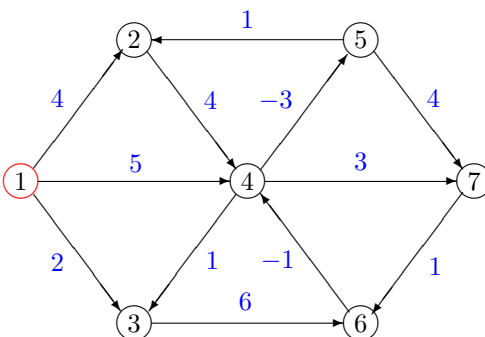


БГУ
Экономический факультет

Задачи на графах и сетях

Н.Н. Писарук

1. (3^б.) Найти дерево кратчайших путей с корнем в узле 1 в следующем графе:



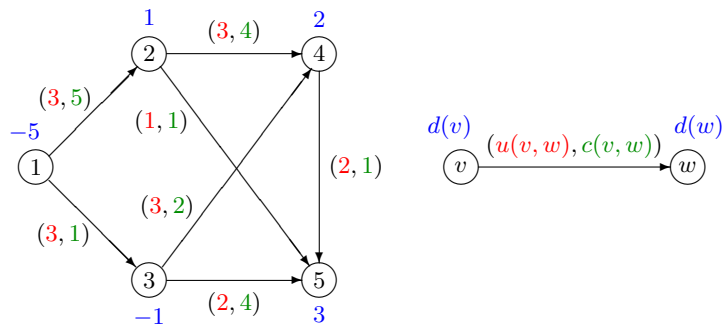
Дерево кратчайших путей: $parent =$

2. (3^б.) Некоторый проект состоит из работ, указанных в следующей таблице:

Работа	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Продолж.	7	6	5	7	6	7	8	9	12	9
Непоср. предш.	-	-	-	a,c	a,b,c	b	f	j,e,d	a,c	f

Перечислите **критические работы**:

3. (4^б.) Решите сетевую транспортную задачу, представленную на следующем рисунке:



Оптимальный поток:

$$(f(1, 2), f(1, 3), f(2, 4), f(2, 5), f(3, 4), f(3, 5), f(4, 5)) =$$

Баллы:

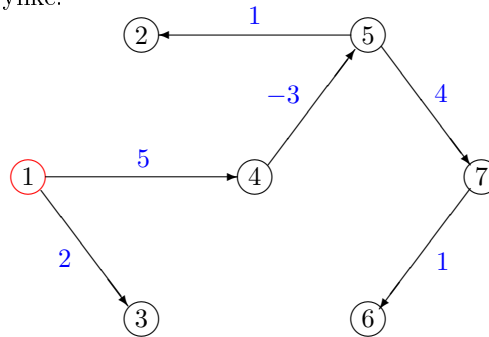
Ответы:

Решение заданий

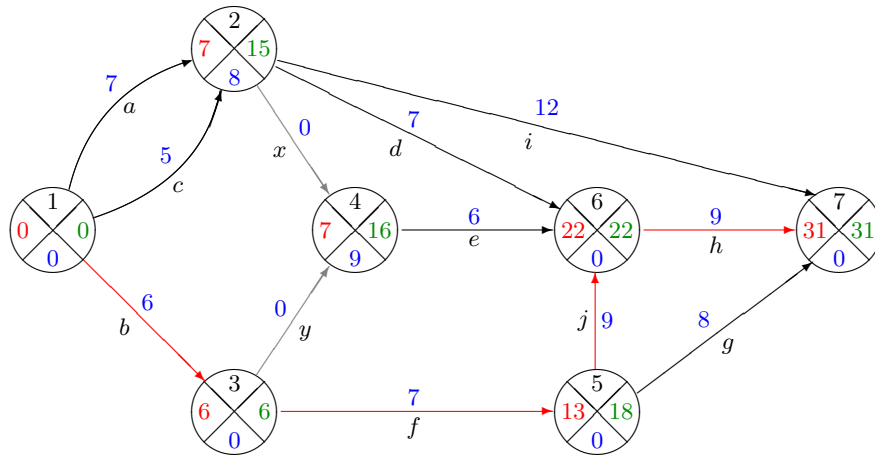
Решение задания: Поскольку в данном примере есть отрицательные длины дуг, то используем алгоритм Форда–Беллмана. Работа алгоритма по итерациям представлена в следующей таблице.

Ит.	S	d	$parent$
0	{1}	(0, ∞ , ∞ , ∞ , ∞ , ∞ , ∞)	(1, -, -, -, -, -, -)
1	{2, 3, 4}	(0, 4, 2, 5, ∞ , ∞ , ∞)	(1, 1, 1, 1, -, -, -)
2	{5, 6, 7}	(0, 4, 2, 5, 2, 8, 8)	(1, 1, 1, 1, 4, 3, 4)
3	{2, 6, 7}	(0, 3, 2, 5, 2, 7, 6)	(1, 5, 1, 1, 4, 7, 5)
4	{ \emptyset }	(0, 3, 2, 5, 2, 7, 6)	(1, 5, 1, 1, 4, 7, 5)

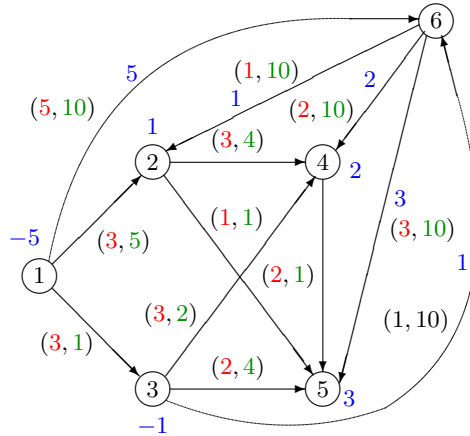
Этап инициализации есть итерация 0. Дерево кратчайших путей задается функцией $parent$ на последней 5-й итерации. Оно также представлено на следующем рисунке.



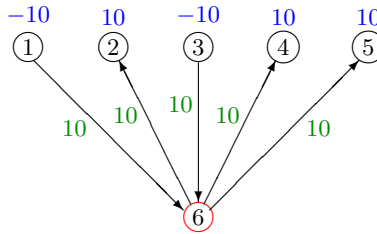
Решение задания: Сетевой график проекта с рассчитанными параметрами представлен на следующем рисунке, где красным цветом выделены критические работы.



Решение задания: Чтобы найти начальный допустимый поток, расширим потоковую сеть, добавляя дополнительную вершину 6 и дуги (2, 6), (4, 6), (5, 6) и (6, 1), (6, 3) (по одной дуге для каждой вершины сети). Стоимости всех новых дуг определим равными 10 (∞), а пропускные способности и потоки по дугам (6, v) и (v , 6) — равными $|d(v)|$.



Начальное базисное дерево T представлено на следующем рисунке, где числа на дугах — это стоимости, а числа рядом с вершинами — это цены.



Далее мы приводим итерации сетевого симплекс-метода. Изменения дуговых потоков после каждой итерации представлены в таблице 1. Дуга, которая добавляется к базисному дереву, обозначается через (v, w) , а дуга, которая удаляется из дерева, обозначается через (x, y) .

1. $c_p(1, 2) = -10 + 5 - 10 = -15 < 0$, $(v, w) = (1, 2)$, $C = (1, 2, 6, 1)$, $\delta = \min\{3, 1, 1\} = 1$, $(x, y) = (2, 6)$. Новое базисное дерево и функция цен представлены на рис. 1.a).
2. $c_p(1, 3) = -10 + 1 + 10 = 1$, $c_p(2, 4) = -5 + 4 - 10 = -11$, $(v, w) = (2, 4)$, $C = (2, 4, 6, 1, 2)$, $\delta = \min\{3, 2, 4, 2\} = 2$, $(x, y) = (1, 2)$. Новое базисное дерево и функция цен представлены на рис. 1.b).
3. $c_p(1, 2) = -10 + 5 - 6 = -11$, $c_p(1, 3) = -10 + 1 + 10 = 1$, $c_p(2, 5) = 6 + 1 - 10 = -3$, $(v, w) = (2, 5)$, $C = (2, 5, 6, 4, 2)$, $\delta = \min\{1, 3, 6, 2\} = 1$, $(x, y) = (2, 5)$. Данная итерация не меняет базисное дерево.

Таблица 1: Потоки в конце итераций

	0	1	2	3	4,5	6	7,8	9,10
(1,2)	0	1	3	3	3	3	2	2
(1,3)	0	0	0	0	0	2	3	3
(2,4)	0	0	2	1	1	1	0	0
(2,5)	0	0	0	1	1	1	1	1
(3,4)	0	0	0	0	1	1	2	3
(3,5)	0	0	0	0	0	2	2	1
(4,5)	0	0	0	0	0	0	0	1
(1,6)	5	4	2	2	2	0	0	0
(6,2)	1	0	0	0	0	0	0	0
(3,6)	1	1	1	1	0	0	0	0
(6,4)	2	2	0	1	0	0	0	0
(6,5)	3	3	3	2	2	0	0	0

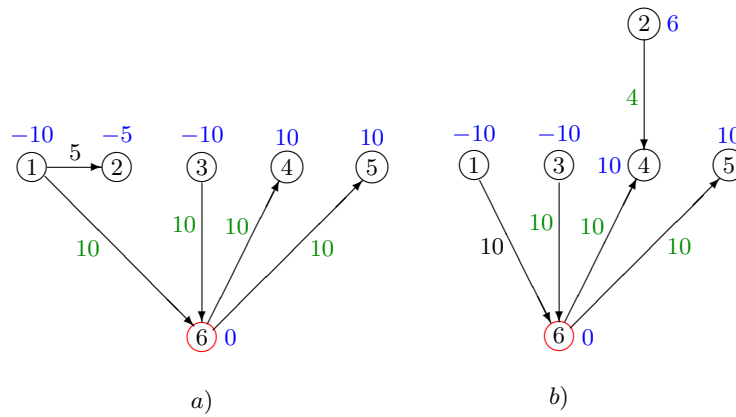


Рис. 1: Базисные деревья после итераций 1,2 и 3

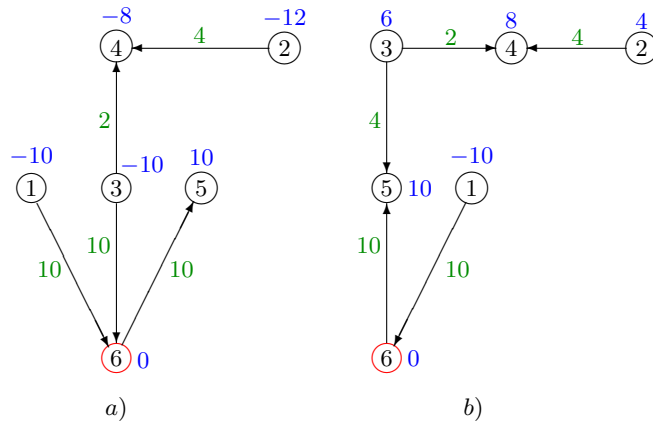


Рис. 2: Базисные деревья после итераций 4,5

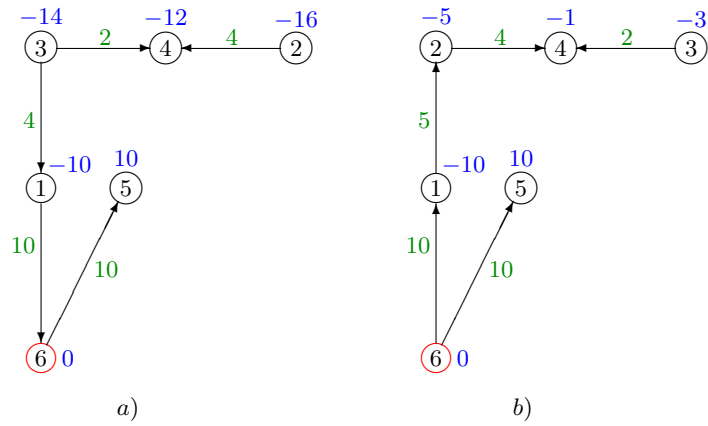


Рис. 3: Базисные деревья после итераций 6,7

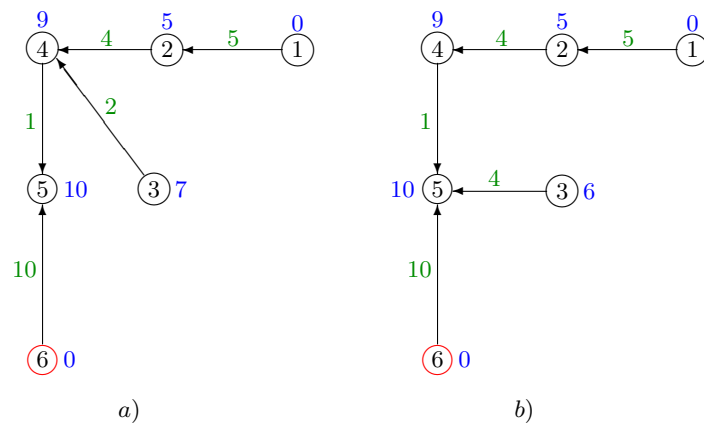


Рис. 4: Базисные деревья после итераций 8,9

4. $c_p(3, 4) = -10 + 2 - 10 = -18$, $(v, w) = (3, 4)$, $C = (3, 4, 6, 3)$, $\delta = \min\{3, 1, 1\}$, $(x, y) = (4, 6)$. Новое базисное дерево и функция цен представлены на рис. 2.a).
5. $c_p(3, 5) = -10 + 4 - 10 = -16$, $(v, w) = (3, 5)$, $C = (3, 5, 6, 3)$, $\delta = \min\{2, 2, 0\} = 0$, $(x, y) = (6, 3)$. Новое базисное дерево и функция цен представлены на рис. 2.b).
6. $c_p(1, 3) = -10 + 1 - 6 = -15$, $(v, w) = (1, 3)$, $C = (1, 3, 5, 6, 1)$, $\delta = \min\{3, 2, 2, 2\} = 2$, $(x, y) = (3, 5)$. Новое базисное дерево и функция цен представлены на рис. 3.a).
7. $c_p(1, 2) = -10 + 5 + 16 = 1$, $(v, w) = (2, 1)$, $C = (2, 1, 3, 4, 2)$, $\delta = \min\{3, 1, 2, 1\} = 1$, $(x, y) = (1, 3)$. Новое базисное дерево и функция цен представлены на рис. 3.b).
8. $c_p(1, 3) = -10 + 1 + 3 = -6$, $c_p(2, 5) = -5 + 1 - 10 = -14$, $c_p(3, 5) = -3 + 4 - 10 = -9$, $c_p(4, 5) = -1 + 1 - 10 = -10$, $(v, w) = (4, 5)$, $C = (4, 5, 6, 1, 2, 4)$, $\delta = \min\{2, 0, 6, 1, 3\} = 0$, $(x, y) = (5, 6)$. Новое базисное дерево и функция цен представлены на рис. 4.a).
9. $c_p(1, 3) = 0 + 1 - 7 = -6$, $c_p(2, 5) = 5 + 1 - 10 = -4$, $c_p(3, 5) = 7 + 4 - 10 = 1$, $(v, w) = (5, 3)$, $C = (5, 3, 4, 5)$, $\delta = \min\{2, 1, 2\} = 1$, $(x, y) = (3, 4)$. Новое базисное дерево и функция цен представлены на рис. 4.b).
10. $c_p(1, 3) = 0 + 1 - 6 = -5$, $c_p(2, 5) = 5 + 1 - 10 = -4$, $c_p(3, 4) = 6 + 2 - 9 = -1$. Поскольку приведенные стоимости всех дуг графа остаточных пропускных способностей неотрицательны, то текущий поток оптимален.

