БГУ
Экономический факультет

Теория игр: экзаменационный тест (вариант 1)

Н.Н. Писарук

Последняя ревизия: 7 января 2009 г.

pisaruk@bsu.by
Версия 3.0

Начать тест

1. ($2^{б.}$) Для игры "конфликт полов", заданной следующей матрицей выигрышей игроков (мужа и жены)

	Футбол	Балет
Футбол	$2, 1$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1, 2$

,

найдите коррелированные равновесие, для которого минимальный из ожидаемых выигрышей игроков максимален.

Ответ: $(p(\text{Ф}, \text{Ф}), p(\text{Ф}, \text{Б}), p(\text{Б}, \text{Ф}, p(\text{Б}, \text{Б})) =$

2. ($2^{б.}$) Трем фирмам нужны склады для хранения некоторого продукта. Фирмы могут строить склады самостоятельно, а также могут кооперироваться и строить совместно используемые склады. Первой фирме нужен склад площадью 100 м^2, второй — 300 м^2, третьей — 200 м^2. Стоимость строительства склада в зависимости от площади представлена в следующей таблице:

100 м^2	200 м^2	300 м^2	400 м^2	500 м^2	600 м^2
10	19	26	32	36	38

Для каждой из фирм определите ее затраты на строительство склада, вычислив *значение Шепли.*

Ответ: Затраты фирм равны

3. ($4^{б.}$) В каждом из двух карманов игрока 1 лежит по монете. Одна из них правильная (при подбрасывании с равной вероятностью выпадают орел и решка), а вторая неправильная (при подбрасывании с вероятностью $1/3$ выпадает орел и с вероятностью $2/3$ выпадает решка). Игрок 1 знает, в каком кармане лежит правильная монета, а в каком неправильная. Игрок 2 знает только описанные выше свойства монет, но не может по виду отличить одну монету от другой. Правила игры следующие. Игрок 1 достает из кармана одну из монет и подбрасывает ее. Игрок 2, видя исход, должен сказать, какую монету он видит, правильную или неправильную. Если игрок 2 дает правильный ответ, то игрок 1 платит второму единицу, иначе игрок 2 платит первому единицу.
Постройте дерево игры, перейдите к стратегической форме игры и решите ее. В качестве ответа запишите ситуацию равновесия Нэша.

Ответ:
$$p = (p_{\text{П}}, p_{\text{Н}}) =$$
$$q = (q_{\text{ПП}}, q_{\text{ПН}}, q_{\text{НП}}, q_{\text{НН}}) =$$

Замечание. Здесь индекс П означает правильную монету, а индекс Н — неправильную монету. Двойные индексы интерпретируются следующим образом: первый индекс задает ответ игрока 2, если выпал орел, а второй индекс задает ответ игрока 2, если выпала решка.

4. ($4^{б.}$) Студент (игрок 1) выпускного курса вуза претендует получить работу на фирме. Наниматель (игрок 2), судя по оценкам студента, считает, что вероятность того, что этот студент *умный*, равна ρ. Соответственно, по мнению нанимателя, вероятность того, что этот студент *глупый* равна $1 - \rho$. Студент может проводить свободное время на пляже, или, чтобы лучше подготовиться к предстоящей работе, посещать платные курсы (и это наниматель может легко проверить). Наниматель должен решить нанять студента или не нанять. Выигрыши игроков в зависимости от типа студента (умный или глупый) следующие:

Умный				Глупый		
	Нанять	Не нанять			Нанять	Не нанять
Пляж	$4, 2$	$1, 0$		Пляж	$4, -2$	$1, 0$
Курсы	$2, 3$	$-1, 0$		Курсы	$2, 1$	$-1, 0$

Найти байесовское равновесие, если $\rho = \frac{3}{4}$.
Пример записи ответа:

$$(s_1(\text{умный}), s_1(\text{глупый})) = \text{пляж}, \text{курсы}$$
$$s_2 = \text{нанять}$$

Ответ:

$(s_1(\text{умный}), s_1(\text{глупый})) =$

$s_2 =$

Закончить тест **Баллы**: Исправить

Ответы:

Решение заданий

Решение задания: Чтобы найти требуемое коррелированное равновесие, нам нужно решить следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} v &\to \max \\ 2p(\Phi,\Phi)+0p(\Phi,\text{Б}) &\geq 0p(\Phi,\Phi)+1p(\Phi,\text{Б}), \\ 0p(\text{Б},\Phi)+1p(\text{Б},\text{Б}) &\geq 2p(\text{Б},\Phi)+0p(\text{Б},\text{Б}), \\ 1p(\Phi,\Phi)+0p(\text{Б},\Phi) &\geq 0p(\Phi,\Phi)+2p(\text{Б},\Phi), \\ 0p(\Phi,\text{Б})+2p(\text{Б},\text{Б}) &\geq 1p(\Phi,\text{Б})+0p(\text{Б},\text{Б}), \\ p(\Phi,\Phi)+p(\Phi,\text{Б})+p(\text{Б},\Phi)+p(\text{Б},\text{Б}) &= 1, \\ 2p(\Phi,\Phi)+0p(\Phi,\text{Б})+0p(\text{Б},\Phi)+1p(\text{Б},\text{Б}) &\geq v, \\ 1p(\Phi,\Phi)+0p(\Phi,\text{Б})+0p(\text{Б},\Phi)+2p(\text{Б},\text{Б}) &\geq v, \\ p(\Phi,\Phi),p(\Phi,\text{Б}),p(\text{Б},\Phi),p(\text{Б},\text{Б}) &\geq 0. \end{aligned}$$

Оптимальное решение этой задачи следующее

$$p(\Phi,\Phi)=p(\text{Б},\text{Б})=\frac{1}{2}, \quad p(\Phi,\text{Б})=p(\text{Б},\Phi)=0, \quad v=\frac{3}{2}.$$

Действительно, данное решение удовлетворяет всем ограничениям, а поскольку минимальный из выигрышей игроков не может превосходить половины их суммарного выигрыша $\frac{1}{2}(2+1)=\frac{3}{2}$, то это решение оптимальное. ■

Решение задания: Запишем функцию затрат:

$$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = 10,\ v(2) = 26,\ v(3) = 19,$$
$$v(1,2) = 32,\ v(1,3) = 26,\ v(2,3) = 36,\ v(1,2,3) = 38.$$

Затем перейдем к функции выигрышей (экономии)

$$\bar{v}(\emptyset) = \bar{v}(1) = \bar{v}(2) = \bar{v}(3) = 0,$$
$$\bar{v}(1,2) = 4,\ \bar{v}(1,3) = 3,\ \bar{v}(2,3) = 9,\ \bar{v}(1,2,3) = 17.$$

Теперь вычислим значение Шепли:

	Вклады игроков		
перестановка	1	2	3
(1,2,3)	0	4	13
(1,3,2)	0	14	3
(2,1,3)	4	0	13
(2,3,1)	8	0	9
(3,1,2)	3	14	0
(3,2,1)	8	9	0
Средний выигрыш	23/6	41/6	38/6

И, наконец, вычислим затраты фирм

$$(10 - 23/6, 26 - 41/6, 19 - 38/6) = \left(\frac{37}{6}, \frac{115}{6}, \frac{76}{6}\right).$$

■

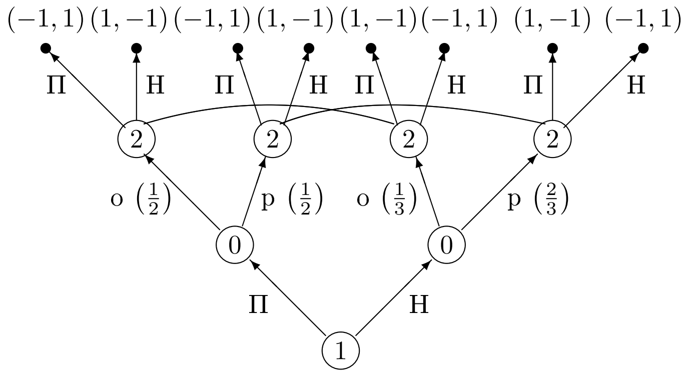

Рис. 1: Дерево игры для упражнения 3

Решение задания: Дерево данной игры представлено на рисунке 2.

У первого игрока имеется две стратегии: П - достать правильную монету, Н - достать неправильную монету. У второго игрока два информационных множества, в каждом из которых по два хода. Следовательно, у второго игрока имеется четыре стратегии: ПП - всегда говорить, что монета правильная; ПН - говорить правильная, когда выпал орел, и неправильная, когда выпала решка; НП - говорить неправильная, когда выпал орел, и правильная, когда выпала решка; НН - всегда говорить неправильная. Поскольку данная игра антагонистическая, то ее стратегическая форма является матричной игрой со следующей матрицей выигрышей первого игрока

	ПП.	ПН	НП	НН
П	-1	0	0	1
Н	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1

Решая данную игру, например, графическим методом, мы найдем следующую ситуацию равновесия

$$p = (p_{\text{П}}, p_{\text{Н}}) = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right),$$

$$q = (q_{\text{ПП}}, q_{\text{ПН}}, q_{\text{НП}}, q_{\text{НН}}) = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 0, 0\right),$$

при этом цена игры $v = -\frac{1}{7}$.

■

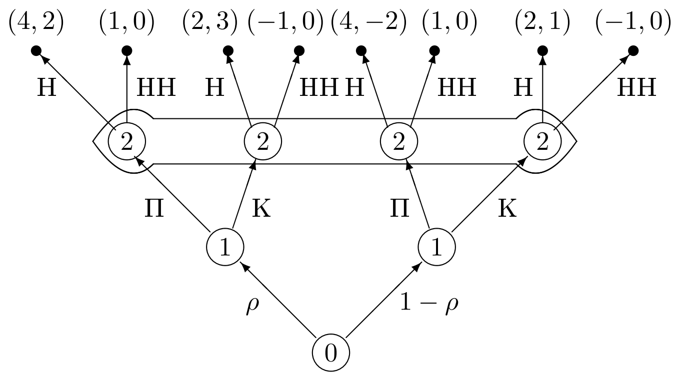

Рис. 2: Дерево игры для примера 4

Решение задания: Поскольку игрок 2 (наниматель) не имеет секретной информации, то у него всего один тип $|T_2| = 1$ (единственный тип игрока 1 мы можем обозначить произвольным образом). Игрок 1 (студент) скрывает информацию о своем интеллекте, поэтому у него два типа $T_1 = \{\text{У}, \Gamma\}$, где У означает умный, а Г — глупый.

Байесовская стратегия игрока 1 должна указать его действия для каждого из своих типов, т.е. игроку 1 нужно определить два значения

$$s_1(\text{У}), s_1(\Gamma) \in S_1 = \{\Pi, \text{К}\},$$

где П означает пляж, а К — курсы. Стратегия $s_2 \in S_2 = \{\text{Н}, \text{НН}\}$ игрока 2 задает одно из двух его решений, где Н означает нанять студента, а НН — не нанять.

Следуя идее Харсаний, данную байесовскую игру рассматриваем как игру двух лиц с несовершенной информацией, в которой первый случайный ход делает Природа. Дерево для данной игры представлено на рис. 2.

Запишем стратегическую форму для этой игры:

	Н	НН
ПП	$4, 4\rho - 2$	$1, 0$
ПК	$2(1+\rho), 1+\rho$	$-1+2\rho, 0$
КП	$4-2\rho, -2+5\rho$	$1-2\rho, 0$
КК	$2, 1+2\rho$	$-1, 0$

.

В данной биматричной игре стратегияя ПП игрока 1 доминирует все остальные его стратегии. Оптимальным ответом игрока 2 на стратегию ПП игрока 1 будет

стратегия Н, если $\rho < \frac{1}{2}$;

любая из его стратегий, если $\rho = \frac{1}{2}$;

стратегия Н, если $\rho > \frac{1}{2}$.

Соответствие между байесовскими стратегиями игрока 1 и его стратегиями в биматричной игре следующее:

$$(s_1(\text{У}) = \text{П}, s_1(\text{Г}) = \text{П}) \to \text{ПП},$$
$$(s_1(\text{У}) = \text{П}, s_1(\text{Г}) = \text{К}) \to \text{ПК},$$
$$(s_1(\text{У}) = \text{К}, s_1(\text{Г}) = \text{П}) \to \text{КП},$$
$$(s_1(\text{У}) = \text{К}, s_1(\text{Г}) = \text{К}) \to \text{КК}.$$

Поэтому ответом для $\rho = \frac{3}{3}$ будет следующая пара байесовских стратегий:

$$(s_1(\text{умный}), s_1(\text{глупый})) = (\text{пляж}, \text{пляж}),$$
$$s_2 = \text{нанять}.$$

■