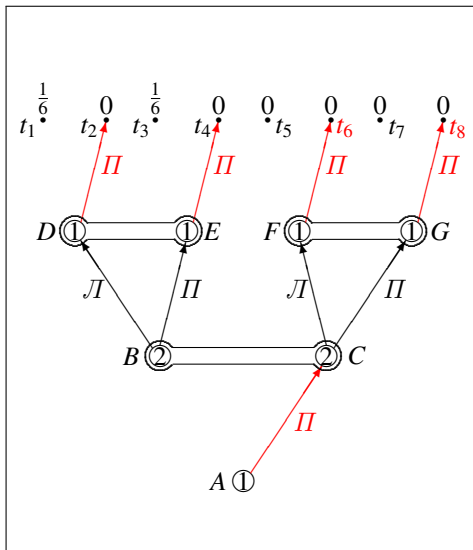


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

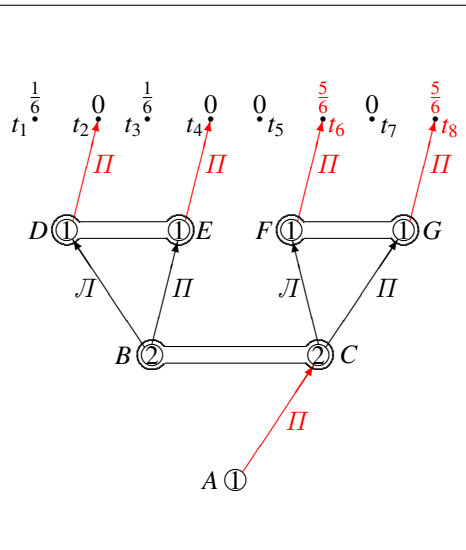


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

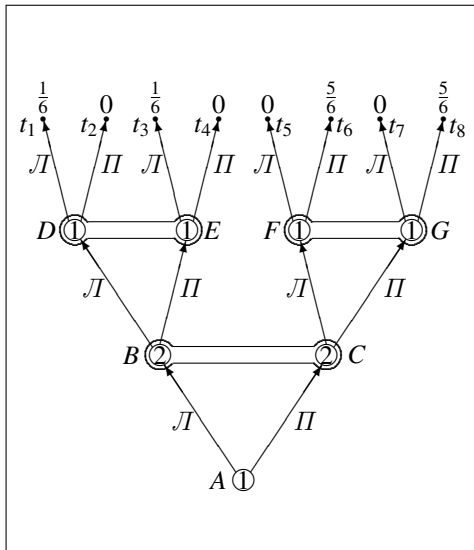


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

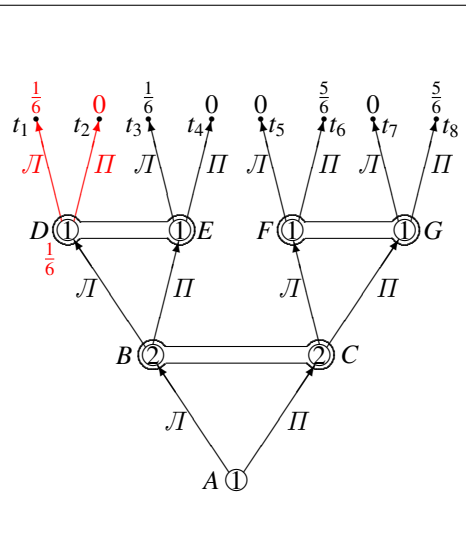


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .  
 Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

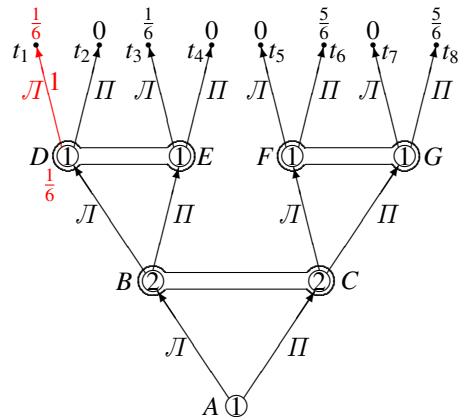


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

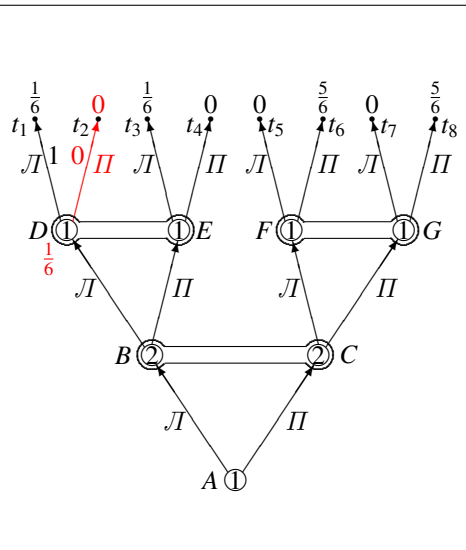


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

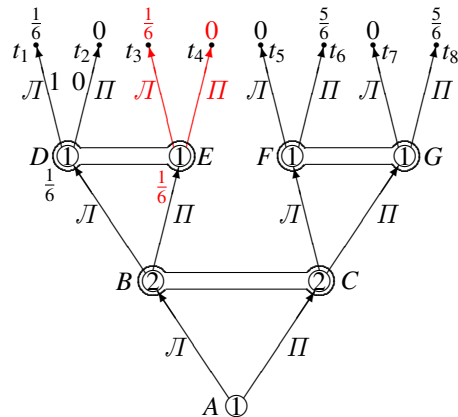


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.



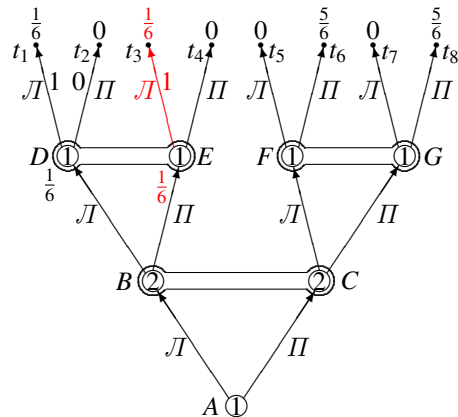


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p^1_{ЛЛЛ} = 1/6$  и  $p^1_{ППП} = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

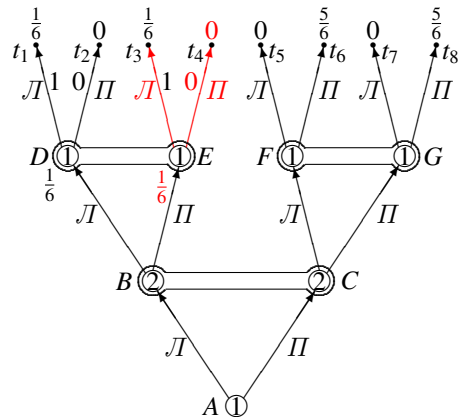


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

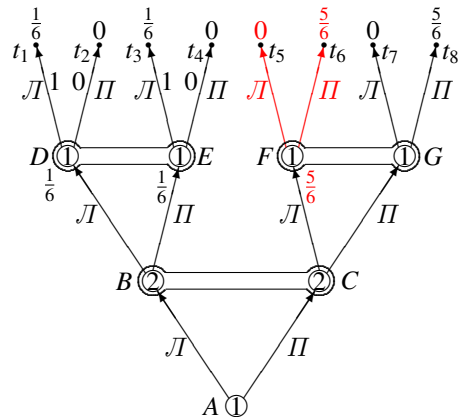


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

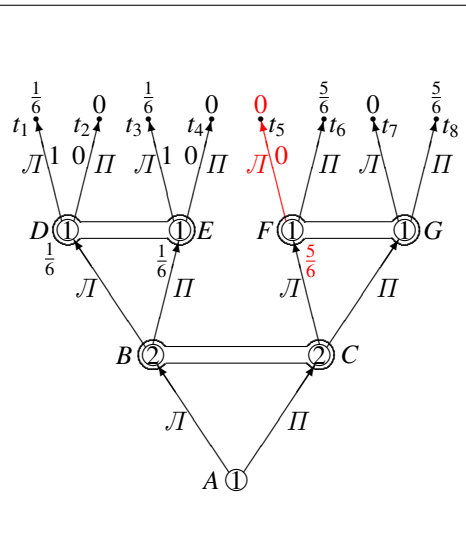


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .  
 Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

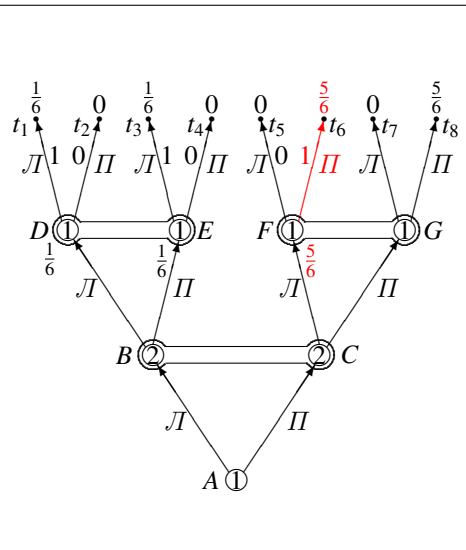


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

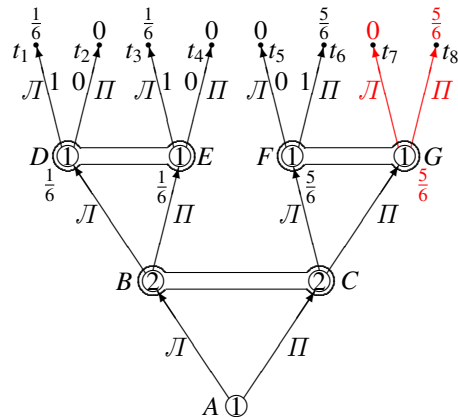


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

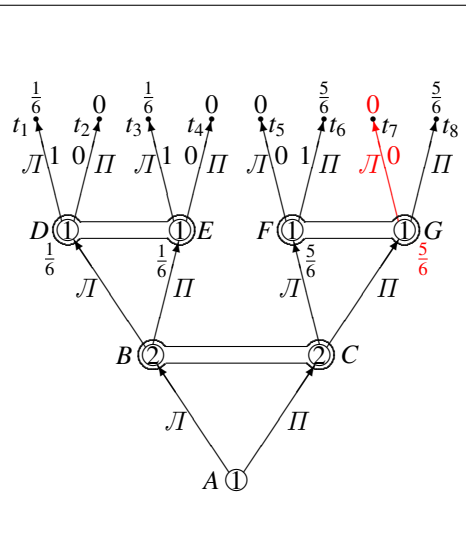


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .  
 Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

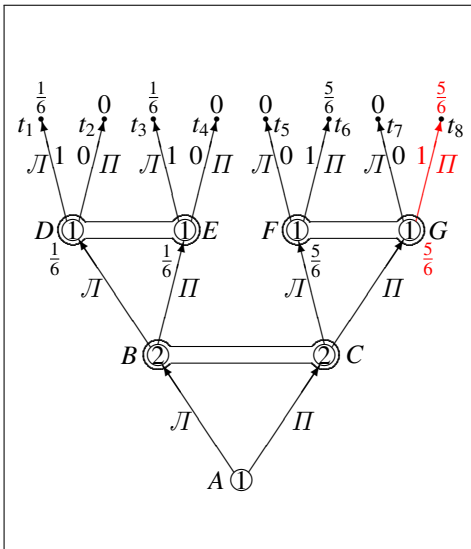


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.



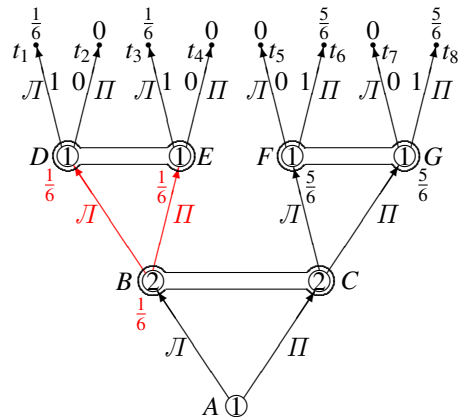


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

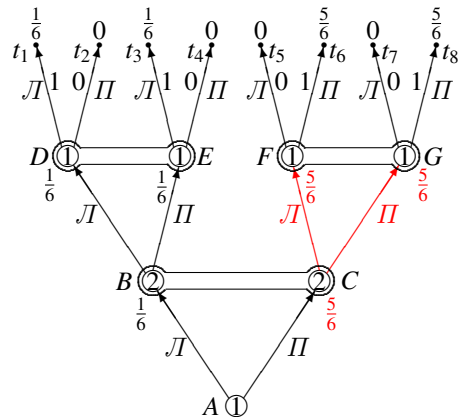


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

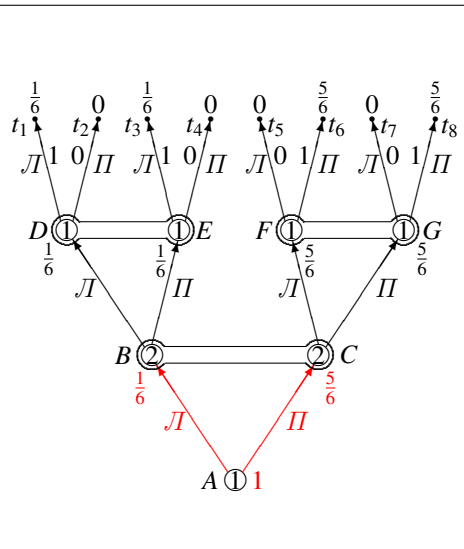


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

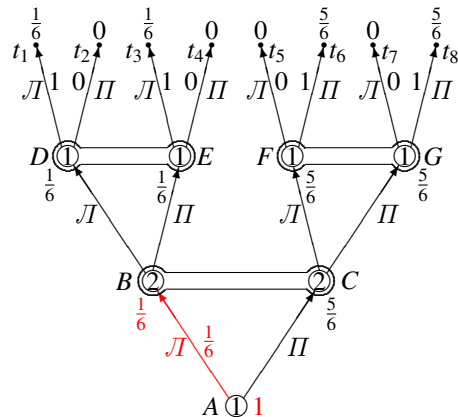


# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.



# Пример

$p^1$  с ненул. компонентами:  
 $p_{ЛЛЛ}^1 = 1/6$  и  $p_{ППП}^1 = 5/6$ .

Определяем веса конечных позиций.

Определяем веса остальных позиций и вычисляем вероятности для ходов игрока 1.

