Начать тест

Оценка:

1. ($5^{б.}$) Фирма производит два делимых продукта, используя некоторый общий делимый ресурс. В наличии имеется 200 килограмм ресурса. При цене p_1 за килограмм продукта 1 спрос на него равен $400-2p_1+p_2$, а при цене p_2 за килограмм продукта 2 спрос на него равен $200+p_1-p_2$. Для производства единицы продукта 1 требуется 4 часа рабочего времени и единица ресурса, а для производства единицы продукта 2 требуется 2 часов рабочего времени и 2 единицы ресурса. Для производства этих продуктов фирма выделяет 1000 часов рабочего времени.

Сколько единиц x_1 и x_2 каждого из продуктов нужно произвести, чтобы максимизировать стоимость произведенной продукции при полном удовлетворении спроса?
Ответ: $<x_1^*, x_2^*> =$

2. ($5^{б.}$) Фирма размещается в трех зданиях и имеет три парковочные площадки. Используя информацию, представленную в следующей таблице,

Парковка	Количество мест	Расстояние от парковки (метров)		
		Здание 1	Здание 2	Здание 3
1	35	290	380	220
2	110	410	340	370
3	80	350	390	440
Количество сотрудников		70	90	50

определите сколько мест на каждой из парковок нужно выделить сотрудникам, работающим в каждом из зданий, чтобы суммарное расстояние, которое проходят все сотрудники от своих парковок до своих зданий, было минимальным.

Ответ:

	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$П_1$			
$П_2$			
$П_3$			

3. ($5^{б.}$) Фирма заключила контракт на поставку в течении года 10 небольших реактивных самолетов для топ-менеджеров крупной корпорации. Поквартальный план поставок следующий:

Квартал	1	2	3	4
Кол-во самолетов	2	1	5	2

Оплата за каждый самолет производится после поставки его заказчику.

Начиная производство новой партии самолетов требуется переналадить оборудование, заказать комплектующие и выполнить ряд других подготовительных мероприятий. В нашем случае издержки на выполнение этих работ равны 1 млн. долларов (не включая стоимости комплектующих). Стоимость производства одного самолета одинакова для всех кварталов. Стоимость хранения (включая упущенную выходу и страховку) одного самолета в течении одного квартала равна 0.25 млн. долларов.

Нужно определить, сколько самолетов x_t производить в каждом квартале t, чтобы минимизировать суммарные издержки на подготовительные работы и хранение самолетов. **Ответ:** $<x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*> =$

Закончить тест **Баллы:** Исправить

Правильные ответы:

Решение заданий

Решение задания: Наша задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 &\to \max, \\ x_1 &= (400 - 2p_1 + p_2), \\ x_2 &= (200 + p_1 - p_2), \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 1000, \\ x_1 + 2x_2 &\le 200, \\ x_1, x_2, p_1, p_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

После исключения переменных x_1 и x_2 получим задачу

$$\begin{aligned} p_1(400 - 2p_1 + p_2) + p_2(200 + p_1 - p_2) &\to \max, \\ 4(400 - 2p_1 + p_2) + 2(200 + p_1 - p_2) &\le 1000, \\ (400 - 2p_1 + p_2) + 2(200 + p_1 - p_2) &\le 200, \\ (400 - 2p_1 + p_2) &\ge 0, \\ 200 + p_1 - p_2 &\ge 0, \\ p_1, p_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

или после приведения подобных членов

$$\begin{aligned} -400p_1 - 200p_2 + \frac{1}{2}\left(4p_1^2 + 2p_2^2 - 4p_1p_2\right) &\to \min, \\ 3p_1 - p_2 &\ge 100, \\ p_2 &\ge 600, \\ -2p_1 + p_2 &\ge -400, \\ p_1 - p_2 &\ge -200, \\ p_1, p_2 &\ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Мы имеем задачу квадратичного программирования со следующими параметрами:

$$c = \begin{pmatrix} -400 \\ -200 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 600 \\ -400 \\ -200 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица D положительно определена, то локальный оптимум в задаче (1) является также и глобальным оптимумом.

Решаем задачу (1) алгоритмом Лемке.

Итерация 1. Чтобы построить начальный почти дополняюще-допустимый базис, нужно всести дополнительный столбец, соответствующий новой переменной s:

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	v_4	p_1	p_2	y_1	y_2	y_3	y_4	s
u_1	-400	1	0	0	0	0	0	-4	2	3	0	-2	1	-1
u_2	-200	0	1	0	0	0	0	2	-2	-1	1	1	-1	-1
v_1	-100	0	0	1	0	0	0	-3	1	0	0	0	0	-1
v_2	-600	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1
v_3	400	0	0	0	0	1	0	2	-1	0	0	0	0	-1
v_4	200	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	-1

Выбираем строку $t = 4$ с минимальным элементом $q_t = -600$ и выполняем операцию замещения с ведущими столбцом s и строкой 4, соответствующей базисной переменной v_2, которая должна покинуть базис. В результате получим следующую таблицу

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	v_4	p_1	p_2	y_1	y_2	y_3	y_4	s	Отн.
u_1	200	1	0	0	-1	0	0	-4	3	3	0	-2	1	0	∞
u_2	400	0	1	0	-1	0	0	2	-1	-1	1	1	-1	0	400
v_1	500	0	0	1	-1	0	0	-3	2	0	0	0	0	0	∞
s	600	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	∞
v_3	1000	0	0	0	-1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	∞
v_4	800	0	0	0	-1	0	1	-1	2	0	0	0	0	0	∞

В данный момент не обращайте внимания на появившийся в новой таблице столбец "Отн."(Отношения) и выделение столбца y_2 и строки 4. Все это относится к следующей итерации.

Мы называем базис *почти дополняюще-допустимым*, если

a) из каждой дополнительной пары в базис входит не более одной переменной;

b) точно одна дополняющая пара не представлена в базисе (обе переменные не входят в базис);

c) переменная s входит в базис.

В нашем случае в базисе не представлена пара (v_2, y_2).

Итерация 2. Согласно правилу о дополнительности в базис нужно вводить переменную y_2 (дополнение переменной v_2, покинувшей базис на предыдущей итерации). Далее действуем точно также, как и в симплекс-методе. Чтобы определить переменную для вывода из базиса, вычисляем отношения элементов столбцов q и y_2. Среди этих отношений выбираем минимальный элемент 400, который лежит в строке 2 (u_2 покинет базис). Выполняя замещение с ведущими строкой 2 и столбцом y_2, получим следующую таблицу

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	v_4	p_1	p_2	y_1	y_2	y_3	y_4	s	Отн.
u_1	200	1	0	0	-1	0	0	-4	3	3	0	-2	1	0	$\frac{200}{3}$
y_2	400	0	1	0	-1	0	0	2	-1	-1	1	1	-1	0	∞
v_1	500	0	0	1	-1	0	0	-3	2	0	0	0	0	0	250
s	600	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	600
v_3	1000	0	0	0	-1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	∞
v_4	800	0	0	0	-1	0	1	-1	2	0	0	0	0	0	400

Итерация 3. На предыдущей итерации из базиса вышла переменная u_2, поэтому ее дополнение p_2 нужно вводить в базис. Вычисляем отношения элементов столбцов q и p_2. Минимальное из этих отношений лежит в строке 1, соответствующей базисной переменной u_1, которую нужно выводить из базиса. Выполняя замещение с ведущими строкой 1 и столбцом p_2, получим следующую таблицу

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	v_4	p_1	p_2	y_1	y_2	y_3	y_4	s	Отн.
p_2	$\frac{200}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	∞
y_2	$\frac{1400}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	700
v_1	$\frac{1100}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	0	∞
s	$\frac{1600}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0	0	1	400
v_3	1000	0	0	0	-1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	500
v_4	$\frac{2000}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{5}{3}$	0	0	0	0	0	0	400

Итерация 4. На предыдущей итерации из базиса вышла переменная u_1, поэтому ее дополнение p_1 нужно вводить в базис. Вычисляем отношения элементов столбцов q и p_1. Минимальное из этих отношений лежит в строке 4, соответствующей базисной переменной s, которую нужно выводить из базиса. Выполняя замещение с ведущими строкой 4 и столбцом p_1, получим следующую таблицу

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	v_4	p_1	p_2	y_1	y_2	y_3	y_4	s	Отн.
p_2	600	0	0	0	-1	0	0	0	1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	
y_2	200	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	
v_1	500	$-\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	
p_1	400	$-\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	
v_3	1000	0	0	0	-1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	
v_4	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	0	0	0	$-\frac{5}{4}$	

Как только базис покинула переменная s, мы получаем дополняюще-допустимый базис. Из последней симплекс-таблицы получаем оптимальные цены: $(p_1^*, p_2^*) = (400, 600)$. Зная цены, мы можем вычислить оптимальные выпуски:

$$x_1^* = 400 - 2p_1^* + p_2 = 400 - 800 + 600 = 200,$$
$$x_2^* = 200 + p_1^* - p_2^* = 200 + 400 - 600 = 0.$$

Ответ: $p_1^*, p_2^*) = (400, 600)$ — оптимальные цены,
$(x_1^*, x_2^*) = (200, 0)$ — оптимальные выпуски.

Решение задания: Это транспортная задача, в которой поставщиками (парковочных мест) являются парковки 1,2 и 3, а потребителями — сотрудники в зданиях 1,2 и 3. Решим задачу методом потенциалов.

Поскольку суммарное предложение $35+110+80 = 225$ меньше спроса $70+90+50 = 210$, то вводим фиктивного потребителя со спросом $225 - 210 = 15$. Начальный план строим по методу северо-западного угла. Ниже приведены таблицы на всех итерациях метода потенциалов.

1..

	70	90	50	15	
35	290 **35**	380 160	220 -50	0 170	0
110	410 **35** -	340 **75** +	370 -20	0 50	120
80	350 -110 +	390 **15** -	440 **50**	0 **15**	170
	290	220	270	-170	

2.

	70	90	50	15	
35	290 **35** -	380 160	220 -160 +	0 60	0
110	410 **20**	340 **90**	370 -130	0 -60	120
80	350 **15** +	390 110	440 **50** -	0 **15**	60
	290	220	380	-60	

3.

	70	90	50	15	
35	290 160	380 320	220 **35**	0 220	0
110	410 **20** -	340 **90**	370 -130 +	0 -60	280
80	350 **50** +	390 110	440 **15** -	0 **15**	220
	130	60	220	-220	

4.

	70	90	50	15	
35	290 30	380 190	220 **35**	0 90	0
110	410 **5**	340 **90**	370 **15**	0 90	150
80	350 **65**	390 110	440 130	0 **15**	90
	260	190	220	-90	

Ответ:

- на парковке 1: 35 автомобилей сотрудников из здания 3;

- на парковке 2: 5 автомобилей сотрудников из здания 1, 90 автомобилей сотрудников из здания 2, 15 автомобилей сотрудников из здания 3;
- на парковке 3: 65 автомобилей сотрудников из здания 1.

■

Решение задания: Представим данную задачу как задачу о размере партии со следующими параметрами:

t	d_t	f_t	c_t	h_t	w
1	2	1	0	0.25	1
2	1	1	0	0.25	0.75
3	5	1	0	0.25	0.5
4	2	1	0	0.25	0.25

.

Поскольку стоимость производства одного самолета одинакова для всех кварталов, то стоимость производства всех самолетов одинакова для всех производственных планов. Поэтому мы определили переменные издержки c_t равными нулю для всех периодов t].

Отметим также, что значения в столбце w не являются исходными данными, а вычислены по формуле $w_t = c_t + \sum_{\tau=t}^{4} h_\tau$, $t = 1, \dots, 4$.

Вычисления проводим по следующим рекуррентным соотношениям:

$$
\begin{aligned}
H_0 &= 0,\\
H_t &= \min_{1\le\tau\le t}\{H_{\tau-1} + f_\tau + w_\tau d_{\tau t}\}, \quad t = 1, \dots, 4,
\end{aligned}
$$

где $d_{\tau t} = \sum_{u=\tau}^{t} d_i$.

Вычисляя значения H_t, для каждого $t = 1, 2, 3, 4$ будем запоминать индекс τ_t, на котором достигается значение H_t.

$$
\begin{aligned}
H_0 &= 0,\\
H_1 &= H_0 + f_1 + w_1 d_{11} = 0 + 1 + 1 \cdot 2 = 3, \quad \tau_1 = 1,\\
H_2 &= \min\{H_0 + f_1 + w_1 d_{12} = 0 + 1 + 1 \cdot 3 = 4,\\
&\qquad\quad H_1 + f_2 + w_2 d_{22} = 3 + 1 + 0.75 \cdot 1 = 4.75\}\\
&= 4, \quad \tau_2 = 1,\\
H_3 &= \min\{H_0 + f_1 + w_1 d_{13} = 0 + 1 + 1 \cdot 8 = 9,\\
&\qquad\quad H_1 + f_2 + w_2 d_{23} = 3 + 1 + 0.75 \cdot 6 = 8.5,\\
&\qquad\quad H_2 + f_3 + w_3 d_{33} = 4 + 1 + 0.5 \cdot 5 = 7.5\}\\
&= 7.5, \quad \tau_3 = 3,\\
H_4 &= \min\{H_0 + f_1 + w_1 d_{14} = 0 + 1 + 1 \cdot 10 = 11,\\
&\qquad\quad H_1 + f_2 + w_2 d_{24} = 3 + 1 + 0.75 \cdot 8 = 10,\\
&\qquad\quad H_2 + f_3 + w_3 d_{34} = 4 + 1 + 0.5 \cdot 7 = 8.5,\\
&\qquad\quad H_3 + f_4 + w_4 d_{44} = 7.5 + 1 + 0.25 \cdot 2 = 9\}\\
&= 8.5, \quad \tau_4 = 3.
\end{aligned}
$$

Теперь выполним обратный ход и найдем оптимальный план $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)^T$. Поскольку значение H_4 достигается при $\tau_4 = 3$, то $x_4^* = 0$, а $x_3^* = d_{34} = d_3 + d_4 = 5 + 2 = 7$. Далее, поскольку значение H_2 достигается при $\tau = 1$, то $x_2^* = 0$, а $x_1^* = d_{12} = d_1 + d_2 = 2 + 1 = 3$.

Итак, оптимальный план следующий: $x^* = (3, 0, 7, 0)^T$. ■