Начать тест

Оценка:

1. ($4^{\text{б.}}$) Решить задачу

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 5 \le 0,$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$$

Ответ: $<x_1^*, x_2^*, x_3^*> =$

2. ($4^{\text{б.}}$) Найти оптимальное решение x^* и теневые цены y^* (оптимальное решение двойственной задачи) для следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\to \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 &\le 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 12, \\ 2x_1 + \ x_2 + 2x_3 &\le 8, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Ответ: $<x_1^*, x_2^*, x_3^*> =$

$<y_1^*, y_2^*, y_3^*> =$

3. ($4^{\text{б.}}$) Решить задачу квадратичного программирования:

$$6x_1 + 3x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 4,$$
$$x_1 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Ответ: $<x_1^*, x_2^*> =$

4. ($3^{\text{б.}}$) Методом сечений решить задачу целочисленного программирования:

$$3x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$3x_1 + x_2 \le 5,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+.$$

Ответ: $<x_1^*, x_2^*> =$

5. ($2^{\text{б.}}$) Решить задачу о рюкзаке:

$$10x_1 + 7x_2 + 25x_3 + 24x_4 \to \max,$$
$$2x_1 + 1x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 7,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}.$$

Ответ:
$<x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*> =$

Закончить тест **Баллы:** Исправить

Правильные ответы:

Решение заданий

Решение задания: Учитывая, что

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}, \quad g_1'(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

запишем условия Куна-Таккера

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0, \\ \lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) &= 0, \\ \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 3) &= 0, \\ \lambda_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2\lambda_1 + \quad\quad \lambda_2 &= 0, \\ 2x_2 - \ \ \lambda_1 + \quad\quad \lambda_2 &= 0, \\ 2x_3 + \ \ \lambda_1 + \quad\quad \lambda_2 &= 0, \\ \lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ \lambda_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая.

$\lambda_1 = 0$. Тогда из первых трех уравнений получаем, что $x_1 = -\frac{\lambda_2}{2}$, $x_2 = -\frac{\lambda_2}{2}$ и $x_3 = -\frac{\lambda_2}{2}$. Подставляя эти значения в поледнее уравнение, найдем λ_2:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3}{2}\lambda_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -2.$$

Откуда $x^1 = (1, 1, 1)$ — стационарная точка. Причем, поскольку $f(x)$ — выпуклая функция, то x^1 точка глобального минимума.

$\lambda_1 > 0$. Теперь в силу условия дополняющей нежесткости

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 5.$$

Их первых трех уравнений найдем

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}(2\lambda_1 + \lambda_2), \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2), \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнения

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} -2\lambda_1-\lambda_2-\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2-\frac{1}{2}\lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2 &= 5,\\ -\lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2-\frac{1}{2}\lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2 &= 3, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -3\lambda_1-\lambda_2 &= 5,\\ -\lambda_1-\frac{3}{2}\lambda_2 &= 3. \end{aligned}$$

Умножив первое уравнение на $-\frac{3}{2}$ и сложив со вторым, получим

$$\left(\frac{9}{2}-1\right)\lambda_1+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)\lambda_2=-\frac{3}{2}5+3, \quad \text{или} \quad \frac{7}{2}\lambda_1=-\frac{9}{2}.$$

Отсюда $\lambda_1=-\frac{9}{7}$, что противоречит требованию неотрицательности λ_1.

Следовательно, $x^1=(1,1,1)$ — единственная точка глобального минимума. ■

Решение задания: Вводя переменные недостатка x_3, x_4 и x_5, запишем эквивалентную задачу:

$$\begin{array}{llr} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \to \max & \\ 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + x_4 & = 10, & \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 & = 12, & (1) \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 \qquad\qquad + x_6 & = 8, & \\ \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 & \geq 0. & \end{array}$$

1. Запишем задачу (1) в табличной форме:

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно- шения
$-z$	0	5	2	3	0	0	0	
x_4	10	2	3	1	1	0	0	10/2=5
x_5	12	4	2	2	0	1	0	12/4=3
x_6	8	2	1	2	0	0	1	8/2=4

В базис вводим переменную x_1 с максимальным целевым коэффициентом равным 5, при этом, столбец 1 называется *ведущим.* В симплекс-таблице он выделен линиями. Чтобы определить, какая переменная должна покинуть базис, вычисляем отношения элементов столбца b (содержит значения базисных переменных) к положительным элементам ведущего столбца. Эти отношения записаны в последнем столбце симплекс-таблицы. Выбираем в качестве *ведущей* строку с минимальным отношением. В симплекс-таблице эта строка выделена линиями. Ей соответствует базисная переменная x_5. Переменная x_5 должна покинуть базис, а ее место должна занять переменная x_1. Итерация симплекс-метода завершается выполнением *операции замещения* с выбранными ведущей строкой и ведущим столбцом. Суть этой операции в том, чтобы с помощью элементарных матричных операций сделать ведущий столбец единичным с единицей в ведущей строке. Пересчитанная симплекс-таблица представлена ниже.

Все последующие итерации выполняются по описанным выше правилам. Мы приводим их без комментариев.

2.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно- шения
$-z$	-15	0	-1/2	1/2	0	-5/4	0	
x_4	4	0	2	0	1	-1/2	0	—
x_1	3	1	1/2	1/2	0	1/4	0	6
x_6	2	0	0	1	0	-1/2	1	2

3.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отно- шения
$-z$	-16	0	-1/2	0	0	-1	-1/2	
x_4	4	0	2	0	1	-1/2	0	
x_1	2	1	1/2	0	0	1/2	-1/2	
x_3	2	0	0	1	0	-1/2	1	

Поскольку все целевые коэффициенты отрицательны, то текущая базисное решение оптимально.

Ответ:
a) оптимальное решение $x^* = (2, 0, 2)$,
b) теневые цены $y^* = (0, 1, 1/2)$.

Решение задания: Сначала перепишем нашу задачу в виде:

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) &\to \min \\ -x_1 - x_2 &\geq -4, \\ -x_1 &\geq -2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$c = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сразу заметим, поскольку матрица D положительно определена, то локальный оптимум в задаче (2) является также и глобальным оптимумом. Теперь запишем условия оптимальности Куна-Таккера как линейную задачу о дополнительности (ЛЗД):

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ &u_1, u_2, x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2 \geq 0, \\ &u_1x_1 = 0,\ u_2x_2 = 0,\ v_1y_1 = 0,\ v_2y_2 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Перепишем задачу (3) в табличной форме:

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2
u_1	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0

Как и в симплекс-методе базисным переменным соответствуют единичные столбцы симплекс-таблицы. Строки симплекс-таблицы помечены бзисными переменными. Строка $-z$ здесь отсутствует.

Итерация 1. Чтобы построить начальный почти дополняюще-допустимый базис, нужно всести дополнительный столбец, соответствующий новой переменной s:

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
u_1	-6	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
u_2	-3	0	1	0	0	-1	-2	-1	0	-1
v_1	4	0	0	1	0	1	1	0	0	-1
v_2	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

Выбираем строку $t = 1$ с минимальным элементом $q_t = -6$ и выполняем операцию замещения с ведущими столбцом s и строкой 1, соответствующей базисной переменной u_1, которая должна покинуть базис. В результате получим следующую таблицу

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отношения
s	6	-1	0	0	0	1	1	1	1	1	$\frac{6}{1}=6$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	—
v_1	10	-1	0	1	0	2	2	1	1	0	$\frac{10}{2}=5$
v_2	8	-1	0	0	1	2	1	1	1	0	$\frac{8}{2}=4$ (min)

В данный момент не обращайте внимания на появившийся в новой таблице столбец "Отношения"и выделение столбца x_1 и строки 4. Все это относится к следующей итерации.

Мы называем базис *почти дополняюще-допустимым*, если

a) из каждой дополнительной пары в базис входит не более одной переменной;

b) точно одна дополняющая пара не представлена в базисе (обе переменные не входят в базис);

c) переменная s входит в базис.

В нашем случае в базисе не представлена пара (u_1, x_1).

Итерация 2. Согласно правилу о дополнительности в базис нужно вводить переменную x_1 (дополнение переменной u_1, покинувшей базис на предыдущей итерации). Далее действуем точно также, как и в симплекс-методе. Чтобы определить переменную для вывода из базиса, вычисляем отношения элементов столбцов q и x_1. Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 4, который лежит в строке 4 (v_2 покинет базис). Выполняя замещение с ведущими строкой 4 и столбцом x_1, получим следующую таблицу

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отношения
s	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1/2}=4$
u_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{1}=3$ (min)
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	—
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{1/2}=8$

Итерация 3. На предыдущей итерации из базиса вышла переменная v_2, поэтому ее дополнение y_2 нужно вводить в базис. Вычисляем отношения элементов столбцов q и y_2. Минимальное из этих отношений лежит в строке 2, соответствующей базисной переменной u_2, которую нужно выводить из базиса. Выполняя замещение с ведущими строкой 2 и столбцом y_2, получим следующую таблицу

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s	Отношения
s	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$ (min)
y_2	3	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	—
v_1	2	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	$\frac{2}{1}=2$
x_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$

Итерация 4. На предыдущей итерации из базиса вышла переменная u_2, поэтому ее дополнение x_2 нужно вводить в базис. Вычисляем отношения

элементов столбцов q и x_2. Минимальное из этих отношений лежит в строке 1, соответствующей базисной переменной s, которую нужно выводить из базиса. Выполняя замещение с ведущими строкой 1 и столбцом s, получим следующую таблицу

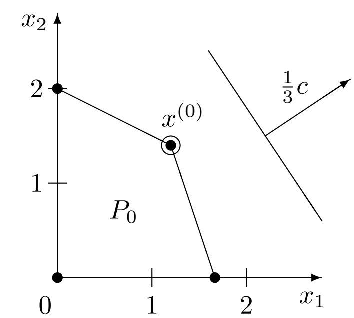
Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	s
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1
y_2	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1
v_2	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1
x_1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	-1

Как только базис покинула переменная s, мы получаем дополняюще-допустимый базис с ненулевыми базисными компонентами $v_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = \frac{7}{2}$.

Ответ: $x = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ — оптимальное решение задачи (2). ■

Решение задания: Сначала решаем релаксационную задачу ЛП:

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2 &\to \max, \\ 3x_1+\ x_2 &\le 5, && (1)\\ x_1+2x_2 &\le 4, && (2)\\ -x_1 \qquad &\le 0, && (3)\\ -\ x_2 &\le 0. && (4) \end{aligned}$$



Так как ее решение $x^{(0)} = (6/5, 7/5)^T$ нецелочисленно, то строим отсечений, складывая неравенства (1) и (2) (те, которые в точке $x^{(0)}0$ обращаются в равенства) и отнимая от правой части 1:

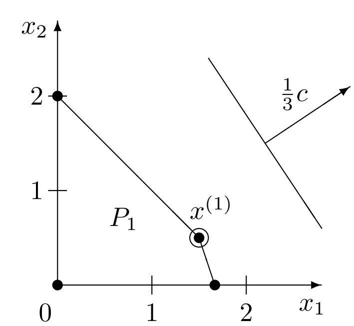
$$3x_1 + x_2 + x_1 + 2x_2 = 4x_1 + 3x_2 \le 5 + 4 - 1 = 9.$$

Мы можем усилить [1] полученное неравенство $4x_1 + 3x_2 \le 8$ разделив его на 3, а затем округлив левую и правую части:

$$\frac{4}{3}x_1 + x_2 \le \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \le \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \le 2.$$

Добавляем отсечение $x_1 + x_2 \le 2$ к релаксационной задаче:

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2 &\to \max, \\ 3x_1+\ x_2 &\le 5, && (1)\\ x_1+2x_2 &\le 4, && (2)\\ -x_1 \qquad &\le 0, && (3)\\ -\ x_2 &\le 0, && (4)\\ x_1+\ x_2 &\le 2. && (5) \end{aligned}$$



Решение $x^{(1)} = (3/2, 1/2)^T$ этой задачи ЛП снова нецелочисленно, то строим еще одно отсечение, складывая неравенства (1) и (5) (те, которые в точке $x^{(1)}$ обращаются в равенства) и отнимая от правой части 1:

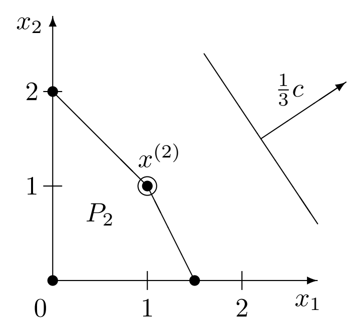
$$3x_1 + x_2 + x_1 + x_2 = 4x_1 + 2x_2 \le 5 + 2 - 1 = 6.$$

Отметим, что не можем усилить неравенство $2x_1 + x_2 \le 3$.

Добавляем отсечение $2x_1 + x_2 \le 3$ к релаксационной задаче:

[1] Для усиления неравенства мы делим его на один из коэффициентов левой части, чтобы округление левой части было меньшим, чем округление правой части.

$$
\begin{aligned}
3x_1+2x_2 &\to \max, \\
3x_1+\ x_2 &\le 5, && (1) \\
x_1+2x_2 &\le 4, && (2) \\
-x_1 \qquad &\le 0, && (3) \\
-\ x_2 &\le 0, && (4) \\
x_1+\ x_2 &\le 2, && (5) \\
2x_1+\ x_2 &\le 3. && (6)
\end{aligned}
$$



Решение $x^{(2)} = (1,1)^T$ этой задачи ЛП целочисленно, поэтому $x^* = x^{(2)} = (1,1)^T$ — оптимальное решение нашего примера.

Решение задания: Вычисления проводим по рекурентной формуле

$$F_k(\beta) = \max\{F_{k-1}(\beta), F_{k-1}(\beta - a_k) + c_k\}, \quad \beta = 0, \ldots, b;\ k = 1, \ldots, n \quad (4)$$

при начальных условиях

$$F_0(0) = 0; \quad F_0(\beta) = -\infty, \quad \beta \neq 0. \quad (5)$$

Вычисления по формулам (4)–(5) представлены в следующей таблице.

β	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0
1	$-\infty$	$-\infty$	7	7	7
2	$-\infty$	10	10	10	10
3	$-\infty$	$-\infty$	17	17	17
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	24
6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	25	31
7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	32	34

Оптимальное значение целевой функции для нашего примера равно $F_4(7) = 34$. Чтобы найти само оптимальное решение, нужно выполнить "обратный ход" по формуле (4), начиная с $\beta = b = 7$:

$$\begin{aligned}
F_4(7) &= \max\{F_3(7), F_3(7-5) + 24\} = \max\{32, 10 + 24\} = 34 \\
&\Rightarrow x_4 = 1 \text{ и } \beta = 7 - 5 = 2, \\
F_3(2) &= \max\{F_2(2), F_2(2-6) + 25\} = \max\{10, -\inf + 25\} = 10 \\
&\Rightarrow x_3 = 0 \text{ и } \beta = 2, \\
F_2(2) &= \max\{F_1(2), F_1(2-1) + 7\} = \max\{10, 0 + 7\} = 10 \\
&\Rightarrow x_2 = 0 \text{ и } \beta = 2, \\
F_1(2) &= \max\{F_0(2), F_0(2-1) + 10\} = \max\{-\inf, 0 + 10\} = 10 \\
&\Rightarrow x_1 = 1 \text{ и } \beta = 0.
\end{aligned}$$

Значит оптимальное решение для нашего примера есть точка $x^* = (1, 0, 0, 1)$.